

Векторы, точки, прямые, площади...

- ГС1♦1.** В пространстве \mathbb{R}^3 обозначим через a, b, c векторы, ведущие из вершины D параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ в соединённые ребром с противоположной к D вершиной B' вершины A', B, C' соответственно. Выразите через векторы a, b, c вектор а) \overrightarrow{AC} б) $\overrightarrow{DB'}$ в) $\overrightarrow{CA'}$ г) \overrightarrow{DM} , где M — точка пересечения медиан в $\triangle B'D'C$.
- ГС1♦2.** Предположим, что во вселенной¹ все галактики² разлетаются прямо от нашей галактики со скоростями, пропорциональными³ их радиус-векторам. Какую картину видят жители иной галактики?
- Аффинная плоскость.** Всюду далее речь идёт про двумерное координатное векторное пространство $V \simeq \mathbb{k}^2$ над произвольным полем⁴ \mathbb{k} и ассоциированную с ним аффинную плоскость $\mathbb{A}(V)$.
- ГС1♦3 (правило Крамера).** Выразите вектор $v = (3, -1)$ через векторы а) $a = (1, 5), b = (-2, 3)$ б) $a = (1, 2), b = (2, 1)$.
- ГС1♦4.** Какова площадь параллелограмма с вершинами в точках $(1, 2), (2, 1), (3, 5)$?
- ГС1♦5.** Какова на вещественной плоскости \mathbb{R}^2 минимальная площадь параллелограмма с вершинами в точках с целыми координатами? Может ли такой параллелограмм минимальной площади содержать отличные от вершин точки с целыми координатами?
- ГС1♦6.** Напишите уравнение прямой а) проходящей через точку $(2, -3)$ параллельно вектору $(5, 2)$ б) проходящей через точки $(-3, 5)$ и $(4, -1)$ в) пересекающей ось координат в точках $(-2, 0)$ и $(0, 5)$.
- ГС1♦7.** Нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями а) $3x_1 + 5x_2 = -1$ б) $2x_1 - 3x_2 = 5$ и по правилу Крамера найдите координаты точек пересечения каждой из этих прямых со всеми прямыми из предыдущей задачи.
- ГС1♦8.** Вершины $\triangle abc$ имеют координаты $a = (-4, -1), b = (1, 3), c = (2, -2)$. Напишите уравнение медианы, опущенной из вершины b , и определите в какой точке она пересекает ось OY .
- ГС1♦9.** Точки M и N делят диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ в отношении $AM : MC = BN : ND = 1 : 2$. Как относятся площади треугольников $\triangle BMD$ и $\triangle ANC$?
- ГС1♦10.** На 25-точечной плоскости над полем $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/(5)$ вычетов по модулю 5 нарисуйте все проходящие через начало координат прямые. Сколько их?
- Барицентры.** Точка s называется *центром тяжести* или *барицентром* точек p_1, p_2, \dots, p_m , взятых с весами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{k}$, если $\sum \mu_i \overrightarrow{cp_i} = 0$. Если веса не указываются явно, они по умолчанию считаются равными 1. Набор весов (α, β, γ) с $\alpha + \beta + \gamma = 1$ называется *барицентрическими координатами* точки p относительно $\triangle abc$ на аффинной плоскости, если центр тяжести вершин треугольника, взятых с этими весами, попадает в точку p .
- ГС1♦11.** Медианой набора точек p_1, p_2, \dots, p_m называется отрезок, соединяющий одну из них с равновесным барицентром остальных. Покажите, что все медианы пересекаются в одной точке и выясните, в каком отношении они делятся точкой пересечения.
- ГС1♦12.** Нарисуйте в \mathbb{R}^2 все точки, барицентрические координаты (α, β, γ) которых относительно данного $\triangle abc$ удовлетворяют условиям: а) $\alpha, \beta, \gamma > 0$ б) $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ в) $\alpha = \beta$ г) $\alpha, \beta > 1/3, \gamma > 0$ д) $\alpha \geq \beta$ е) $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.
- ГС1♦13.** В условиях предыдущей задачи напишите условия на (α, β, γ) , задающие: а) каждый из шести треугольников, на которые $\triangle abc$ разрезается медианами б) треугольники гомотетичные $\triangle ABC$ с коэффициентами 3 и $1/3$ относительно точки пересечения медиан.

¹Которую для простоты будем считать векторным пространством.

²Которые для простоты будем считать точками.

³Коэффициент пропорциональности для всех галактик один и тот же.

⁴Желающие могут по умолчанию считать, что $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$.