ГОДОВОЙ КУРС «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»
ПРОГРАММА ВТОРОГО ПОЛУГОДИЯ (ВЕСЕННЕГО СЕМЕСТРА)

интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 1,5 пары упражнений в неделю
темы, набранные *курсивом* могут стать необязательными или упраздниться вовсе.

ТРЕТЬЯ ЧЕТВЕРТЬ (11 НЕДЕЛЬ)

9–19 ЯНВАРЯ. Повторение: вычисление расстояний и углов в евклидовом пространстве, разложение ортогонального оператора в прямую ортогональную сумму поворотов и одномерных собственных подпространств с собственными числами ±1, движения в $\mathbb{R}^3$. Ортогональная диагонализация (анти)самосопряжённых линейных операторов на евклидовом пространстве.

20–26 ЯНВАРЯ. SVD-разложение операторов между евклидовыми пространствами и полярное разложение невырожденного линейного оператора. *Полный ортогональный инвариант пары подпространств в евклидовом пространстве.*

27 ЯНВАРЯ – 2 ФЕВРАЛЯ. Элементы выпуклой геометрии: выпуклость внутренности и замыкания, грани и крайние точки, замкнутая выпуклая фигура является пересечением своих опорных полупространств. *Перечисление граней выпуклых многогранников.*

Контрольная № 4: вещественные аффинные и евклидовы пространства.

3–9 ФЕВРАЛЯ. Билинейные формы: корреляции[1], матрицы Грама, ранг. Невырожденные билинейные формы: биекция между формами и операторами, *канонический оператор Серра*, ортогоналы и ортогональные проекции, размерность изотропного подпространства невырожденной формы на V не превышает $\dim V\,/\,2$. Симметричные и кососимметричные формы, невырожденность ограничения на дополнительное подпространство к ядру и на фактор по ядру, разложение произвольной формы в сумму симметричной и кососимметричной.

10–16 ФЕВРАЛЯ. Квадратичные формы: поляризация, определитель Грама, невырожденность, приведение к сумме квадратов и его специализации над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{F}_p$. Канонический вид самосопряжённого оператора на пространстве с невырожденной квадратичной формой. Отражения, группа изометрий порождается отражениями в гиперплоскостях.

17–23 ФЕВРАЛЯ. Гиперболические формы, всякий базис в изотропном пространстве половинной размерности дополняется до гиперболического базиса, изометрии двумерного гиперболического пространства. Лемма Витта, разложение векторного пространства с невырожденной квадратичной формой в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного. Независимость сигнатуры вещественной формы от выбора базиса и отыскание сигнатуры по последовательности главных угловых миноров. *Описание анизотропных форм над полями $\mathbb{F}_p$.*

24 ФЕВРАЛЯ – 1 МАРТА. Кососимметричные формы. Нормальная форма Дарбу, всякий базис лагранжева подпространства невырожденной формы дополняется до симплектического базиса. *Грассмановы квадратичные формы, пфаффиан кососимметричной матрицы.*

Контрольная № 5: билинейные и квадратичные формы.

2–8 МАРТА. Проективные пространства, проективизация, примеры: $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \simeq S^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \simeq$ $\simeq$ лента Мёбиуса с заклееной диском границей, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(\Bbbk^{n+1}) = \Bbbk^n \sqcup \ldots \sqcup \Bbbk^0$. Каждая точка $v \in \mathbb{P}(V)$ покрывается аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством $V\,/\,\Bbbk\cdot v$, локальные аффинные координаты, стандартные аффинные карты. Однородные координаты и задание фигур однородными уравнениями, пространства фигур, пример: $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^dU)$ как множество неупорядоченных наборов из d точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, *нормальные рациональные кривые.*

[1] Линейные отображения $V \to V^*$ («опускание индекса»), задаваемые билинейной формой.

9–15 марта. Словарик «Линейная алгебра – проективная геометрия»: проективные подпространства, размерности пересечений и линейных соединений, дополнительные подпространства и проекции. Проективная двойственность: соответствие $\mathbb{P}(U) \leftrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\, U)$ задаёт оборачивающую включение биекцию между подпространствами размерности k и $n-k-1$ в пространствах $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ и переводит пересечения в линейные соединения. Проективные квадрики: касательное пространство, всякая квадрика является линейным соединением пространства особых точек и гладкой квадрики в дополнительном подпространстве.

16–22 марта. Проективное преобразование пространства $\mathbb{P}_n$ однозначно задаётся действием на $n+2$ точки, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости. Группа $\mathrm{PGL}(V)$. Проективная прямая, дробно линейные преобразования, двойное отношение, гармонические пары точек. Плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U)$ как множество неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, коника Веронезе, инволюции проективной прямой.

23–24 марта. Плоская проективная геометрия: разложение гомографии[1] в композицию проекций, построения одной линейкой, перспективные треугольники, теоремы Дезарга, четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$. Рациональная параметризация непустой гладкой коники, задание гомографий кониками, гомографии на конике, теорема Паскаля и трассировка коники линейкой.

вторая четверть (10 недель)

1–5 апреля. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики, двойственная квадрика. Пересечение гладкой квадрики с гиперплоскостью, линейные подпространства, лежащие на гладкой квадрике над алгебраически замкнутым полем и над $\mathbb{R}$. Проективная классификация квадрик над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$. Примеры: квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathrm{End}\, \Bbbk^2)$, квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 \Bbbk^4)$ и геометрия прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\Bbbk^4)$. Пространство квадрик, примеры: пространство коник и пространство квадратичных поверхностей в $\mathbb{P}_3$.

6–12 апреля. Пучки квадрик, коранг особой квадрики пучка не меньше кратности соответствующего корня характеристического многочлена. Простой пучок[2] с точностью до проективного преобразования объемлющего пространства однозначно определяется набором корней характеристического многочлена, рассматриваемым с точностью до дробно-линейного преобразования прямой, параметризующей пучок. Пучок прост тогда и только тогда, когда две задающие его квадрики пересекаются трансверсально[3]. *Одновременная диагонализация регулярной пары квадратичных форм.* Пример: классификация пучков коник. *Касательное пространство к проективной гиперповерхности. Связь геометрии пучка коник с его расположением относительно гиперповерхность особых коник.*

13–30 апреля. Комплексное проективное описание евклидовых коник: асимптоты, центр, фокусы, директрисы, главные оси и как находить всё это «в уме». Фокальные свойства гладких коник.

Контрольная № 6: проективная геометрия и евклидовы коники.

11–17 мая. Вложение аффинной группы в проективную в качестве нормализатора бесконечной гиперплоскости. Аффинные квадрики: гладкие центральные квадрики, параболоиды, простые конусы и цилиндры; их явное описание над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$, планарность вещественных квадрик.

18–24 мая. Евклидова геометрия квадрик, полуоси гладких квадрик в евклидовом аффинном пространстве. Метрические свойства кривых и поверхностей второго порядка.

25–31 мая. Геометрия сфер: инверсии, группа Мёбиуса, пространство сфер, пучки сфер.

---

[1] Т. е. дробно линейного преобразования между проективными прямыми.
[2] Пучок квадрик на $\mathbb{P}_n$, содержащий ровно $n+1$ различных особых квадрик.
[3] Т. е. коразмерность пересечения касательных пространств в каждой точке пересечения (включая особые точки) равна двум.

1–7 июня. Внутренняя геометрия сферы: сферическая метрика и неравенство треугольника, площадь сферического треугольника. *Элементы эллиптической геометрии: кратчайший геодезический отрезок, медиаторы, группа изометрий порождается отражениями в плоскостях и совпадает с проективизацией ортогональной группы, эллиптические треугольники первого и второго рода, конфигурации попарно равноудалённых точек на эллиптической плоскости и правильные многогранники в* $\mathbb{R}^3$.

Контрольная №7: евклидовы квадрики и сферы.

8–16 июня. Примеры групп, порождённых отражениями. Образующие и соотношения для групп платоновых тел в $\mathbb{R}^3$ и симметрической группы S_n. *Классификация правильных многогранников и групп Кокстера.*