

## Векторные пространства

**ГС4♦1.** Покажите, что объединение векторных подпространств является векторным пространством только если одно из подпространств содержится в другом.

**ГС4♦2.** Является ли множество

а) всех вещественных последовательностей<sup>1</sup>  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

б) ограниченных сверху вещественных последовательностей  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  векторным пространством над  $\mathbb{R}$ ?

**ГС4♦3.** Является ли множество  $\{f \in \mathbb{k}[x] \mid \deg f \leq m \text{ \& } x^m f(1/x) = f(x)\}$  векторным пространством над  $\mathbb{k}$ ?

**ГС4♦4.** Укажите базис и найдите размерность векторного пространства

а) однородных многочленов степени  $d$  от  $m$  переменных

б) всех многочленов степени  $\leq d$  от  $m$  переменных.

**ГС4♦5.** Убедитесь, что множество  $V^M$  всех функций на множестве  $M$  со значениями в векторном пространстве  $V$  является векторным пространством<sup>2</sup>. Для конечного множества  $M$  из  $n$  элементов и одномерного пространства  $V = \mathbb{k}$  укажите в  $V^M$  базис и найдите  $\dim V^M$ .

**ГС4♦6.** Дано  $m + 1$  попарно разных чисел  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{k}$ . Укажите  $m + 1$  многочленов  $f_0, f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[x]$  степени  $\leq m$  с  $f_i(a_j) = 0$  при  $i \neq j$  и  $f_i(a_i) = 1$  при всех  $i$ . Образуют ли эти многочлены базис в пространстве  $\mathbb{k}[x]_{\leq m}$  многочленов степени  $\leq m$ ? Если да, то чему равны координаты произвольного многочлена  $g$  в этом базисе? Покажите, что существует единственный многочлен степени  $\leq m$ , принимающий заданные значения  $b_i$  в заданных точках  $a_i$ , и задайте его явной формулой.

**ГС4♦7.** При каких  $t \in \mathbb{Q}$  векторы  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 5, 7)$  и  $(3, 7, 10 + t)$  образуют базис в  $\mathbb{Q}^3$ ?

**ГС4♦8.** Векторы  $v_1, v_2, v_3$  линейно независимы над  $\mathbb{k}$ . При каких  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{k}$  векторы

$$v_1 + \lambda_2 v_2, \quad v_2 + \lambda_3 v_3, \quad v_3 + \lambda_1 v_1$$

становятся линейно зависимыми?

**ГС4♦9.** На  $n$ -мерном пространстве  $V$  задана ненулевая линейная функция  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ . Покажите, что множество  $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$  является векторным подпространством, и найдите его размерность.

**ГС4♦10.** Пусть  $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$  для некоторых векторных подпространств  $U$  и  $V$ . Обязательно ли  $U + V$  равно одному из этих подпространств, а  $U \cap V$  — другому?

**ГС4♦11.** Приведите пример конечномерного векторного пространства  $T$  и трёх таких попарно трансверсальных<sup>3</sup> подпространств  $U, V, W \subset T$ , что  $\dim U + \dim V + \dim W = \dim T$ , но  $T \neq U + V + W$ .

**ГС4♦12.** Фигура  $I^4 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall i \ |x_i| \leq 1\}$  называется *стандартным четырёхмерным кубом*. Сколько у него граней размерности три, размерности два и размерности один? Сколько у него вершин? Нарисуйте развёртку трёхмерной поверхности<sup>4</sup> четырёхмерного куба и напишите инструкцию по склейке<sup>5</sup> четырёхмерного куба из этой развёртки. Нарисуйте какую-нибудь двумерную параллельную проекцию четырёхмерного куба, у которой все вершины различны.

<sup>1</sup>Сложение последовательностей и умножение их на константы происходит поэлементно.

<sup>2</sup>Сложение функций и умножение их на константы происходит поточечно.

<sup>3</sup>Т. е. имеющих нулевое пересечение.

<sup>4</sup>Она представляет собою трёхмерный многогранник, собранный из обычных трёхмерных кубиков.

<sup>5</sup>Укажите, какие пары двумерных граней трёхмерных кубов надлежит склеить друг с другом и как именно.