

§23. Сферы

23.1. Сферы в евклидовом пространстве. Напомню, что сферой радиуса $r > 0$ с центром в точке c евклидова аффинного пространства $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ называется квадрика $S(r, c) \subset \mathbb{A}^n$, задаваемая аффинным уравнением

$$(x - c, x - c) - r^2 = 0, \quad (23-1)$$

где $(*, *)$ обозначает евклидово скалярное произведение на подлежащем евклидовом векторном пространстве $V \simeq \mathbb{R}^n$. Мы будем называть уравнение (23-1) *приведённым аффинным уравнением* сферы $S(r, c)$ и обозначать неоднородный квадратичный многочлен, стоящий в его левой части, через

$$s_{r,c}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - c, x - c) - r^2. \quad (23-2)$$

Геометрически, уравнение (23-1) означает, что сфера $S(r, c)$ является ГМТ x , удалённых от центра сферы на расстояние r . Каждая проходящая через c прямая с вектором скорости $e \in V$ единичной длины пересекает сферу по точкам $c \pm re$. Отрезок с концами в таких точках называется *диаметром* сферы. Уравнение (23-1) равносильно тому, что $(x - c + re, x - c - re) = 0$. Таким образом, сфера представляет собою ГМТ, из которых её диаметр виден под прямым углом.

ПРИМЕР 23.1 (ОПИСАННАЯ СФЕРА СИМПЛЕКСА)

Если точки $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$ не лежат в одной гиперплоскости, то через них проходит единственная сфера. Она называется *описанной сферой* симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$. Действительно, ГМТ, равноудалённых от двух точек p_0 и p_i , описывается уравнением¹

$$(x - p_0, x - p_0) = (x - p_i, x - p_i),$$

которое эквивалентно линейному неоднородному уравнению

$$2(x, p_i - p_0) = (p_i, p_i) - (p_0, p_0). \quad (23-3)$$

Задаваемая этим уравнением гиперплоскость проходит через точку $(p_i + p_0) / 2$ перпендикулярно вектору $p_i - p_0$ и называется *срединным перпендикуляром* к отрезку $[p_0, p_i]$. ГМТ, равноудалённых от всех точек p_0, p_1, \dots, p_n , является пересечением срединных перпендикуляров к n отрезкам $[p_0, p_i]$, где $1 \leq i \leq n$. Так как векторы $p_i - p_0$ линейно независимы, система из n линейных уравнений (23-3) имеет единственное решение c . Это центр описанной сферы.

23.1.1. Пересечение сферы с аффинным подпространством. Если аффинное подпространство $\Pi \subset \mathbb{A}^n$ находится на расстоянии ϱ от центра c сферы $S(r, c)$, то при $\varrho > r$ пересечение $\Pi \cap S(r, c)$ пусто, а при $\varrho < r$ представляет собою лежащую в Π сферу радиуса $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$ с центром в ортогональной проекции c_Π точки c на подпространство Π . Чтобы убедиться в этом, положим в уравнении (23-1) переменную точку x равной $c_\Pi + z$, где вектор $z = x - c_\Pi$ пробегает направляющее векторное пространство аффинного подпространства Π . Так как $(z, c_\Pi - c) = 0$, а $(c_\Pi - c, c_\Pi - c) = \varrho^2$, мы получаем на z уравнение $(z, z) = r^2 - \varrho^2$.

При $\varrho = r$ сфера $\Pi \cap S(r, c)$ вырождается в одну точку $p = c_\Pi$. Следовательно, в этом случае подпространство Π содержится в касательном пространстве к сфере в точке $p \in S(r, c)$. Таким

¹Ср. с прим. 11.2 на стр. 134.

образом, в каждой точке $p \in S$ касательное пространство $T_p S(r, c)$ представляет собою гиперплоскость, проходящую через точку p перпендикулярно вектору $p - c$, и задаётся линейным неоднородным уравнением

$$(x - c, p - c) = r^2. \quad (23-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 23.1. Убедитесь, что это согласуется с описанием касательного пространства к произвольной проективной квадрике, данным в н° 17.3.1 на стр. 209.

23.1.2. Степень точки относительно сферы. Значение $s_{r,c}(p) = (p - c, p - c) - r^2$ квадратичного полинома (23-2) на произвольно взятой точке $p \in \mathbb{A}^n$ называется *степенью* точки p относительно сферы $S(r, c)$. Степень обращается в нуль в точности на точках сферы $S(r, c)$ и отрицательна внутри ограничиваемого сферой шара, достигая своего минимума $-r^2$ в единственной точке — центре сферы. Каждая внешняя по отношению к шару точка p имеет положительную степень $|p - c|^2 - r^2 = |p - q|^2$, равную квадрату длины любого касательного отрезка $[p, q]$, опущенного из p на сферу, см. рис. 23◊1.

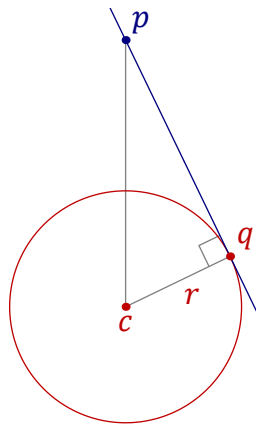


Рис. 23◊1. $s_{r,c}(p) = |q - p|^2$.

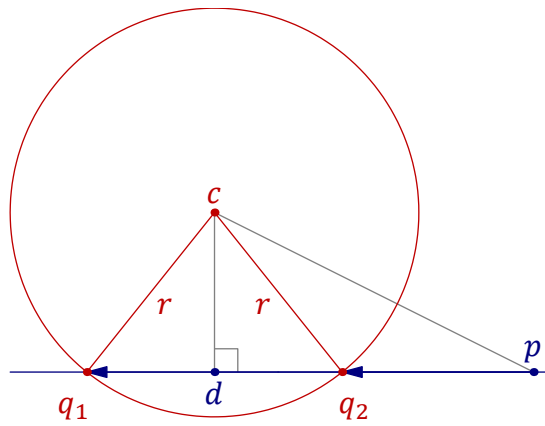


Рис. 23◊2. $s_{r,c}(p) = (q_1 - p, q_2 - p)$.

Вообще, если проходящая через точку p прямая пересекает сферу $S(r, c)$ в точках q_1, q_2 или касается её в точке $q_1 = q_2$, то центр $d = (q_1 + q_2)/2$ отрезка $[q_1, q_2]$ является ортогональной проекцией центра сферы на эту прямую¹ (см. рис. 23◊2). Дважды применяя теорему Пифагора:

$$\begin{aligned} s_{r,c}(p) &= |p - c|^2 - r^2 = |d - p|^2 + |d - c|^2 - r^2 = |d - p|^2 - |q_1 - d|^2 = \\ &= (d - p + (q_1 - d), d - p - (q_1 - d)) = (q_1 - p, q_2 - p), \end{aligned}$$

получаем равенство

$$s_{r,c}(p) = (q_1 - p, q_2 - p), \quad (23-5)$$

известное как *теорема о степени точки относительно сферы*.

ПРИМЕР 23.2 (РАДИКАЛЬНАЯ ГИПЕРПЛОСКОСТЬ)

ГМТ, имеющих равные степени относительно сфер $S(r_1, c_1)$ и $S(r_2, c_2)$, описывается уравнением $(x - c_1, x - c_1) - r_1^2 = (x - c_2, x - c_2) - r_2^2$, которое эквивалентно линейному уравнению

$$\left(x - \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1\right) = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2} \quad (23-6)$$

¹См. н° 23.1.1 на стр. 286.

задающему гиперплоскость, перпендикулярную вектору $c_2 - c_1$ и удалённую от середины отрезка $[c_1, c_2]$ на расстояние $|r_1^2 - r_2^2|/2|c_2 - c_1|$ в направлении центра сферы меньшего радиуса. Эта гиперплоскость называется *радикальной гиперплоскостью* сфер $S(r_1, c_1)$ и $S(r_2, c_2)$. Когда сферы пересекаются, т. е. при $r_1 - r_2 \leq |c_2 - c_1| \leq r_1 + r_2$, где $r_1 \geq r_2$, радикальная гиперплоскость пересекает каждую из сфер в точности по сфере $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$.

23.2. Сферы как комплексные проективные квадррики. отождествим евклидово координатное векторное пространство $V = \mathbb{R}^n$ с множеством вещественных точек комплексного пространства $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ с координатами (x_1, \dots, x_n) и комплексно билинейной формой

$$\begin{aligned} (*, *) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (23-7)$$

которая продолжает евклидово скалярное произведение на \mathbb{R}^n . Вложим \mathbb{C}^n в качестве стандартной аффинной карты $x_0 = 1$ в комплексное проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, которое является проективизацией векторного пространства $W = \mathbb{C}e_0 \oplus V_{\mathbb{C}}$. Тогда проективное замыкание сферы $S(r, c) \subset \mathbb{A}(V_{\mathbb{C}})$ с аффинным уравнением $(x, x) - 2(x, c) + (c, c) - r^2 = 0$ задаётся в \mathbb{P}_n однородным уравнением

$$(x, x) - 2x_0(x, c) + x_0^2((c, c) - r^2) = 0, \quad (23-8)$$

где через $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $c = (c_1, \dots, c_n)$ по-прежнему обозначаются последние n координат. Все сферы (23-8) пересекают бесконечно удалённую гиперплоскость $x_0 = 0$ по *абсолютной квадрике*

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \mid (x, x) = 0\}, \quad (23-9)$$

состоящей из комплексных изотропных векторов евклидова скалярного произведения (23-7).

УПРАЖНЕНИЕ 23.2. Пусть две проективные квадрики имеют общее гиперплоское сечение. Покажите, что у них есть и второе общее гиперплоское сечение¹.

Применительно к сферам (23-8) утверждение из [упр. 23.2](#) очевидно: однородные уравнения

$$\begin{aligned} (x, x) - x_0(2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2) &= 0 \\ (x, x) - x_0(2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

при любых $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ и $c_1, c_2 \in V_{\mathbb{C}}$ совпадают друг с другом как при $x_0 = 0$, так и на гиперплоскости, вдоль которой совпадают друг с другом линейные множители, на которые умножается x_0 . Второе гиперплоское сечение описывается уравнением

$$2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2 = 2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2,$$

которое преобразуется к тому же самому виду, что и уравнение (23-6) выше:

$$\left(x - x_0 \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1\right) = x_0 \frac{r_1^2 - r_2^2}{2}. \quad (23-10)$$

¹Возможно, совпадающее с первым.

При $c_1 \neq c_2$ и $x_0 = 1$ оно задаёт радикальную гиперплоскость (23-6), а при $c_1 = c_2$ — бесконечно удалённую гиперплоскость $x_0 = 0$. Таким образом, радикальной гиперплоскостью двух концентрических сфер разумно считать бесконечно удалённую гиперплоскость.

УПРАЖНЕНИЕ 23.3. Покажите, что все квадрики (23-8) с центром в данной точке $c \in \mathbb{C}^n$ и произвольными $r \in \mathbb{C}$ образуют пучок комплексных проективных квадрик, натянутый на двойную бесконечно удалённую гиперплоскость $x_0^2 = 0$ и простой конус $(x - c, x - c) = 0$ с вершиной c над абсолютной квадратикой (23-9), причём все остальные квадрики пучка, за исключением этих двух, являются гладкими.

23.2.1. Пространство псевдосфер. Все квадратичные формы (23-8) с вещественными центрами $c \in V \simeq \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ лежат в вещественном векторном подпространстве $\Sigma \subset S^2W^*$ размерности $n + 2$, состоящем из всех однородных вещественных квадратичных форм вида

$$q = \alpha \cdot (x, x) - 2x_0(x, c) + \beta \cdot x_0^2, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in V. \quad (23-11)$$

Проективизация $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\Sigma)$ называется пространством $(n - 1)$ -мерных псевдосфер в \mathbb{R}^n . Таким образом, $\mathbb{S} \simeq \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ представляет собою вещественное проективное пространство размерности $n + 1$. Стандартная аффинная карта $U_\alpha \subset \mathbb{S}$ состоит из псевдосфер, которые можно записать приведённым уравнением

$$(x - x_0 c / \alpha, x - x_0 c / \alpha) - x_0^2((c, c) - \alpha\beta) / \alpha^2 = 0. \quad (23-12)$$

При $(c, c) - \alpha\beta > 0$ эта квадратика является настоящей вещественной сферой с квадратом радиуса

$$r^2 = ((c, c) - \alpha\beta) / \alpha^2,$$

при $(c, c) - \alpha\beta = 0$ — простым конусом с вершиной c над абсолютной квадратикой (23-9), который виден в \mathbb{R}^n как двойная точка c , а при $(c, c) - \alpha\beta < 0$ псевдосфера (23-12) является гладкой проективной квадратикой без вещественных точек, которую мы будем называть *мнимой сферой*. На векторном пространстве Σ имеется каноническая квадратичная форма

$$\varrho(q) \stackrel{\text{def}}{=} (c, c) - \alpha\beta, \quad (23-13)$$

пропорциональная квадрату радиуса сферы и имеющая сигнатуру $(n + 1, 1)$. Задаваемая этой формой проективная квадратика $R = V(\varrho)$ выглядит в аффинной карте U_α как сферический параболоид $(c, c) = \beta$, состоящий из сфер нулевого радиуса. Внутренность $(c, c) < \beta$ этого параболоида состоит из мнимых сфер, а внешность $(c, c) > \beta$ — из настоящих сфер радиуса $r = \sqrt{(c, c) - \beta}$. Бесконечно удалённая гиперплоскость $L_\infty = \mathbb{P}(\text{Ann } \alpha)$ карты U_α состоит из псевдосфер (23-11), имеющих $\alpha = 0$ и распадающихся в объединение бесконечно удалённой гиперплоскости $x_0 = 0$ и гиперплоскости $2(x, c) = \beta x_0$, которая совпадает с бесконечно удалённой гиперплоскостью если и только если $c = 0$. Псевдосфера $x_0^2 = 0$, в которой бесконечно удалённая гиперплоскость L_∞ касается параболоида R , обозначается $\infty \in \mathbb{S}$.

УПРАЖНЕНИЕ 23.4. Явно вычислите определитель Грама квадратичной формы (23-11) в стандартном ортонормальном базисе пространства \mathbb{R}^n и ещё раз убедитесь, что форма (23-11) особа если и только если она лежит на бесконечной гиперплоскости $\alpha = 0$ пространства \mathbb{S} или на параболоиде $(c, c) = \alpha\beta$.

23.2.2. Пучки сфер. Из сказанного в предыдущем разделе **н° 23.2.1** вытекает, что все вещественные квадрики из пучка комплексных проективных квадратик, порождённого двумя настоящими сферами $S(r_1, c_1)$ и $S(r_2, c_2)$ в \mathbb{R}^n , образуют прямую ℓ в пространстве псевдосфер \mathbb{S} . Эта прямая пересекает бесконечно удалённую гиперплоскость $L_\infty \subset \mathbb{S}$ ровно в одной точке вида ξx_0 , где $\xi \in W^*$ — однородная вещественная линейная форма от (x_0, x_1, \dots, x_n) . Если $\xi = x_0$, точка $\ell \cap L_\infty = \infty = R \cap L_\infty$ является бесконечной точкой параболоида R , и прямая ℓ пересекает параболоид R ещё ровно в одной, отличной от ∞ точке, как на **рис. 23◊4** ниже. Вторая точка пересечения отвечает псевдосфере $S(0, c)$ с уравнением $(x - c, x - c) = 0$, видимой в \mathbb{R}^n как двойная точка c . Согласно **упр. 23.3**, такой пучок ℓ является пучком концентрических сфер с центром в c , см. **рис. 23◊3**.

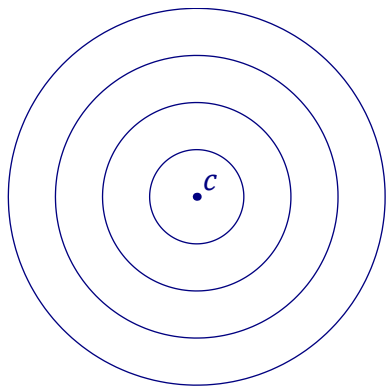


Рис. 23◊3. Пучок концентрических сфер.

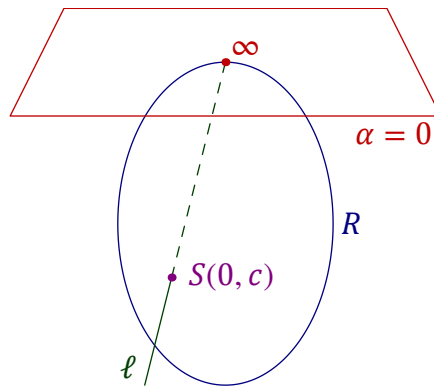


Рис. 23◊4. Соответствующая прямая в \mathbb{S} .

Если $\ell \cap L_\infty \neq \infty$, то в пучке ℓ содержится ровно одна распавшаяся квадратика — объединение бесконечно удалённой гиперплоскости $x_0 = 0$ и гиперплоскости $\Pi = \text{Ann } \xi$, которая является вторым, отличным от бесконечно удалённого, общим гиперплоским сечением всех сфер пучка и, тем самым, видна в аффинном пространстве $A^n = A(V)$ как радикальная гиперплоскость любой пары сфер в пучке ℓ . При этом пучок ℓ может содержать либо ни одного, либо один, либо два простых конуса, отвечающих точкам пересечения прямой ℓ с параболоидом R , как на **рис. 23◊5**, **рис. 23◊9** и **рис. 23◊6** соответственно.

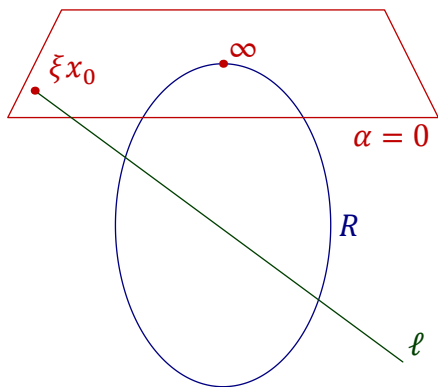


Рис. 23◊5. Пучок без простых конусов.

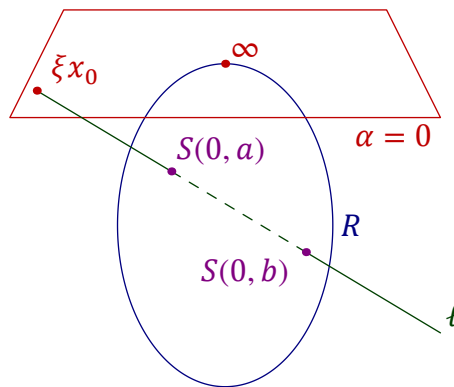


Рис. 23◊6. Пучок с двумя простыми конусами.

В первом случае прямая ℓ не пересекает R и состоит из всех сфер, пересекающих радикальную ось $\Pi = \text{Ann } \xi$ порождающих пучок сфер $S(r_1, c_1)$ и $S(r_2, c_2)$ по фиксированной $(n - 2)$ -мерной

сфере $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$. Такой пучок называется *пучком пересекающихся сфер*. Сферы $S(r_1, c_1)$ и $S(r_2, c_2)$ порождают пучок пересекающихся сфер если и только если

$$r_1 - r_2 < |c_2 - c_1| < r_1 + r_2, \quad \text{где } r_1 \geq r_2.$$

Базисное множество пучка пересекающихся сфер является объединением абсолютной квадрики и вещественной сферы $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$.

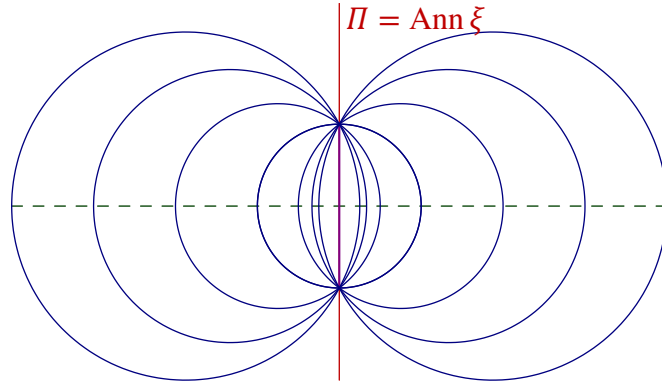


Рис. 23◊7. Пучок пересекающихся сфер.

Второй случай является вырождением первого: при $|c_2 - c_1| = r_1 + r_2$ или $|c_2 - c_1| = r_1 - r_2$, где $r_1 > r_2$, базисная сфера пучка ℓ вырождается в одну точку $c = \Pi \cap (c_1 c_2)$. Все сферы такого пучка касаются друг друга в этой точке c , имеют центры на прямой $(c_1 c_2)$ и при $r \rightarrow \infty$ стремятся к гиперплоскости Π , которая проходит через точку c перпендикулярно прямой $(c_1 c_2)$, см. рис. 23◊8. Отвечающая этому пучку прямая ℓ касается параболоида R в псевдосфере $S(0, c)$, видимой в \mathbb{R}^n как двойная точка c , см. рис. 23◊9. Такой пучок ℓ называется *пучком соприкасающихся сфер*.

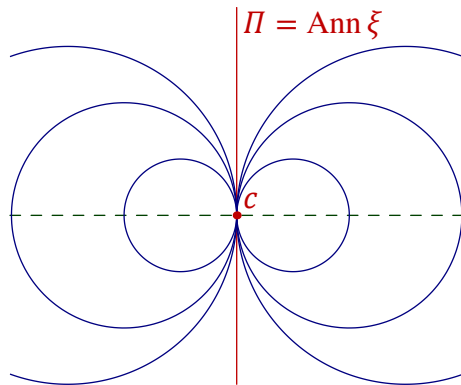


Рис. 23◊8. Пучок соприкасающихся сфер.

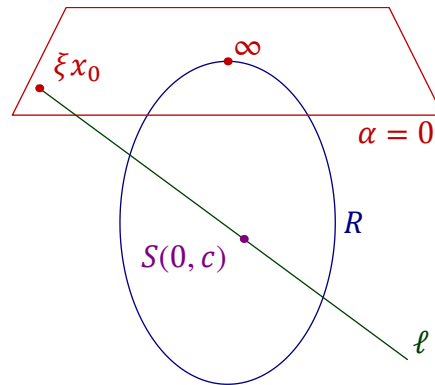


Рис. 23◊9. Соответствующая прямая в \mathbb{S} .

Третий случай имеет место когда $r_1 + r_2 < |c_2 - c_1|$ или $|c_1 - c_2| < r_1 - r_2$, где $r_1 > r_2$, и отвечает прямой ℓ , которая пересекает параболоид R в двух различных точках $S(0, a), S(0, b)$, видимых в \mathbb{R}^n как две различные двойные точки $a, b \in (c_1, c_2)$, см. рис. 23◊6. Такой пучок называется *пучком непересекающихся сфер*: никакие две сферы пучка не пересекаются¹, но при этом любые

¹Вернее, пересекаются по двум мнимым сферам: абсолютной сфере I из форм. (23-9) на стр. 288 и радикальному гиперплоскому сечению $\Pi \cap S(r_1, c_1) = \Pi \cap S(r_2, c_2) = S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$.

две сферы имеют одну и ту же радикальную ось Π , к которой все сферы пучка стремятся при $r \rightarrow \infty$, см. рис. 23♦10 ниже. При подходе к точкам пересечения прямой ℓ с параболоидом R радиусы сфер стремятся к нулю, а сами сферы вырождаются в двойные точки a и b . Если двигать прямую ℓ в пространстве $\mathbb{P}(\Sigma)$ так, чтобы две точки её пересечения с параболоидом R слились в одну точку касания, двойные точки a и b сольются в одну точку c , и мы вновь получим пучок соприкасающихся сфер.

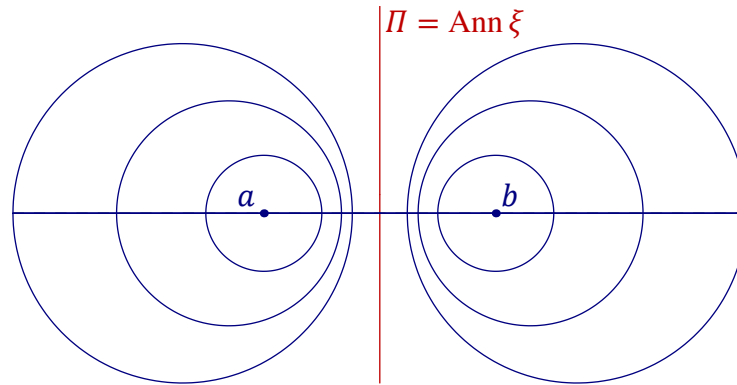


Рис. 23♦10. Пучок непересекающихся сфер.

23.3. Инверсии. Так как поляризация однородной квадратичной формы (23-8) имеет вид

$$\tilde{q}(x, y) = (x - x_0 c, y - y_0 c) - r^2 x_0 y_0,$$

полярное преобразование¹ относительно сферы $S(r, c) \subset \mathbb{R}^n$ переводит центр c в бесконечно удалённую гиперплоскость $x_0 = 0$, а каждую отличную от центра точку $p \in \mathbb{R}^n$ — в полярную ей аффинную гиперплоскость

$$\Pi_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - c, p - c) = r^2\}, \quad (23-14)$$

перпендикулярную прямой (pc) и находящуюся на расстоянии $r^2 / |p - c|$ от центра сферы по ту же сторону, что и точка p . Сопряжённой точке p на прямой (pc) точка $p' = (pc) \cap \Pi_p$ обозначается $\sigma_{r,c}(p)$ и называется *инверсной* точке p относительно сферы $S(r, c)$. Она однозначно характеризуется тем, что $(p' - c, p - c) = r^2$, и явно выражается через p по формуле

$$\sigma_{r,c}(p) = c + \frac{r^2(p - c)}{(p - c, p - c)}. \quad (23-15)$$

Инверсия задаёт на каждой проходящей через c проективной прямой инволюцию с неподвижными точками $\ell \cap S(r, c)$. Эта инволюция переставляет центр сферы с бесконечностью и естественно продолжается на одноточечную компактификацию $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \infty$ евклидова пространства \mathbb{R}^n до инволютивного гомеоморфизма $\sigma_{r,c} : \hat{\mathbb{R}}^n \simeq \hat{\mathbb{R}}^n$, который переставляет друг с другом сопряжённые относительно сферы точки на каждой проходящей через центр сферы прямой, в частности, оставляет каждую точку сферы на месте и переставляет точки c и ∞ . Таким образом, любая проходящая через центр сферы прямая переводится инверсией в себя с сохранением

¹См. п.° 19.1 на стр. 233.

двойного отношения, и две точки такой прямой инверсны друг другу если и только если они гармоничны точкам пересечения этой прямой со сферой¹. В частности, каждое проходящее через центр сферы аффинное подпространство Π переводится инверсией $\sigma_{r,c}$ в себя, и ограничение инверсии на такое подпространство является в нём инверсией относительно сферы $\Pi \cap S(r, c)$.

Предложение 23.1

Инверсия $\sigma_{r,c}$ переводит каждую не проходящую через c гиперплоскость Π в сферу с диаметром $[p, c]$, где p — полюс гиперплоскости Π относительно сферы $S(r, c)$, а каждую проходящую через c сферу Q — в гиперплоскость, полярную второму концу выпущенного из c диаметра сферы Q .

Доказательство. В силу того, что инверсия обратна самой себе, достаточно доказать только первое утверждение. Поскольку поляр Π_x любой точки $x \in \Pi$ проходит через полюс p гиперплоскости Π , отрезок $[p, c]$ виден из инверсной к x точки $x' = (cx) \cap \Pi_x$ под прямым углом, см. рис. 23◊11. □

Упражнение 23.5. Проверьте прямым вычислением, что отображение (23-15) переводит гиперплоскость $(x - c, p - c) = r^2$ и сферу $(x - c, x - p) = 0$ друг в друга.

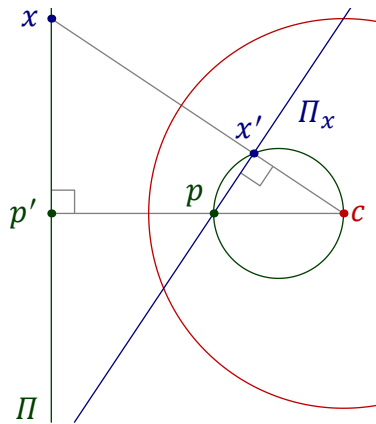


Рис. 23◊11. Инверсные сфера и гиперплоскость.

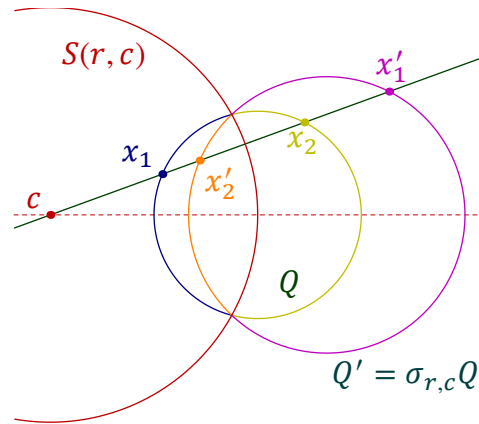


Рис. 23◊12. Инверсные сферы.

Предложение 23.2

Каждая не проходящая через центр инверсии сфера $Q = S(t, p)$ переводится инверсией $\sigma_{r,c}$ в сферу Q' , гомотетичную сфере Q относительно центра инверсии c с коэффициентом $r^2/s_{t,p}(c)$, где $s_{t,p}(c) = (c - p, c - p) - t^2$ означает степень² центра инверсии c относительно сферы Q , см. рис. 23◊12. В частности, сфера Q переводится инверсией в себя если и только если она перпендикулярна сфере $S(r, c)$.

Доказательство. По теореме о степени точки относительно сферы³ на каждой проходящей через c прямой, пересекающей сферу Q в точках x_1, x_2 , выполняется равенство

$$(x_1 - c, x_2 - c) = s_{t,p}(c).$$

¹См. предл. 19.1 на стр. 234.

²См. п. 23.1.2 на стр. 287.

³См. формулу (23-5) на стр. 287.

Поэтому для гомотетичных точек x_1, x_2 относительно c с коэффициентом $r^2/s_{t,p}(c)$ точек x'_1, x'_2 справедливы равенства $(x_1 - c, x'_2 - c) = r^2 = (x'_1 - c, x_2 - c)$, означающие, что $\sigma_{r,c}(x_1) = x'_2$, а $\sigma_{r,c}(x_2) = x'_1$. Это доказывает первое утверждение. Равенство $\sigma_{r,c}Q = Q$ равносильно тому, что коэффициент гомотетии $r^2/s_{t,p}(c) = 1$, что можно переписать как $(p - c, p - c) = r^2 + t^2$. Последнее означает, что расстояние между центрами сфер равно сумме квадратов их радиусов, т. е. что отрезок $[c, p]$ виден из каждой точки пересечения сфер под прямым углом. \square

Предостережение 23.1. Центр сферы Q не обязан переходить при инверсии $\sigma_{r,c}$ в центр сферы $Q' = \sigma_{r,c}(C)$. Например, если сфера $Q = S(t, p)$ перпендикулярна сфере $S = S(r, c)$, то её центр перейдёт в точку пересечения радикальной гиперплоскости с линией центров.

Упражнение 23.6. Убедитесь в этом и докажите, что прообразом центра сферы $Q' = \sigma_{r,c}(Q)$ является точка c' , инверсная точке c относительно сферы Q .

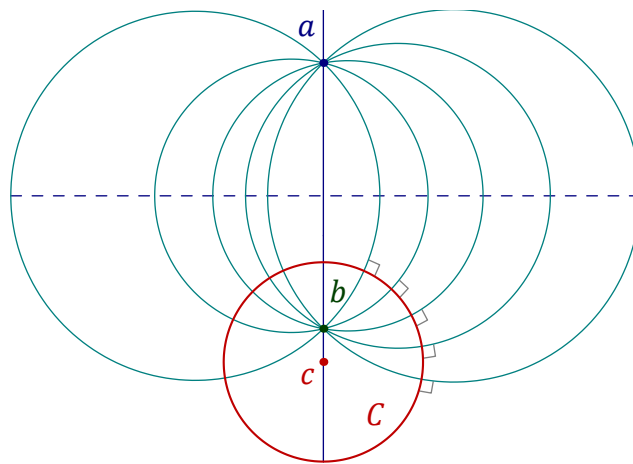


Рис. 23♦13. Отражение в сфере.

Следствие 23.1

Две различные точки тогда и только тогда инверсны относительно сферы S (соотв. симметричны относительно гиперплоскости Π), когда все проходящие через них сферы и гиперплоскости перпендикулярны сфере S (соотв. гиперплоскости Π), см. рис. 23♦13 (соотв. рис. 23♦14).

Доказательство сл. 23.1. Если точки a и b инверсны относительно сферы, то любая проходящая через них сфера Q пересекает сферу S по некоторой $(n - 2)$ -мерной сфере, которая неподвижна относительно инверсии. Поэтому инверсная Q сфера Q' пересекает S по той же сфере $S \cap Q' = S \cap Q$ и, стало быть, лежит в пучке пересекающихся сфер¹ (SQ), откуда $Q = Q'$, так как в любом пучке есть ровно одна квадрика, проходящая через заданную не базисную точку. По предл. 23.2 сферы Q и S перпендикулярны. Поскольку каждая проходящая через a и b гиперплоскость походит и через лежащий на прямой (ab) центр сферы, она тоже перпендикулярна сфере. Для доказательства обратной импликации заметим, что каждое двухточечное множество $\{a, b\}$ является пересечением всех проходящих через него сфер и гиперплоскостей, так как для любой точки $x \neq a, b$ существует сфера или гиперплоскость, проходящая через a и b , но не

¹См. п° 23.2.2 на стр. 290.

проходящая через x . Поэтому если каждая проходящая через a и b сфера или гиперплоскость переводится инверсией в себя, то и множество $\{a, b\}$ переходит в себя. \square

УПРАЖНЕНИЕ 23.7. Докажите сл. 23.1 для отражения в гиперплоскости, см. рис. 23◊14.

Соглашение 23.1. Имея в виду сл. 23.1 мы, допуская известную вольность, будем иногда называть инверсии относительно сферы S *отражениями в сфере S* .

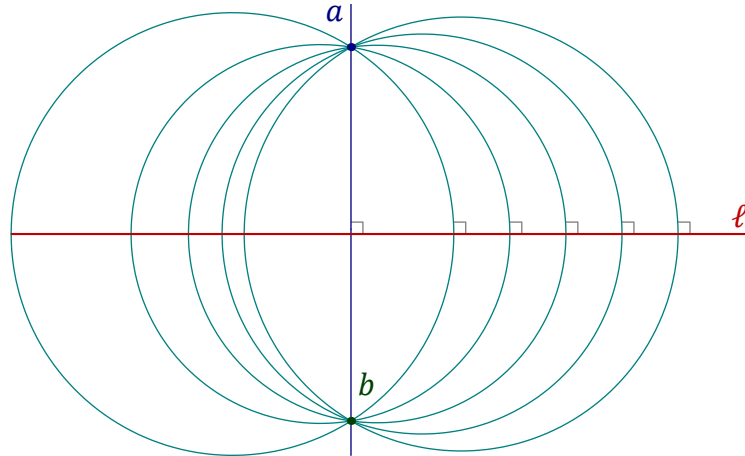


Рис. 23◊14. Отражение в гиперплоскости.

23.3.1. Конформность. Будем называть *касательным векторным пространством* к аффинной гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \Pi$ направляющее векторное подпространство этой гиперплоскости, а *касательным векторным пространством* к сфере $S = S(r, c) \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \Pi$ — векторное подпространство $(p - c)^\perp \subset \mathbb{R}^n$, ассоциированное с аффинной касательной гиперплоскостью $T_p S = p + (p - c)^\perp$. Под углом между пересекающимися фигурами Φ и Ψ , каждая из которых является сферой или гиперплоскостью, мы понимаем евклидов угол между касательными векторными пространствами к этим фигурам в любой точке $p \in \Phi \cap \Psi$, т. е. наименьший из двух смежных углов между перпендикулярными этим касательным пространствам одномерными векторными подпространствами в \mathbb{R}^n .

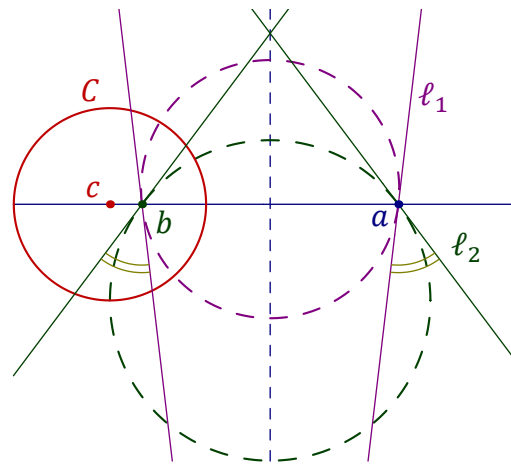


Рис. 23◊15. Сохранение углов.

УПРАЖНЕНИЕ 23.8. Убедитесь, что этот угол не зависит от выбора точки $p \in \Phi \cap \Psi$.

Предложение 23.3

Каждое отражение в сфере или гиперплоскости сохраняет углы между сферами и гиперплоскостями.

Доказательство. Отражение в гиперплоскости является ортогональным линейным преобразованием и сохраняет углы. Покажем, что каждая инверсия $\sigma_{r,c}$ тоже сохраняет углы.

Пусть точка $a \neq c$ не лежит на сфере $S(r, c)$, и $b = \sigma_{r,c}(a)$. Сферы, касающиеся заданной гиперплоскости Π в точке a образуют пучок ℓ_Π соприкасающихся сфер и пересекают любую проходящую через a сферу или гиперплоскость под одним и тем же углом. Инверсия переводит пучок ℓ_Π в пучок соприкасающихся сфер, касающихся касательной гиперплоскости $T_b\sigma_{r,c}(\Pi)$ фигуры¹ $\sigma_{r,c}(\Pi)$ в точке b и также образующих одинаковые углы с каждой проходящей через b сферой или гиперплоскостью. В пучке ℓ_Π существует единственная сфера Q , проходящая через точки a и b . Как мы видели в доказательстве [сл. 23.1](#), эта сфера переводится в себя инверсией $\sigma_{r,c}$, а также отражением в срединном перпендикуляре к отрезку $[a, b]$. Поэтому две проходящие через a и b сферы с касательными гиперплоскостями $T_aQ_1 = \Pi_1$ и $T_aQ_2 = \Pi_2$ имеют в точке b касательные гиперплоскости $T_bQ_1 = \Pi'_1$ и $T_bQ_2 = \Pi'_2$, симметричные гиперплоскостям Π_1 и Π_2 относительно срединного перпендикуляра к отрезку $[a, b]$ и, стало быть, пересекающиеся под тем же углом.

Если точка $a \in S(r, c)$, то углы между сферами и плоскостями, проходящими через a сохраняются при инверсии $\sigma_{r,c}$, поскольку последняя является композицией инверсии $\sigma_{r/2,c}$ относительно не проходящей через a сферы $S(r/2, c)$ и гомотетии с центром c и коэффициентом 4.

УПРАЖНЕНИЕ 23.9. Убедитесь в этом.

Если $a = c$ совпадает с центром инверсии, то угол между любыми двумя проходящими через a сферами Q_1 и Q_2 равен углу между инверсными этим сферам гиперплоскостями, поскольку по последним параллельны касательным пространствам T_cQ_1 и T_cQ_2 . \square

Следствие 23.2

Пусть каждая из двух фигур $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^n$ является сферой или гиперплоскостью. Обозначим через $\sigma_\Phi, \sigma_\Psi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ соответствующие отражения или инверсии. Тогда $\sigma_\Phi\sigma_\Psi\sigma_\Phi^{-1} = \sigma_{\sigma_\Phi(\Psi)}$, т. е. любые две симметричные относительно Ψ точки переводятся отражением σ_Φ в две точки, симметричные относительно $\sigma_\Phi(\Psi)$.

Доказательство. Согласно [сл. 23.1](#) на стр. 294 симметричность точек a и b относительно Ψ означает, что все проходящие через a и b сферы и гиперплоскости перпендикулярны Ψ . Сохраняющее углы отражение σ_Φ биективно отображает множество таких сфер и гиперплоскостей в множество перпендикулярных $\Phi(\Psi)$ сфер и гиперплоскостей, проходящих через точки $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23.1 (конформные отображения)

Непрерывно дифференцируемое отображение $f : U \rightarrow W$ между двумя открытыми подмножествами U, W евклидова пространства \mathbb{R}^n называется *конформным*, если в каждой точке $p \in U$ производное линейное отображение $D_p f : T_p U \rightarrow T_{f(p)} W$ является композицией скалярного растяжения² и ортогонального линейного отображения, сохраняющего евклидово скалярное произведение на касательных пространствах $T_p U \simeq T_{f(p)} W \simeq \mathbb{R}^n$.

УПРАЖНЕНИЕ 23.10. Убедитесь, что инверсия $\sigma_{r,c} : \mathbb{R}^n \setminus c \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus c$ является конформным отображением, причём её производное отображение в произвольной точке $p \neq c$ является композицией отражения в гиперплоскости $(p - c)^\perp$ и скалярного растяжения с коэффициентом $r^2 / (p - c, p - c)$.

¹ Согласно предыдущему, эта фигура является сферой или гиперплоскостью.

² Коэффициент которого может зависеть от точки $p \in U$.

23.4. Стереографическая проекция и инверсии на сфере. Стереографическая проекция сферы $S = S(r, c)$ из лежащей на ней точки p на проходящую через центр сферы перпендикулярно вектору $p - c$ экваториальную гиперплоскость $E_p = \{x \mid (x - c, p - c) = 0\}$

$$\pi_p : S(r, c) \setminus p \rightarrow E_p \tag{23-16}$$

является ограничением на сферу S инверсии σ_Q относительно перпендикулярной сферу S по её экватору $E_p \cap S$ сферы Q радиуса $r\sqrt{2}$ с центром в точке p , см. рис. 23◊16.

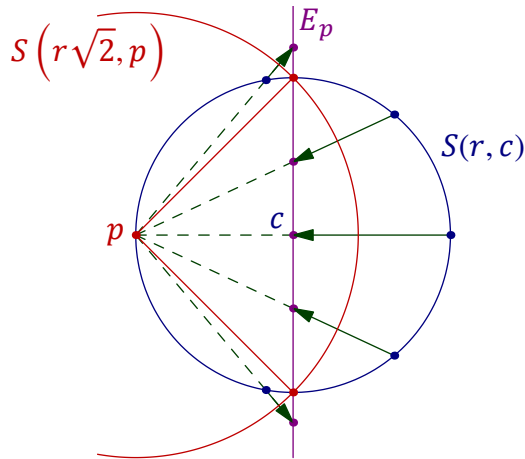


Рис. 23◊16. Стереографическая проекция.

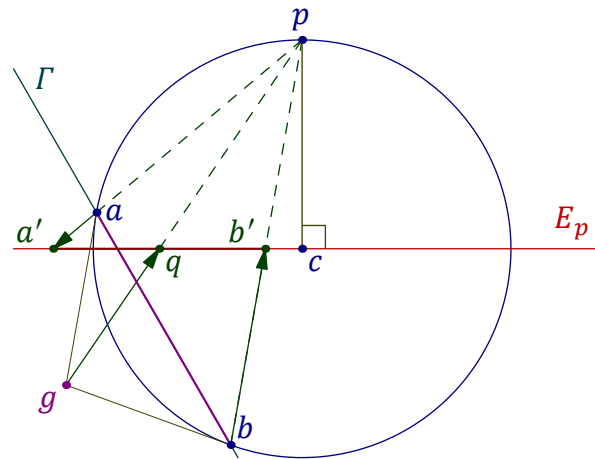


Рис. 23◊17. Соответственные сферы.

Таким образом, стереографическая проекция переводит каждую лежащую на S сферу $S' = \Gamma \cap S$, высекаемую из S какой-либо гиперплоскостью Γ , в лежащую в гиперплоскости E_p гиперплоскость или сферу, высекаемую из E_p образом $\sigma_Q(\Gamma)$ гиперплоскости Γ при инверсии σ_Q , который является гиперплоскостью или сферой: первое происходит если гиперплоскость Γ проходит через точку p , а второе — если не проходит, и во втором случае полюс g гиперплоскости Γ относительно сферы S спроектируется из точки p в центр сферы $\pi_p(S') = \sigma_Q(\Gamma) \cap E_p$.

УПРАЖНЕНИЕ 23.11. Убедитесь в этом (см. рис. 23◊17).

Наоборот, каждая гиперплоскость $\Gamma' \subset E_p$ является стереографической проекцией сферы, высекаемой из S гиперплоскостью Γ , проходящей через Γ' и p , а каждая сфера $S'' = S(t, q) \subset E_p$, пересекающая прямую (qc) в точках $a' = \pi_p(a)$ и $b' = \pi_p(b)$, как на рис. 23◊17, является стереографической проекцией сферы $S' = \Gamma \cap S$ с диаметром $[a, b]$, высекаемой из S гиперплоскостью Γ , полюс g которой проектируется из точки p в центр q сферы S' и которая является прообразом сферы с диаметром $[a', b']$ при инверсии σ_Q . При этом углы между лежащими на S сферами равны углам между их образами в гиперплоскости E_p и наоборот.

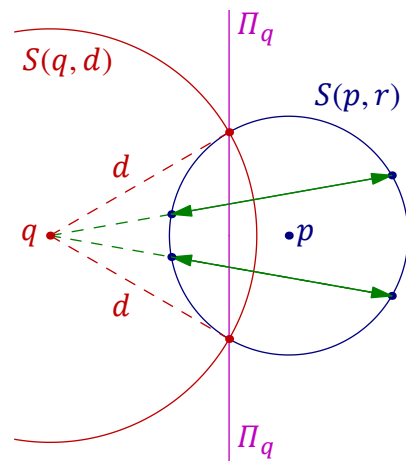


Рис. 23◊18. Инверсия $\sigma_q : S(p, r) \rightarrow S(p, r)$.

Каждая точка q , лежащая снаружи от ограничиваемого сферой $S = S(r, c)$ шара, задаёт на сфере S инволюцию $\sigma_q : S \rightarrow S$, переставляющую между собою точки пересечения сферы S

с проходящими через q прямыми¹. Эта инволюция тождественно действует на сфере $S \cap \Pi_q$, высекаемой из сферы S полярной гиперплоскостью Π_q точки q , и совпадает с ограничением на сферу S инверсии относительно сферы $Q = S(t, q)$, которая перпендикулярно пересекает сферу S по неподвижной относительно σ_q сфере $S \cap \Pi_q$, имеет центр в точке q и квадрат радиуса $t^2 = s_{r,c}(q) = |q - c|^2 - r^2$, равный степени точки q относительно сферы S , см. рис. 23◊18. Инволюция σ_q называется *инверсией сферы S* , а точка q — *центром инверсии σ_q* .

Дополним стереографическую проекцию (23-16) до гомеоморфизма

$$\pi_p : S(r, c) \simeq \widehat{E}_p, \quad p \mapsto \infty, \quad x \mapsto (px) \cap E_p \text{ при } x \neq p, \quad (23-17)$$

где $\widehat{E}_p = E_p \sqcup \infty$ — одноточечная компактификация экваториальной гиперплоскости E_p , и будем рассматривать отражения в лежащих внутри E_p гиперплоскостях как оставляющие на месте точку ∞ инволюции пространства \widehat{E}_p .

Предложение 23.4

Пополненная стереографическая проекция (23-17) устанавливает биекцию между инверсиями сферы $S = S(r, c)$ и отражениями пополненного евклидова пространства \widehat{E}_p в лежащих в нём сферах и гиперплоскостях, переводя каждую инверсию $\sigma_q : S \simeq S$ в композицию

$$\pi_p \sigma_q \pi_p^{-1} : \widehat{E}_p \simeq \widehat{E}_p, \quad (23-18)$$

которая является отражением в стереографическом образе лежащей на S сферы $\Pi_q \cap S$, высекаемой полярной гиперплоскостью Π_q точки q относительно сферы S .

Доказательство. Композиция (23-18) оставляет на месте каждую точку фигуры $\Phi = \pi_p(\Pi_q \cap S)$ и действует на точки экваториальной гиперплоскости E_p как композиция инверсий

$$\sigma_{r\sqrt{2}, p} \sigma_{t, q} \sigma_{r\sqrt{2}, p}^{-1} = \sigma_\Psi,$$

которая по сл. 23.2 на стр. 296 представляет собою отражение в фигуре $\Psi = \sigma_{r\sqrt{2}, p}(Q)$, где $Q = S(t, q)$ — сфера с центром q и квадратом радиуса $t^2 = s_{r,c}(q)$, как на рис. 23◊18 выше. Фигура Ψ является сферой, если $p \in \Pi_q$, или гиперплоскостью, если $p \notin \Pi_q$, и $\Psi \cap E_p = \Phi$. Поскольку инверсия σ_Ψ переводит гиперплоскость E_p в себя, сфера или гиперплоскость Ψ автоматически перпендикулярна гиперплоскости E_p , и отражение σ_Ψ действует на E_p как отражение σ_Φ . \square

Упражнение 23.12. Убедитесь напрямую, что инверсия $\sigma_{r\sqrt{2}, p}$ переводит сферу Q в перпендикулярную гиперплоскости E_p гиперплоскость, если $p \in \Pi_q$, или в сферу с центром на гиперплоскости E_p , если $p \notin \Pi_q$.

23.5. Группы Мёбиуса. Вложим евклидово пространство $U = \mathbb{R}^{n-1}$ в евклидово пространство $V = \mathbb{R}^n$ с координатами (x_1, \dots, x_n) в качестве гиперплоскости $x_n = 0$ и обозначим через $S = S(1, 0) \subset \mathbb{R}^n$ единичную сферу с центром в нуле. Рассмотрим пространство $V = \mathbb{R}^n$ как аффинную карту $x_0 = 0$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ и обозначим через

$$s(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad (23-19)$$

¹Ср. с прим. 18.5 на стр. 230.

однородную квадратичную форму сигнатуры $(n, 1)$ на пространстве $W = \mathbb{R}^{n+1}$, задающую проективное замыкание $\bar{S} = V(s) \subset \mathbb{P}_n$ сферы S , которое совпадает с S , так как у сферы нет вещественных точек на бесконечности. Инволюция $\sigma_q : S \rightarrow S$ действует на проективной квадрике S как отражение гиперплоскости $q_s^\perp \subset W$, ортогональной относительно формы s анизотропному вектору q с положительным скалярным квадратом $s(q) > 0$.

Упражнение 23.13. Убедитесь, что такие отражения порождают группу $O(n, 1) \subset GL_{n+1}(\mathbb{R})$ линейных преобразований $W \rightarrow W$, сохраняющих квадратичную форму (23-19).

Поскольку сфера S содержит $n + 2$ точки, никакие $n + 1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, каждый линейный проективный автоморфизм пространства \mathbb{P}_n однозначно задаётся своим действием на сферу. Мы заключаем, что порождённая отражениями σ_q группа преобразований проективной квадрики S изоморфна проективизации $PO(n, 1)$ ортогональной группы квадратичной формы (23-19). Эта группа называется *сферической мёбиусовой группой* $(n-1)$ -мерной сферы и обозначается $M(S^{n-1})$.

Согласно предл. 23.4, сферическая мёбиусова группа $M(S^{n-1})$ изоморфна группе преобразований пополненного евклидова пространства $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}$, порождённой отражениями в сферах и гиперплоскостях. Эта группа называется *несобственной мёбиусовой группой* евклидова пространства \mathbb{R}^{n-1} и обозначается $M(\mathbb{R}^{n-1})$ или просто M_{n-1} . Её подгруппа $SM_{n-1} \subset M_{n-1}$, состоящая из всех преобразований, сохраняющих ориентацию пространства \mathbb{R}^{n-1} , называется *собственной мёбиусовой группой* или просто *группой Мёбиуса* пространства \mathbb{R}^{n-1} .

Упражнение 23.14. Убедитесь, что композиция $\sigma_{r_2, c} \circ \sigma_{r_1, c}$ отражений в двух концентрических сферах является гомотетией с центром c и коэффициентом r_2^2 / r_1^2 .

Так как параллельные переносы и повороты являются композициями отражений в гиперплоскостях, мы заключаем, что мёбиусова группа M_n евклидова пространства \mathbb{R}^n содержит все движения и подобия.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 23.2. Пусть квадрики $Q = V(q)$ и $F = V(f)$ пересекают гиперплоскость $\Pi = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$ по одной и той же квадрике $G = V(g) = Q \cap \Pi = F \cap \Pi$. Поскольку при $\xi = 0$ обе квадратичные формы q, f превращаются в квадратичную форму g , они имеют вид $q = g + \xi\psi, f = g + \xi\varphi$ для некоторых линейных форм ψ, φ . Но тогда ограничения форм q, f на гиперплоскость $\text{Ann}(\psi - \varphi)$, на которой $\psi = \varphi$, тоже совпадают друг с другом.

Упр. 23.3. Первое утверждение очевидно из 23-8 на стр. 288, второе вытекает из лем. 20.1 на стр. 247: простой конус и двойная плоскость имеют в любом пучке кратности ≥ 1 и $\geq n$ соответственно, поэтому никаких других особых квадрик в рассматриваемом пучке больше нет.

Упр. 23.4. Ответ: $\det \Gamma = \alpha^{n-1}((c, c) - \alpha\beta)$.

Упр. 23.6. Первое проверяется прямым вычислением, второе вытекает из сл. 23.2 на стр. 296: инверсия σ относительно S переводит инверсные относительно Q точки c и c' в точки ∞ и $\sigma(c')$ инверсные относительно Q' .

Упр. 23.8. Группа движений пространства \mathbb{R}^n , переводящих каждую из фигур Φ, Ψ в себя, транзитивно действует на пересечении $\Phi \cap \Psi$ и переводит касательные пространства в касательные пространства, сохраняя углы.

Упр. 23.10. По правилу дифференцирования дробей, производная от отображения (23-15)

$$p \mapsto c + \frac{r^2(p - c)}{(p - c, p - c)}$$

действует на касательный вектор $w \in \mathbb{R}^n$ по правилу

$$\begin{aligned} w \mapsto \frac{r^2}{(p - c, p - c)^2} (w(p - c, p - c) - 2(p - c, w)(p - c)) = \\ = \frac{r^2}{(p - c, p - c)} \left(w - 2 \frac{(p - c, w)}{(p - c, p - c)} (p - c) \right) \end{aligned}$$

(ср. с упр. 12.6 на стр. 152 и п° 15.2 на стр. 181).

Упр. 23.11. На рис. 23◊17 на стр. 297 проекция прямой (ab) на прямую $(a'b')$ из точки p сохраняет двойные отношения. Обозначим через e и f точки пересечения прямой (ab) соответственно с прямой (pg) и с касательной гиперплоскостью к сфере в точке p . Тогда $[\infty, q, a', b'] = [e, f, a, b] = -1$, поскольку точки e и f сопряжены относительно сферы $S(r, c)$. Таким образом, точка g спроектируется из p в середину отрезка $[a, b]$.

Упр. 23.13. Достаточно убедиться, что для любой пары анизотропных векторов $u, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ с $s(u) = s(w) \neq 0$ существует отражение нужного вида, переводящее u либо в w , либо в $-w$, после чего повторить доказательство теор. 15.2 на стр. 181. Для этого, как и в доказательстве лем. 15.1 на стр. 181, надо заметить, что векторы $e_+ = u + w$ и $e_- = u - w$ ортогональны друг другу. Их скалярные квадраты $s(e_{\pm})$ не могут быть оба нулевыми, поскольку ограничение формы s на двумерную линейную оболочку U этих векторов ненулевое, и не могут быть оба отрицательными, поскольку в этом случае $\mathbb{R}^{n+1} = U \oplus U^{\perp}$ и, тем самым, сигнатура (p, m) формы s должна иметь $m \geq 2$. Если один из векторов, скажем e_- , имеет $s(e_-) = 0$, то $s(e_+) \neq 0$ и $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}e_+ \oplus e_+^{\perp}$, причём ограничение формы s на e_+^{\perp} невырождено. Поскольку подпространство e_+^{\perp} содержит изотропный вектор e_- , оно содержит гиперболическую плоскость и, стало

быть, сигнатура (p', m') ограничения формы s на e_{\pm}^{\perp} имеет $m' \geq 1$, откуда $s(e_{\pm}) > 0$. Таким образом, как минимум один из скалярных квадратов $s(e_{\pm})$ положителен, и отражение в ортogonalе к соответствующему вектору e_{\pm} переводит u либо в w , либо в $-w$ (ср. с доказательством лем. 15.1 на стр. 181).