

Билинейные и квадратичные формы

- ГЛ10♦1.** Какими могут быть ранг и сигнатура ограничения невырожденной вещественной квадратичной формы сигнатуры (p, m) на векторное подпространство коразмерности 1?
- ГЛ10♦2.** Для каждого простого натурального $p > 2$ перечислите все анизотропные квадратичные формы над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.
- ГЛ10♦3.** Убедитесь, что функция $A \mapsto \det A$ является квадратичной формой на пространстве $\text{Mat}_2(\mathbb{K})$, и опишите такое линейное преобразование $Y \mapsto Y^?$ пространства $\text{Mat}_2(\mathbb{K})$, что поляризация формы \det имеет вид $2 \widetilde{\det}(X, Y) = \text{tr}(X \cdot Y^?)$. Является ли форма \det гиперболической?
- ГЛ10♦4.** Зафиксируем в пространстве W квадратичных форм от переменных (x_0, x_1) базис $x_0^2, 2x_0x_1, x_1^2$ и свяжем с каждой 2×2 матрицей A линейный оператор $S^2A : W \rightarrow W$, переводящий $f(x_0, x_1)$ в $f(y_0, y_1)$, где $(y_0, y_1) = (x_0, x_1)A$. Напишите его матрицу в выбранном базисе и выразите её след и определитель через¹ $\text{tr} A$ и $\det A$.
- ГЛ10♦5.** Для $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ пусть $\det(tE - X) = t^n - \sigma_1(X)t^{n-1} + \sigma_2(X)t^{n-2} - \dots$. Убедитесь, что $\sigma_2(X)$ является квадратичной формой на пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$, и вычислите её ранг и сигнатуру. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.
- ГЛ10♦6.** Найдите сигнатуру квадратичной формы $\text{tr}(A^2)$ на пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.
- ГЛ10♦7.** Рассмотрим поле $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x + 1)$ как трёхмерное векторное пространство над полем \mathbb{F}_3 . Напишите матрицу Грама симметричной билинейной формы² $\text{tr}(ab)$ в базисе $[1], [x], [x^2]$ и опишите все изотропные векторы этой формы.
- ГЛ10♦8.** Покажите, что симплектическая группа транзитивно действует на симплектических и на изотропных подпространствах любой фиксированной размерности.
- ГЛ10♦9*.** Приведите пример пространства V с вырожденной ненулевой билинейной формой β и дополнительного к ядру левой корреляции $\wedge\beta : V \rightarrow V^*$, $v \mapsto \beta(v, *)$, подпространства $U \subset V$, таких что ограничение формы β на U остаётся вырожденным.
- ГЛ10♦10*.** Пусть билинейная форма β на пространстве V ограничивается в невырожденную форму на конечномерном подпространстве $U \subset V$. Постройте изометрический линейный изоморфизм³ между ${}^{\perp}U$ и U^{\perp} .
- ГЛ10♦11*.** Докажите, что у канонического линейного оператора⁴ κ любой невырожденной билинейной формы β на n -мерном пространстве над алгебраически замкнутым полем
- характеристический многочлен $\chi_{\kappa}(t) = \det(t\text{Id} - \kappa)$ возвратный, т. е. $\chi_{\kappa}(t^{-1}) = t^{-n}\chi_{\kappa}(t)$
 - для каждого $\lambda \neq \pm 1$ имеется сохраняющая размеры клеток биекция между жордановыми клетками с собственным числом λ и жордановыми клетками с собственным числом λ^{-1}
 - количества жордановых клеток чётного размера с собственным числом $+1$ и нечётного размера с собственным числом -1 оба чётны.
- ГЛ10♦12*.** Докажите, что над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль каждый невырожденный линейный оператор, удовлетворяющий условиям предыдущей задачи, является каноническим оператором для единственной с точностью до изометрического изоморфизма невырожденной билинейной формы.

¹И, если останутся силы, вернитесь к задаче ГЛ5 ♦ 12*.

²След умножения на $ab : K \rightarrow K$, $x \mapsto abx$.

³Т. е. такой изоморфизм $f : {}^{\perp}U \xrightarrow{\sim} U^{\perp}$, что $\beta(f(v), f(w)) = \beta(v, w)$ для всех $v, w \in {}^{\perp}U$.

⁴Напомню, что этот оператор однозначно определяется тем, что $\beta(u, w) = \beta(w, \kappa u)$ для всех u, w .

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11а			
б			
в			
12			