

Инволюции, двойственность, сопряжение, гомографии на конике

- ГС17♦1. Найдите образы точек $\infty, 0, 1, -1, 3$ комплексной проективной прямой при инволюции с неподвижными точками а) $2, 1/2$ б) $-3, 2$.
- ГС17♦2. Найдите неподвижные точки инволюции комплексной проективной прямой, при которой а) $1 \leftrightarrow -2, 2 \leftrightarrow -1$ б) $1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4$.
- ГС17♦3. Коника $C \subset \mathbb{P}_2$ имеет уравнение $x_0^2 + x_1^2 + 12x_2^2 - 2x_0x_1 + 10x_0x_2 - 8x_1x_2 = 0$. Напишите уравнение двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ в двойственном базисе.
- ГС17♦4. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?
- ГС17♦5. Над полем \mathbb{C} напишите уравнения касательных, опущенных из точки $(1 : 1 : 1)$ на конику из зад. ГС17♦3.
- ГС17♦6. Покажите, что для любой неперспективной гомографии $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\simeq} \ell_2$ на \mathbb{P}_2 существует единственная гладкая коника C , такая что $y = \varphi(x)$ если и только если прямая (xy) касается C .
- ГС17♦7. Каково уравнение гладкой коники C в базисе (e_0, e_1, e_2) , если треугольник $e_0e_1e_2$ а) вписан в C б) автополярен относительно C ?

Поляритет и сопряжение относительно гладкой квадрики. Гладкая квадратика $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ задаёт линейное биективное полярное преобразование $\bar{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}(V^*)$ переводящее точку $p \in \mathbb{P}(V)$ в её полярную гиперплоскость¹ $\mathbb{P}(p^\perp) \subset \mathbb{P}(V)$. Две точки (соотв. гиперплоскости) называются сопряжёнными относительно Q , если одна из них лежит на поляре (соотв. проходит через полюс) другой.

- ГС17♦8. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости² \mathbb{R}^2 относительно «мнимой окружности» $x^2 + y^2 = -1$.
- ГС17♦9. Докажите, что точки a и b прямой, которая пересекает гладкую квадратку Q в отличных от a, b точках c и d , сопряжены относительно Q если и только если a и b гармоничны c и d .

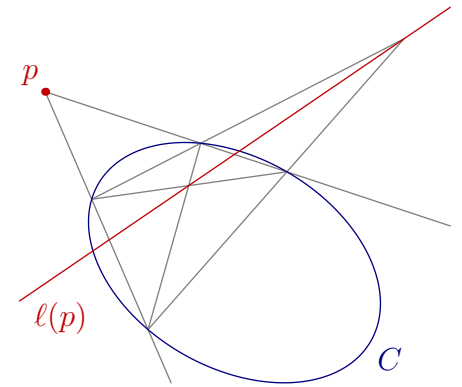


Рис. 1♦1.

- ГС17♦10 (двойное отношение точек на конике). Двойным отношением $[a, b, c, d]_C$ четырёх различных точек гладкой коники C называется двойное отношение проходящих через них прямых $[(pa), (pb), (pc), (pd)]$ в пучке прямых с центром в какой-либо пятой точке $p \in C$. Покажите, что оно не зависит от выбора точки p , и что две хорды коники C тогда и только тогда сопряжены относительно C , когда их концы гармоничны на C .
- ГС17♦11 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 1♦1 построение одной линейкой поляры $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C .
- ГС17♦12. Одной линейкой постройте полярю данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 относительно данной окружности в случае, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри очерчиваемого окружностью круга.
- ГС17♦13. Назовём гомографией на гладкой конике C любую сохраняющую двойное отношение биекцию $\gamma : C \xrightarrow{\simeq} C$. Убедитесь, что ГМТ пересечения прямых $(x\gamma(y)) \cap (\gamma(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегает C , это прямая, проходящая через неподвижные точки гомографии γ . Одной линейкой постройте неподвижные точки гомографии $C \xrightarrow{\simeq} C$, если известно её действие на три различные точки.

¹Или полярю. Точка p называется полюсом гиперплоскости $\mathbb{P}(p^\perp)$.

²Вложенной в $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ в виде стандартной карты U_0