Линейные отображения и матрицы

ГС5◇1. Матрица A состоит из трёх столбцов a_1, a_2, a_3. На какую матрицу и с какой стороны надлежит умножить матрицу A, чтобы получилась матрица **а)** из трёх столбцов a_3, 0, a_1 **б)** из пяти столбцов a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1, $a_1+a_2+a_3$, $-3a_2+2a_3$.

ГС5◇2. Матрица A состоит из четырёх строк a_1, a_2, a_3, a_4 (строки выписаны сверху вниз). На какую матрицу и с какой стороны надлежит умножить матрицу A, чтобы получилась матрица **а)** из двух строк $a_1+2a_2+3a_3$, $a_4-2a_3+3a_2$ **б)** из трёх строк a_4, a_3-a_2, a_1.

ГС5◇3. Вычислите **а)** $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$ **б)** $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{2019}$ **в)** $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$ **г)** $\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}^{-1}$ **д)** $\begin{pmatrix}a&1&1\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}^{-1}$.

Обозначения. Пусть набор векторов $\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,\dots,e_m)$ образует базис векторного пространства U, а набор векторов $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\dots,f_k)$ — базис векторного пространства W. Матрица $F_{\boldsymbol{fe}}$ линейного отображения $F:\,U\to W$ в этих двух базисах определяется равенством $F(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{f}\,F_{\boldsymbol{fe}}$, где $F(\boldsymbol{e})\stackrel{\text{def}}{=}(F(e_1),\dots,F(e_m))$ — матрица-строка, составленная из векторов $F(e_j)$. Матрица $F_{\boldsymbol{fe}}$ имеет размер $k\times m$, и в её j-м столбце стоят коэффициенты линейного выражения вектора $F(e_j)$ через базис $\boldsymbol{f}$. Каждый вектор $v=\sum e_ix_i=\boldsymbol{e}x$ переводится отображением F в вектор $F(v)=\boldsymbol{f}y$ со столбцом координат $y=F_{\boldsymbol{fe}}x$.

Пусть наборов векторов $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\dots,u_m)$ содержится в линейной оболочке набора векторов $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\dots,w_k)$. *Матрица перехода* $C_{\boldsymbol{wu}}$ от векторов $\boldsymbol{u}$ к векторам $\boldsymbol{w}$ имеет размер $k\times m$ и определяется равенством $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}\,C_{\boldsymbol{wu}}$. В её j-м столбце стоят коэффициенты линейного выражения вектора u_j через векторы w_i. Каждый вектор $v=\sum u_ix_i=\boldsymbol{u}x$ из линейной оболочки векторов $\boldsymbol{u}$ выражается через векторы $\boldsymbol{w}$ как $v=\boldsymbol{w}y$, где столбец коэффициентов $y=C_{\boldsymbol{wu}}x$.

ГС5◇4. Рассмотрим разностный оператор $\Delta:\ f(x)\mapsto f(x+1)-f(x)$ на пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leqslant 4}$ многочленов степени $\leqslant 4$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. Напишите его матрицу в стандартном базисе x^i, где $0\leqslant i\leqslant 4$ и $x^0\stackrel{\text{def}}{=}1$, и в базисе $\gamma_k(x)=\binom{x+k}{k}=(x+1)\cdots(x+k)/k!$, где $0\leqslant k\leqslant 4$ и $\gamma_0\stackrel{\text{def}}{=}1$, а также матрицы переходов между этими базисами. Найдите $\ker\Delta$ и $\operatorname{im}\Delta$.

ГС5◇5. Рассмотрим оператор умножения на $x:\ f\mapsto xf$ в кольце вычетов $\mathbb{Q}[x]/\big((x-2)^5\big)$. Напишите его матрицу в базисе x^i, $0\leqslant i\leqslant 4$, и в базисе $(x-2)^i$, $0\leqslant i\leqslant 4$, а также матрицы переходов между этими базисами. Найдите $\ker x$ и $\operatorname{im} x$.

ГС5◇6. Докажите для любых линейных операторов $F,G:\,V\to V$ включения:
а) $\ker(FG)\subseteq\ker(G)$ **б)** $\operatorname{im}(FG)\subseteq\operatorname{im}(F)$
и приведите примеры операторов, для которых оба эти включения строгие.

ГС5◇7. Пусть $\dim U=n$, $\dim W=m$, а подпространства $U_0\subseteq U$ и $W_0\subseteq W$ имеют $\dim U_0=n_0$ и $\dim W_0=m_0$. Покажите, что линейные отображения $F:\,U\to W$ с $\ker F\supseteq U_0$ и $\operatorname{im}F\subseteq W_0$ образуют векторное подпространство в $\operatorname{Hom}(U,W)$, и найдите его размерность.

ГС5◇8. Покажите, что следующие три свойства матрицы эквивалентны друг другу:
а) все её столбцы пропорциональны **б)** все её строки пропорциональны
в) матрица является произведением столбца на строку
и что для квадратной матрицы A эти свойства влекут пропорциональность матриц A и A^2.

ГС5◇9. Обозначим через E_{ij} квадратную матрицу размера $n\times n$ с единицей в клетке (i,j) и нулями в остальных клетках. Составьте таблицу умножения матриц E_{ij}.

ГС5◇10. Опишите *центр* $\{C\in\operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)\mid\forall X\in\operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)\ CX=XC\}$ алгебры $n\times n$ матриц.

ГС5◇11 (коммутатор). Матрица $[A,B]\stackrel{\text{def}}{=}AB-BA$ называется *коммутатором* квадратных матриц $A,B\in\operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$. Докажите *правила Лейбница*:
а) $[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$ **б)** $[A,[B,C]]=[[A,B],C]+[B,[A,C]]$.

ГС5◇12 (след). Для квадратной матрицы A сумма $\operatorname{tr}A\stackrel{\text{def}}{=}\sum a_{ii}$ называется *следом* матрицы A. Покажите, что **а)** $\operatorname{tr}[A,B]=0$ для всех $A,B\in\operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$
б) $\operatorname{tr}(C^{-1}AC)=\operatorname{tr}(A)$ для всех $A\in\operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ и обратимых $C\in\operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$.