Двойственность

Терминология и обозначения. Для векторного пространства V над полем $\Bbbk$ пространство линейных функций $V \to \Bbbk$ обозначается V^* и называется *двойственным* к V, а элементы этого пространства называются *ковекторами* или *линейными функционалами* на V. Значение ковектора $\xi \in V^*$ на векторе $v \in V$ иначе обозначается через $\langle \xi , v \rangle \overset{\text{def}}{=} \xi(v) \in \Bbbk$. Для линейного отображения $F : U \to W$ линейное отображение $F^* : W^* \to U^*$, $\xi \mapsto \xi \circ F$ называется *двойственным* к F. Таким образом, $\langle F^*\xi , v \rangle = \langle \xi , Fv \rangle$ для всех $\xi \in V^*$ и $v \in V$. Если $\dim V = n$, то наборы векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots e_n)$ в V и $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, \dots e_n^*)$ в V^* называются *двойственными базисами* если $\langle e_i^* , e_j \rangle = \delta_{ij}$, где *символ Кронекера* δ_{ij} равен 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Сопоставление вектору $v \in V$ функционала вычисления $\mathrm{ev}_v : V^* \to \Bbbk$, $\xi \mapsto \langle \xi , v \rangle$, вкладывает V в V^{**}. Если $\dim V < \infty$, это вложение является изоморфизмом. Для подпространств $U \subset V$ и $W \subset V^*$ подпространства $\operatorname{Ann} U \overset{\text{def}}{=} \{\xi \in V^* \mid \langle \xi , v \rangle = 0\} \subset V^*$ и $\operatorname{Ann} W \overset{\text{def}}{=} \{v \in V^* \mid \langle \xi , v \rangle = 0\} \subset V$ называются *аннуляторами* подпространств U и W. Сопоставление подпространству его аннулятора является инволютивной оборачивающей включения биекцией между подпространствами размерности k в V и коразмерности k в V^*. Эта биекция переводит суммы в пересечения, а пересечения в суммы.

ГС7⋄1. Убедитесь, что двойственные базисы действительно являются базисами.

ГС7⋄2. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Bbbk$ различны, $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$ и $V = \Bbbk[x]/(f)$. Покажите, что функционалы вычисления $\varepsilon_i : f \mapsto f(\alpha_i)$ образуют базис в V^* и найдите двойственный к нему базис в V.

ГС7⋄3. Опишите двойственный оператор к оператору гомотетии $\Gamma_\lambda : V \to V$, $v \mapsto \lambda v$.

ГС7⋄4. Линейный оператор $F : V \to V$ имеет в базисе $\boldsymbol{e}$ матрицу $F_{\boldsymbol{e}}$. Найдите матрицу $F^*_{\boldsymbol{e}^*}$ двойственного оператора $F^* : V^* \to V^*$ в двойственном базисе $\boldsymbol{e}^*$.

ГС7⋄5. В условиях зад. ГС7⋄2 явно опишите оператор $V^* \to V^*$, двойственный к оператору умножения на класс многочлена **а)** $x - \alpha_i$ **б)** $(x-\alpha_i)(x-\alpha_j)$ **в)** x.

ГС7⋄6. Каким наименьшим числом уравнений задаётся **а)** сумма **б)** пересечение линейных оболочек векторов $(1,1,6,2)$, $(1,1,6,3)$, $(2,3,15,1)$, $(2,4,18,-1)$ и векторов $(1,-2,-2,5)$, $(2,-4,-3,9)$, $(-3,6,8,-17)$, $(-3,6,5,-14)$ в $\mathbb{Q}^4$.

ГС7⋄7. В $\mathbb{Q}^5$ найдите размерность суммы и пересечения пространств решений систем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - 10x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 16x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 30x_5 = 0 \end{cases}$$

ГС7⋄8. Для линейного отображения $F : U \to W$ установите изоморфизмы:
а) $\ker(F^*) \simeq \operatorname{Ann} \operatorname{im} F \simeq (W/\operatorname{im} F)^*$ **б)** $\operatorname{im}(F^*) \simeq \operatorname{Ann} \ker F \simeq (\operatorname{im} F)^*$.

ГС7⋄9. Покажите, что сопоставление линейному функционалу $\varphi : \Bbbk[x] \to \Bbbk$ экспоненциальной производящей функции $\varphi(t) = \sum_{k \geqslant 0} \langle \varphi , x^k \rangle \cdot t^k / k! \in \Bbbk[[t]]$ задаёт изоморфизм $\Bbbk[x]^* \xrightarrow{\sim} \Bbbk[[t]]$, и докажите линейную независимость над $\Bbbk$ множества **а)** функционалов вычисления $\mathrm{ev}_\alpha : \Bbbk[x] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(\alpha)$, где $\alpha \in \Bbbk$, **б)** степенных рядов $e^{\lambda t}$, где $\lambda \in \Bbbk$.

ГС7⋄10. В условиях предыдущей задачи найдите операторы $\Bbbk[[t]] \to \Bbbk[[t]]$, двойственные к следующим операторам $\Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$:
а) дифференцирования $\frac{d}{dx} : f \mapsto f'$ **б)** умножения на $x : f \mapsto xf$ **в)** $x\frac{d}{dx} : f \mapsto xf'$.