Введение в теневой анализ[1]

Соглашения. Всюду ниже поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль, и $D : \Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$, $f \mapsto f'$, обозначает оператор дифференцирования[2]. Сопоставим каждому степенному ряду $\varphi(t) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\varphi_k}{k!} t^k \in \Bbbk[\![t]\!]$ ковектор $\varphi \in \Bbbk[x]^*$, который сворачивается с базисными мономами по правилу[3] $\langle\, \varphi\,,\, x^k\,\rangle = \varphi_k$, а также линейный оператор $\varphi(D) : \Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$, $f \mapsto \sum_{k\geqslant 0} \frac{\varphi_k}{k!} D^k f$.

ГЛ4½◇1. Как действуют на $\Bbbk[x]$ линейные операторы $e^{\alpha D} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\alpha^k}{k!} D^k$, где $\alpha \in \Bbbk$?

ГЛ4½◇2. Убедитесь, что сопоставление степенным рядам ковекторов задаёт линейный изоморфизм векторных пространств $\Bbbk[\![t]\!] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x]^*$. Для каждого $\alpha \in \Bbbk$ укажите ряд, соответствующий функционалу вычисления $\mathrm{ev}_\alpha : \Bbbk[x] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(\alpha)$. Опишите линейные операторы $\Bbbk[\![t]\!] \to \Bbbk[\![t]\!]$, двойственные к следующим линейным операторам $\Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$:
а) умножение на $x : f(x) \mapsto x \cdot f(x)$ **б)** дифференцирование $D : f(x) \mapsto f'(x)$
в) сдвиг $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x+\alpha)$, $\alpha \in \Bbbk$ **г)** $\Delta : f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$ и $\nabla : f(x) \mapsto f(x) - f(x-1)$.

ГЛ4½◇3. Убедитесь, что отображение $\Bbbk[\![t]\!] \to \mathrm{End}\big(\Bbbk[x]\big)$, $\varphi \mapsto \varphi(D)$, является инъективным гомоморфизмом $\Bbbk$-алгебр[4], и докажите, что его образ состоит из всех линейных операторов $F : \Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$, которые удовлетворяют следующим эквивалентным условиям:
а) $\forall\, \alpha \in \Bbbk\ FT_\alpha = T_\alpha F$ **б)** $FT_1 = T_1 F$ **в)** $FT_{-1} = T_{-1} F$ **г)** $F\Delta = \Delta F$ **д)** $F\nabla = \nabla F$ **е)** $FD = DF$.

ГЛ4½◇4. Докажите равенства $\langle\, \varphi\psi\,,\, x^n\,\rangle = \langle\, \varphi\,,\, \psi(D)\, x^n\,\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle\, \varphi\,,\, x^{n-k}\,\rangle \langle\, \psi\,,\, x^k\,\rangle$.

ГЛ4½◇5 (многочлены Аппеля). *Многочленами Аппеля* ряда $\varphi(t) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\varphi_k}{k!} t^k \in \Bbbk[\![t]\!]$ называются образы $f_k(x) = \varphi(D)\, x^k$ базисных мономов x^k под действием оператора $\varphi(D)$. Покажите, что: **а)** $\varphi_n = f_n(0)$ **б)** $f_n'(x) = n f_{n-1}(x)$ **в)** $f_n(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_{n-k}(x) y^k$
г) $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi_{n-k} x^k = (\varphi^{\downarrow} + x)^n$, где нисходящая стрелка у $\varphi^{\downarrow}$ предписывает раскрывать бином $(\varphi + x)^n$, формально заменяя все φ^k на φ_k.

ГЛ4½◇6 (приложение: суммы степеней). Ряд $\mathrm{td}(t) = t\,/\,(1 - e^{-t}) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{b_k}{k!} t^k \in \Bbbk[\![t]\!]$ называется *рядом Тодда*, его коэффициенты b_k — *числами Бернулли*, а его многочлены Аппеля $B_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{td}(D)\, x^k$ — *многочленами Бернулли*. Докажите, что следующие условия на последовательность многочленов $s_n(x) \in \Bbbk[x]$, $n \in \mathbb{N}$, эквивалентны:
а) $s_{n+1}(m) = 0^n + 1^n + \dots + m^n$ при всех целых $m, n \geqslant 0$ **б)** $s_{n+1}(0) = 0$ и $\nabla s_{n+1}(x) = x^n$
в) $s_{n+1}(0) = 0$ и $D s_{n+1}(x) = \mathrm{td}(D)\, x^n$ **г)** $(n+1)\, s_{n+1}(x) = B_{n+1}(x) - b_{n+1} = (b^{\downarrow} + x)^{n+1} - b_{n+1}$.

ГЛ4½◇7. Покажите, что $(n+1) b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k}$ при всех $n \geqslant 2$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1/2$, $b_2 = 1/6$, $b_{2k+1} = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Вычислите все b_n с $n \leqslant 10$ и найдите[5] $s_{11}(1000)$.

ГЛ4½◇8. Положим $c_k(x) = x(x+1) \cdots (x+k-1)/k!$ и $c_0(x) = 1$. Докажите, что: **а)** $\nabla c_k = c_{k-1}$
б) $f(x) = \sum_{k\geqslant 0} \nabla^k f(0) \cdot c_k(x) = \sum_{k\geqslant 0} \nabla^k f(\alpha) \cdot c_k(x - \alpha)$ для всех $f \in \Bbbk[x]$ и $\alpha \in \Bbbk$
в) $c_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} c_{n-k}(x) \cdot c_k(y)$, т. е. ряды $C_x(t) = \sum_{k\geqslant 0} c_k(x) \cdot t^k$ перемножаются по правилу $C_x(t) \cdot C_y(t) = C_{x+y}(t)$.

---

[1] По-латыни: *umbral calculus*.

[2] Напомню, что производная $f'(x)$ есть результат подстановки $y = z = x$ в многочлен $\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \in \Bbbk[y,z]$.

[3] Обратите внимание, что это правило отличается множителями $k!$ от того, что использовалось в примере 7.2 на стр. 83 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1920/lec_07.pdf.

[4] Т. е. линейно над $\Bbbk$ и переводит сложение и умножение рядов соответственно в сложение и композицию линейных операторов.

[5] В те далёкие времена, когда не знали иных калькуляторов кроме счётов, Яков Бернулли (1654 – 1705) сосчитал сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел меньше, чем за половину четверти часа.

Персональный табель ____. **Листок № $4\frac{1}{2}$ (необязательный)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
6			
7			
8а			
б			
в			