

Евклидова геометрия

Терминология. Фигуры $I_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i |x_i| \leq 1\}$ и $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1 \ \& \ \forall i x_i \geq 0\}$ называются стандартными n -мерными кубом и симплексом. Стандартным кокубом $C_n \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка центров $(n - 1)$ -мерных¹ граней стандартного куба I_n . Угол между вектором v и векторным подпространством U определяется как $\min_{u \in U \setminus 0} \angle(v, u) = \angle(v, v_U)$, где $v - v_U \in U^\perp$.

ГС10♦1. Две гиперплоскости в евклидовом пространстве \mathbb{R}^5 заданы уравнениями

а) $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 = 1$ и $x_1 - 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 3$

б) $x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1$ и $-2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 7$

Найдите угол между ними², а если он нулевой — расстояние.

ГС10♦2. В условиях предыдущей задачи опишите ГМТ, равноудалённых от рассматривавшихся в ней гиперплоскостей, и задайте его явным уравнением.

ГС10♦3. Точки $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ не содержатся в одной $(k - 1)$ -мерной плоскости. Опишите ГМТ, равноудалённых от всех этих точек.

ГС10♦4. Два вектора в евклидовом пространстве лежат по одну сторону от данной гиперплоскости. Угол между векторами тупой. Верно ли, что угол между их ортогональными проекциями на эту гиперплоскость тоже тупой?

ГС10♦5. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$ матрица Грама выходящих из вершины

А векторов $e_1 = \vec{AD}$, $e_2 = \vec{AB}$, $e_3 = \vec{AA_1}$ равна $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите а) расстояние и

угол между прямыми CC_1 и $B_1 D_1$ б) площадь треугольника $\Delta A_1 C_1 D$ в) объём тетраэдра $A_1 C_1 B D$ г) центр и радиус вписанного в этот тетраэдр шара д) угол между плоскостями $A_1 C_1 B$ и $B_1 D_1 C$

ГС10♦6. Вешина A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ имеет координаты $(0, 1, -1, -1)$, а четыре соединённых с нею рёбрами вершины — координаты $(1, 2, -1, 0)$, $(3, 1, -2, 2)$, $(-1, 3, 0, -1)$, $(2, -2, 3, -3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с этими четырьмя вершинами, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и пятой вершиной в противоположной к A вершине параллелепипеда Π . Найдите: а) четырёхмерный объём симплекса Δ_4 б) трёхмерный объём тетраэдра Δ_3 в) расстояние от точки A , до трёхмерного подпространства, содержащего тетраэдр Δ_3 г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного около Δ_4 д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного около Δ_3 .

ГС10♦7. Верно ли что середины рёбер а) трёхмерного б) четырёхмерного правильного симплекса являются вершинами правильного кокуба?

ГС10♦8 (куб). В стандартном n -мерном кубе I_n найдите:

а) количество граней каждой из возможных размерностей

б) число внутренних³ диагоналей, ортогональных заданной внутренней диагонали

в) длину внутренней диагонали (диаметр описанного шара) и её предел при $n \rightarrow \infty$

г) угол между внутренней диагональю и ребром и его предел при $n \rightarrow \infty$

д) отношения, в которых внутренняя диагональ делится ортогональными проекциями

¹Здесь и далее под *размерностью* фигуры Φ понимается размерность пересечения всех содержащих эту фигуру аффинных подпространств.

²Т. е. угол между прямыми, которые высекаются этими гиперплоскостями в ортогональной их пересечению двумерной плоскости.

³Т. е. не лежащих в грани.

на неё всех вершин куба.

ГС10♦9 (симплекс). В стандартном n -мерном симплексе Δ_n найдите

- а) радиусы вписанного и описанного шаров и их пределы при $n \rightarrow \infty$
- б) угол между ребром и не содержащей его $(n - 1)$ -мерной гранью

ГС10♦10 (кокуб). Задайте стандартный n -мерный кокуб C^n системой линейных неоднородных неравенств и найдите количество его граней в каждой размерности, а также радиус вписанного в C^n шара и его предел при $n \rightarrow \infty$.

ГС10♦11. Найдите радиус шара, описанного в евклидовом пространстве \mathbb{R}^5 вокруг пирамиды с вершиной в точке $(1, 0, 0, 0, 0)$, основанием которой является лежащий в гиперплоскости $x_1 = 0$ правильный четырёхмерный симплекс, описанный около единичного шара с центром в нуле.

ГС10♦12. В трёхмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 обозначим через τ_v , σ_π и $\varrho_{v,\varphi}$, соответственно, сдвиг на вектор v , отражение в плоскости π и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против ЧС, если глядеть вдоль v . Для произвольного движения $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ опишите движения: а) $F \circ \tau_v \circ F^{-1}$ б) $F \circ \sigma_\pi \circ F^{-1}$ в) $F \circ \varrho_{v,\varphi} \circ F^{-1}$