Метод Гаусса

Терминология. Матрица называется *приведённой ступенчатой*, если в каждой её строке самый левый ненулевой элемент равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке и является единственным ненулевым элементом своего столбца. Столбцы, где стоят эти единицы, принято называть *базисными*. У каждого векторного подпространства $U \subset \mathbb{k}^n$ есть единственный базис, у которого строки координат базисных векторов образуют приведённую ступенчатую матрицу.

ГС6◇1. Найдите размерность (над $\mathbb{Q}$) и приведённый ступенчатый базис линейной оболочки строк матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -8 & 3 & -7 \\ -2 & 6 & 4 & 16 & -5 & 11 \\ 1 & -3 & -1 & -5 & -4 & 12 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -9 & 23 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 5 & -5 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 6 & 12 & -14 \\ -2 & -2 & 7 & -15 & -19 & 13 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & -4 & -1 & -10 \\ 1 & -2 & -5 & -5 & 2 & -18 \\ 4 & -13 & -25 & -15 & -6 & -34 \\ -2 & 4 & 10 & 11 & -9 & 49 \end{pmatrix}$

ГС6◇2. Укажите базис (над $\mathbb{Q}$) в пространстве решений системы уравнений

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_4 - 7x_5 + 9x_6 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 9x_5 - 16x_6 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 12x_4 - 3x_5 + 3x_6 = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 3x_5 + 16x_6 = 0 \\ -4x_1 + 12x_2 + 16x_3 + 20x_4 - 11x_5 - 61x_6 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 - 7x_3 - 8x_4 + 10x_5 + 43x_6 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 - 8x_3 - 7x_4 + 12x_5 + 53x_6 = 0 \end{cases}$

ГС6◇3. Для каждой из 15 пар, которые можно составить из шести предыдущих подпространств в $\mathbb{Q}^6$, найдите размерности суммы и пересечения, а также укажите в сумме и пересечении какие-нибудь базисы. Перечислите все такие пары U, W, что $\mathbb{Q}^6 = U \oplus W$, и для каждой из них разложите вектор $v = (1,1,1,1,1,1)$ в сумму $u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$.

ГС6◇4. Напишите систему из минимально возможного числа линейных уравнений, задающих $\mathbb{Q}$-линейную оболочку векторов

а) $(1,2,-1,-3)$, $(-3,-6,3,10)$, $(2,4,-2,-7)$, $(1,2,-1,-1)$, $(2,5,-1,-9)$

б) $(1,-1,-3,0,3)$, $(-2,2,6,0,-6)$, $(2,-1,-4,-2,4)$, $(-3,4,11,-2,-10)$

в) $(1,-1,-2,-7,0,-3)$, $(-2,2,5,17,-1,5)$, $(-1,1,1,4,1,4)$, $(-2,2,6,20,-2,5)$.

ГС6◇5. Решите (в поле $\mathbb{Q}$) систему уравнений

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 11x_3 + 3x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 - x_4 = -6 \\ -x_1 + 3x_2 + 11x_3 - x_5 = -7 \\ 2x_1 - 5x_2 - 19x_3 - x_4 + 2x_5 = 11 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 6x_5 = -3 \\ -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 18x_4 + 12x_5 = 8 \\ -2x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 13x_4 + 17x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 15x_5 = 7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 10x_5 = -5 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 20x_5 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 14x_5 = 7 \\ -3x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 28x_5 = 13 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 8x_5 = -7 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 23 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 19 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 31 \end{cases}$

ГС6◇6. В аффинном пространстве $\mathbb{Q}^4$ рассмотрим следующие аффинные подпространства:

а) аффинную оболочку[1] точек $(2,-3,0,-2)$, $(3,-4,-2,-1)$, $(2,-3,1,-3)$, $(3,-4,-5,2)$, $(0,-1,8,-8)$

б) $p+U$, где $p=(1,-2,3,-4)$, а направляющее векторное пространство U порождается векторами $(1,1,-3,1)$, $(-3,-3,9,-2)$, $(1,1,-3,2)$, $(-1,-1,4,-5)$, $(3,3,-12,3)$

в) $p+U$, где $p=(4,-3,2,1)$, а U задаётся уравнениями

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

г) множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 10 \\ 3x_1 + 10x_2 - 14x_3 - 3x_4 = 36 \\ -2x_1 - 8x_2 + 12x_3 - 2x_4 = -32 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -4 \\ 5x_1 + 18x_2 - 26x_3 = 69 \end{cases}$$

Найдите размерность и укажите какой-нибудь базис в направляющем векторном пространстве каждого из них. Для всех шести пар этих подпространств выясните, не пусто ли их пересечение, и если нет, то укажите в нём какую-нибудь точку и базис направляющего векторного пространства этого пересечения, а также задайте пересечение минимально возможным числом линейных (неоднородных) уравнений.

ГС6◇7. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ точки $a=(1,-2,3)$, $b=(-3,1,-2)$, $c=(2,-3,1)$, $d=(7,-5,1)$. Сколько прямых проходит через начало координат и пересекает обе прямые (ab) и (cd)? В каком отношении делит начало координат отрезок с концами в точках пересечения?

ГС6◇8. Прямая в $\mathbb{Q}^4$ проходит через точку $a=(-3,3,-1,5)$ и пересекает пространство решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 16x_3 - 14x_4 = -30 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - 8x_4 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$$

в точке b, а аффинную оболочку точек $(4,-3,1,-2)$, $(1,6,4,1)$, $(5,-6,1,0)$, $(0,9,7,8)$ — в точке c. Найдите $\overrightarrow{ab} : \overrightarrow{ac}$.

ГС6◇9. Обратите идущие ниже матрицы методом Гаусса и проверьте ответ умножением

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & -10 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & 13 \\ -1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -9 & -20 \\ -5 & 16 & -44 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -9 & -2 \\ 1 & 0 & -13 & -2 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 1 & 20 \\ 2 & 0 & -9 & -18 \end{pmatrix}$ **е)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ -3 & 10 & -11 & 1 \\ 4 & -16 & 20 & 5 \\ -3 & 6 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ **ж)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -5 & 4 \\ -3 & -4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$.

[1] Т. е. пересечение всех аффинных подпространств, содержащих указанные точки.