

§19. Гладкие проективные квадррики

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.

19.1. Полярное преобразование относительно гладкой квадррики. Напомню, что с каждой квадратичной формой $q \in S^2V^*$ однозначно связаны симметричная билинейная форма¹

$$\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad \tilde{q}(u, w) = \frac{1}{2}(q(u + w) - q(u) - q(w)),$$

и линейное отображение корреляции² $\hat{q} : V \rightarrow V^*$, $w \mapsto \hat{q}(w) : u \mapsto \tilde{q}(u, w)$. Невырожденность формы q равносильна тому, что корреляция является линейным изоморфизмом векторных пространств. Индуцированное ею биективное проективное преобразование $\bar{q} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_n(V^*)$ пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ в пространство $\mathbb{P}_n^* = \mathbb{P}(V^*)$ гиперплоскостей в \mathbb{P}_n называется *полярным преобразованием* или *поляритетом* относительно гладкой квадррики $Q = V(q) \subset \mathbb{P}_n$. Поляритет сопоставляет каждой точке $p \in \mathbb{P}_n$ её *полярную гиперплоскость*³ $\bar{q}(p) = \mathbb{P}(p^\perp)$.

Упражнение 19.1. Убедитесь, что при умножении квадратичной формы q на ненулевую константу поляритет не меняется.

Точка p и гиперплоскость $\mathbb{P}(p^\perp)$ называются, соответственно, *полюсом* и *полярной* друг друга относительно квадррики Q . Геометрически, полярная точки $p \notin Q$ представляет собою гиперплоскость, высекающую видимый из этой точки контур⁴ квадррики Q , а полярной точки $p \in Q$ является касательная гиперплоскость T_pQ к квадррике Q в точке p . Таким образом, квадррика однозначно восстанавливается по своему поляритету как ГМТ, лежащих на своих полярах.

19.1.1. Поляритеты над незамкнутыми полями. Мы уже видели, что над алгебраически незамкнутыми полями могут быть анизотропные квадратичные формы, задающие пустые квадррики. Все эти квадррики автоматически невырождены, и их поляритеты являются вполне наблюдаемыми геометрическими преобразованиями точек в гиперплоскости. Пустота квадррики, задающей такое преобразование, означает лишь то, что никакая точка не лежит на своей поляре.

Упражнение 19.2. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 относительно «мнимой окружности» $x^2 + y^2 = -1$.

Из теор. 18.1 на стр. 218 вытекает, что два поляритета $\bar{q}_1, \bar{q}_2 : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ совпадают тогда и только тогда, когда задающие их квадратичные формы $q_1, q_2 \in S^2(V^*)$ пропорциональны.

ТЕОРЕМА 19.1

Две непустые гладкие квадррики над бесконечным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ совпадают если и только если их уравнения пропорциональны.

Доказательство. При $n = 1$ равенство $V(q_1) = V(q_2) = \{a, b\}$ означает, что обе бинарные квадратичные формы $q_1(x), q_2(x)$ от $x = (x_0, x_1)$ пропорциональны $\det(x, a) \det(x, b)$.

Упражнение 19.3. Покажите, что над бесконечным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ при $n \geq 2$ на любой непустой гладкой квадррике $Q \subset \mathbb{P}_n$ найдутся $n + 2$ точки, никакие $n + 1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

¹Которая называется *поляризацией* квадратичной формы q , см. н° 15.3 на стр. 182.

²См. н° 14.1.2 на стр. 168.

³Или *поляру*, см. н° 17.3.1 на стр. 208, особенно — формулу (17-4).

⁴См. н° 17.3.1 на стр. 208.

Так как поляритеты $\bar{q}_1, \bar{q}_2 : \mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ одинаково действуют на эти $(n + 2)$ точки, корреляции $\hat{q}_1, \hat{q}_2 : V \simeq V^*$ пропорциональны по [упр. 19.3](#), а значит, формы q_1 и q_2 имеют пропорциональные матрицы Грама. \square

19.1.2. Сопряжение. Поскольку условие $\tilde{q}(a, b) = 0$ симметрично по a и b , точка a лежит на поляре точки b если и только если точка b лежит на поляре точки a . Такие точки a и b называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q . Сопряжённость является симметричным бинарным отношением. Полярные сопряжённым точкам a и b гиперплоскости $\mathbb{P}(a^\perp)$ и $\mathbb{P}(b^\perp)$ тоже называются *сопряжёнными* относительно Q .

Упражнение 19.4. Одной линейкой постройте полярную точку и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 относительно данной окружности. Особое внимание уделите случаям, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри очерчиваемого окружностью круга.

Предложение 19.1

Пусть прямая (ab) пересекает гладкую квадратичку Q в двух различных точках c и d , отличных от a и b . Точки a, b тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики Q , когда они гармоничны¹ точкам c, d .

Доказательство. Обозначим проходящую через точки a, b, c, d прямую через ℓ . Сопряжение относительно квадрики Q задаёт на прямой ℓ инволюцию $\sigma_Q : \ell \rightarrow \ell, x \mapsto \ell \cap \mathbb{P}(x^\perp)$, которая переводит точку $x \in \ell$ в точку пересечения её полярности с прямой ℓ . Так точки c и d неподвижны относительно этой инволюции, σ_Q меняет местами точки a и b если и только если $[a, b, c, d] = -1$, как мы видели в [упр. 18.9](#) на стр. 230. \square

Упражнение 19.5. Дайте чисто алгебраическое доказательство [предл. 19.1](#).

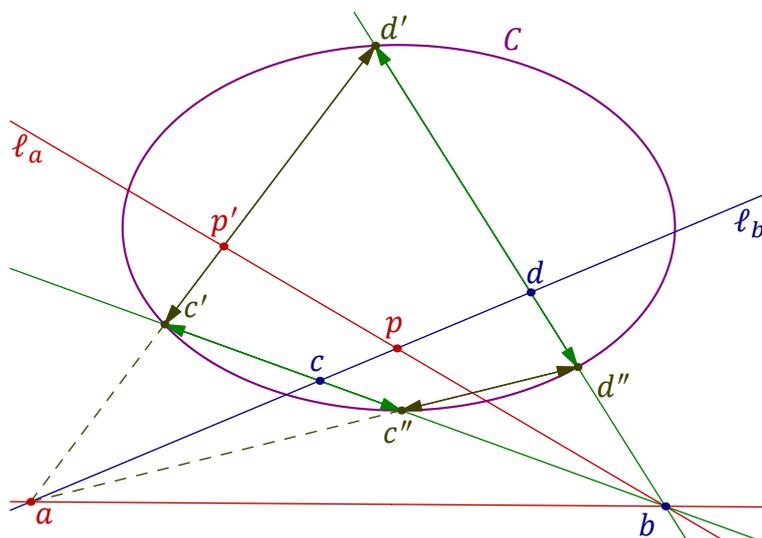


Рис. 19.1. Инволюции с центрами в сопряжённых точках перестановочны.

¹См. н° 18.3.2 на стр. 227.

Пример 19.1 (пары коммутирующих инволюций)

Покажем, что инволюции¹ $\sigma_a, \sigma_b : C \simeq C$ гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$, задаваемые двумя сопряжёнными относительно этой коники точками $a, b \in \mathbb{P}_2 \setminus C$, коммутируют друг с другом. Обозначим через ℓ_a и ℓ_b поляры точек a и b , см. рис. 19◊1. Точки c' и d' , высекаемые из коники C произвольной прямой $\ell' \ni a$, гармоничны точкам a и $p' = \ell' \cap \ell_a$. Поскольку перспектива $b : \ell_b \simeq \ell'$ сохраняет двойные отношения, равенство $\sigma_a(c') = d'$ на прямой ℓ' равносильно тому, что точки $c = \ell_b \cap (bc')$ и $d = \ell_b \cap (bd')$ переводятся друг в друга инволюцией $\sigma_{ap} : \ell_b \simeq \ell_b$ с неподвижными точками a и $p = \ell_b \cap \ell_a$. Пусть $c'' = C \cap (bc')$ и $\ell'' = (ac'')$. Тогда прямая ℓ'' пересекает конику C и прямую (bd') в одной и той же точке d'' , однозначно характеризующей тем, что $[a, p'', c'', d''] = -1$, где $p'' = \ell'' \cap \ell_a$. Тем самым, одновременное выполнение равенств $\sigma_a(c') = d'$ и $\sigma_a(c'') = d''$ равносильно одновременному выполнению равенств $\sigma_b(c') = c''$ и $\sigma_b(d') = d''$.

Упражнение 19.6. Убедитесь, что и наоборот, центры $a, b \in \mathbb{P}_2$ любых двух перестановочных друг с другом инволюций $\sigma_a, \sigma_b : C \simeq C$ непустой гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$ сопряжены друг другу относительно C .

19.1.3. Двойственная квадрика. Поляритет $\bar{g} : \mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n^\times$ неособой квадрики $G = V(g) \subset \mathbb{P}_n$ с матрицей Грама Γ переводит всякую квадрику $F = V(f) \subset \mathbb{P}_n$ с матрицей Грама Φ в квадрику $F_G^\times \subset \mathbb{P}_n^\times$ того же ранга, что и квадрика F , имеющую в двойственном базисе пространства \mathbb{P}_n^\times матрицу Грама $\Gamma^{-1}\Phi\Gamma^{-1}$. В самом деле, квадрика F_G^\times состоит из всех таких ковекторов $\xi = \Gamma x$, что $x^t \Phi x = 0$. Подставляя в последнее равенство $x = \Gamma^{-1}\xi$ и учитывая, что $\Gamma^t = \Gamma$, получаем $F_G^\times = \{\xi \in \mathbb{P}_n^\times \mid \xi^t \Gamma^{-1} \Phi \Gamma^{-1} \xi = 0\}$. Применяя это наблюдение к самой квадрике G , т. е. полагая $\Phi = \Gamma$, получаем

Предложение 19.2 (двойственная квадрика)

Касательные пространства к гладкой квадрике $G \subset \mathbb{P}_n$ образуют в \mathbb{P}_n^\times гладкую квадрику G^\times . Матрицы Грама квадрик G и G^\times в двойственных базисах пространств \mathbb{P}_n и \mathbb{P}_n^\times обратны друг другу. \square

Следствие 19.1

Две гиперплоскости $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}_n$ тогда и только тогда сопряжены² относительно гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$, когда они гармоничны в порождённом ими пучке гиперплоскостей³ двум касательным гиперплоскостям к квадрике Q , проходящим через $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно к предл. 19.1 на стр. 233. \square

Следствие 19.2 (теорема Брианшона)

Шестиугольник p_1, p_2, \dots, p_6 тогда и только тогда описан вокруг некоторой гладкой коники, когда его главные диагонали $(p_1 p_4), (p_2 p_5), (p_3 p_6)$ пересекаются в одной точке, см. рис. 19◊3 на стр. 235.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно к теореме Паскаля⁴. \square

¹См. прим. 18.5 на стр. 229.

²Напомним, что это означает, что каждая из них содержит полюс другой, см. п° 19.1.2 на стр. 233.

³Т. е. в пучке гиперплоскостей, проходящих через $(n - 2)$ -мерную плоскость $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

⁴См. теор. 18.3 на стр. 223 и прим. 18.6 на стр. 230.

Пример 19.2 (коника, касающаяся пяти прямых)

Из предл. 17.4 на стр. 216 вытекает, что каждые пять прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, касаются единственной гладкой коники. Эта коника двойственна к гладкой конике, проходящей через пять точек двойственной плоскости, двойственных к заданным пяти прямым.

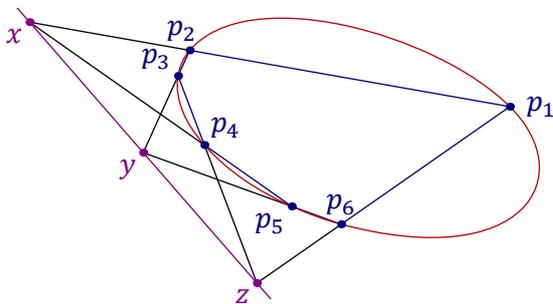


Рис. 19◊2. Вписанный шестиугольник.

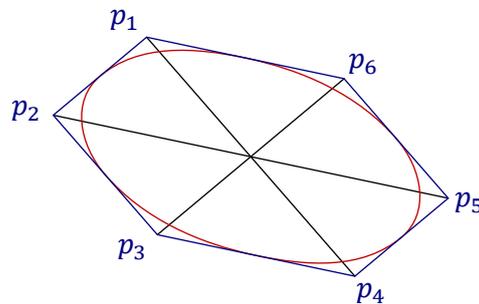


Рис. 19◊3. Описанный шестиугольник.

Пример 19.3 (задание гомографии касательными к конике)

Пусть гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между двумя различными прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}^2$ переводит три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$, отличные от точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$, соответственно, в точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. При этом возникают две возможности, показанные на рис. 19◊4 и рис. 19◊5: либо соединяющие соответственные точки три прямые $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ пересекаются в одной точке p , либо нет. Первое означает, что гомография φ является перспективой¹ с центром в p , и это равносильно равенству $\varphi(q) = q$. Во втором случае никакие три из пяти прямых $\ell_1, \ell_2, (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ не пересекаются в одной точке и, как мы видели в прим. 19.2, существует единственная гладкая коника C , касающаяся всех этих пяти прямых. Преобразование $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, переводящее точку $x \in \ell_1$ в точку пересечения прямой ℓ_2 с отличной от ℓ_1 касательной, опущенной из x на C , является гомографией, ибо оно биективно и рационально. В самом деле, коэффициенты уравнений касательных, опущенных из x на C , суть координаты точек пересечения двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ с прямой $x^\times = \text{App}(x)$. Одна из этих точек, задающая прямую ℓ_1 , известна. Поэтому вторая рационально через неё выражается. Поскольку C и φ одинаково действуют на a_1, b_1, c_1 , гомография $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ совпадает φ . Образом и прообразом точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$ в этом случае являются точки пересечения $\ell_2 \cap C$ и $\ell_1 \cap C$ соответственно.

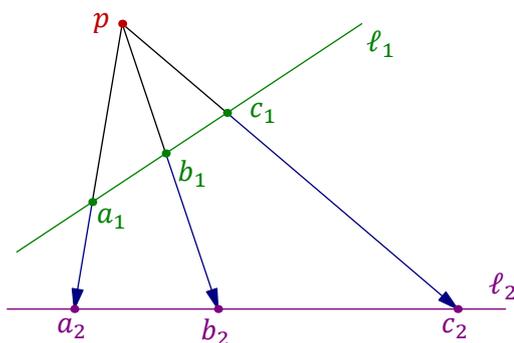


Рис. 19◊4. Перспектива $p : \ell_1 \rightarrow \ell_2$.

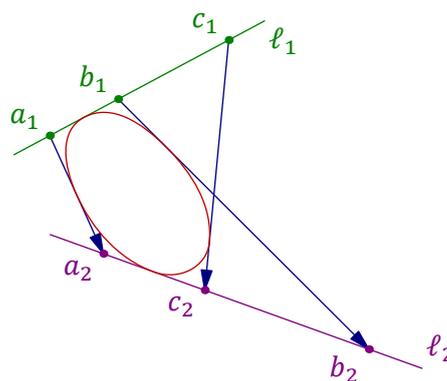


Рис. 19◊5. Гомография $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$.

¹См. прим. 18.1 на стр. 218.

Итак, каждая гомография $\ell_1 \simeq \ell_2$ либо является перспективой, либо высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике. Обратите внимание, что это описание двойственно [предл. 18.2](#) на стр. 224, и что центр перспективы p и коника C однозначно определяются гомографией $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$.

Предложение 19.3 (теорема о вписанно-описанных треугольниках)

Два треугольника $a_1 b_1 c_1$ и $a_2 b_2 c_2$ вписаны в одну и ту же гладкую конику C' если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники C'' .

Доказательство. Пусть точки $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ лежат на конике C' , как на [рис. 19◊6](#). Рассмотрим прямые $\ell_1 = (a_1 b_1), \ell_2 = (a_2 b_2)$ и обозначим через $c_2 : \ell_1 \simeq C'$ и $c_1 : C' \simeq \ell_2$ проекцию прямой ℓ_1 из точки c_2 на конику C' и проекцию коники C' на прямую ℓ_2 из точки c_1 . Их композиция $c_1 \circ c_2 : \ell_1 \simeq \ell_2$ переводит $a_1 \mapsto a'_2, b'_1 \mapsto b_2, a'_1 \mapsto a_2, b_1 \mapsto b'_2$ и является неперспективной гомографией, а значит, задаётся семейством касательных к некоторой гладкой конике C'' , вписанной в оба треугольника $a_1 b_1 c_1$ и $a_2 b_2 c_2$. Обратная импликация проективно двойственна доказанной. \square

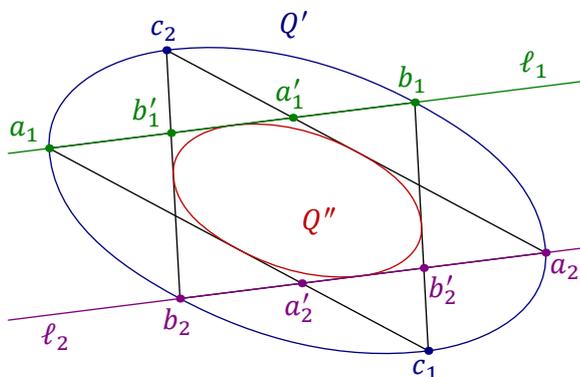


Рис. 19◊6. Вписанно-описанные треугольники.

Следствие 19.3 (поризм Понселе для треугольников)

Если пара коник C' и C'' такова, что существует треугольник $a_1 b_1 c_1$, одновременно вписанный в C' и описанный около C'' , то аналогичный треугольник $a_2 b_2 c_2$, одновременно вписанный в C' и описанный около C'' , можно нарисовать стартовав с любой точки $a_2 \in C' \setminus C''$.

Доказательство. В самом деле, проведём из a_2 две касательные $(a_2 b_2)$ и $(a_2 c_2)$ к конике C'' до их пересечения с C' в точках $b_2, c_2 \in C'$, как на [рис. 19◊6](#). По [предл. 19.3](#), треугольники $a_1 b_1 c_1$ и $a_2 b_2 c_2$ описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых $(ab), (bc), (ca), (a_2 b_2), (a_2 c_2)$, эта коника и есть C'' . \square

19.1.4. Гармонически описанная квадрика. Скажем, что набор из $(n + 1)$ точек

$$p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_n$$

является *автополярным симплексом* гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$, если полярной каждой из точек p_i является гиперплоскость, порождённая остальными n точками p_v с $v \neq i$. На алгебраическом языке это означает, что векторы p_i образуют ортогональный базис квадратичной формы q , задающей квадрику Q . Квадрика Q' называется *гармонически описанной* около гладкой квадрики Q , если она проходит через вершины какого-нибудь автополярного симплекса квадрики Q .

ТЕОРЕМА 19.2

Пусть основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто. Квадрика $Q' = V(f)$ с матрицей Грама F гармонически описана около гладкой квадрики $Q = V(g)$, имеющей в том же базисе матрицу Грама G , если и только если $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$, и в этом случае каждая точка $p \in Q' \setminus Q$ является вершиной автополярного относительно Q симплекса, вписанного в квадрику Q' .

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Матрица $G^{-1}F$ является матрицей такого единственного линейного оператора $\varphi: V \rightarrow V$, что $\tilde{f}(u, w) = \tilde{g}(u, \varphi w)$ для всех $u, w \in V$, см. п° 14.2.4 на стр. 173. Поэтому $\text{tr}(G^{-1}F)$ зависит только от квадратичных форм f и g , а не от базиса, в котором пишутся матрицы Грама. В базисе из векторов p_i , образующих вершины автополярного относительно Q симплекса, вписанного в Q' , матрица Грама G формы g диагональна с ненулевыми диагональными элементами, а все диагональные элементы матрицы Грама F формы f нулевые. Поэтому все диагональные элементы матрицы $G^{-1}F$ тоже нулевые, и $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$.

Покажем индукцией по n , что при выполнении условия $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$ выполняется последнее утверждение теоремы. При $n = 1$ выберем в V базис e_0, e_1 с $f(e_0) = 0$ и $\tilde{g}(e_0, e_1) = 0$. Тогда

$$G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

и условие $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$ влечёт равенство $c = 0$, откуда $f(x_0, x_1) = 2bx_0x_1$ и $Q' = \{e_0, e_1\}$, как и требуется. При $n \geq 2$ рассмотрим точку $e_0 \in Q' \setminus Q$ и обозначим через $H \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ полярю этой точки относительно квадрики Q . Для любого базиса e_1, \dots, e_n в H матрицы Грама форм f и g в базисе e_0, e_1, \dots, e_n имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G_H & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & & & \\ \vdots & & F_H & \\ * & & & \end{pmatrix},$$

где F_H и G_H суть матрицы Грама квадрик $Q' \cap H$ и $Q \cap H$ в базисе e_1, \dots, e_n . Следовательно, число c и матрица G_H обратимы, квадрика $Q \cap H$ гладкая, а

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G_H^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Поэтому равенство $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$ влечёт равенство $\text{tr}(G_H^{-1}F_H) = 0$, и по индукции любая точка $p_1 \in (Q' \cap H) \setminus (Q \cap H)$ является вершиной автополярного относительно $Q \cap H$ симплекса $p_1 p_2 \dots p_n$, вписанного в $Q' \cap H$. Симплекс $e_0 p_1 p_2 \dots p_n$ автополярен относительно Q и вписан в Q' . \square

ПРИМЕР 19.4 (ОБЩИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ КВАДРИК)

Всякая гиперплоскость в пространстве $\mathbb{P}(S^2 V^*)$ квадрик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ задаётся однородным линейным уравнением вида

$$0 = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \text{tr} AB, \quad (19-1)$$

где $A = (a_{ij})$ — постоянная симметрическая матрица коэффициентов уравнения гиперплоскости, а $B = (b_{ij})$ переменная симметрическая матрица координат в пространстве S^2V^* . Матрицу A можно воспринимать как матрицу Грама некоей фиксированной квадрики $Q_A \subset \mathbb{P}_n$. Если эта квадрика гладкая¹, то уравнение (19-1) задаёт гиперплоскость, состоящую из всех квадрик, гармонически описанных около квадрики Q_A^\times с матрицей Грама A^{-1} .

19.2. Подпространства, лежащие на гладкой квадрике. Ортогональная группа невырожденной квадратичной формы $q \in S^2V^*$ действует на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$, переводя гладкую квадрику $Q = V(q)$ в себя. Согласно сл. 15.2 на стр. 182, это действие позволяет перевести любое проективное подпространство $L \subset Q$ в любое другое подпространство $L' \subset Q$ той же размерности. В частности, ортогональная группа транзитивно действует на точках квадрики и для любых точек $p_1, p_2 \in Q$ биективно отображает множество k -мерных подпространств $L \subset Q$, проходящих через p_1 , в аналогичное множество k -мерных подпространств $L' \subset Q$, проходящих через p_2 .

19.2.1. Планарность. Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на гладкой квадрике Q , называется *планарностью* квадрики Q . Планарность пустой квадрики, задаваемой анизотропной квадратичной формой, по определению полагается равной -1 . Квадрики планарности 0 суть непустые квадрики, не содержащие прямых. Через каждую точку m -планарной квадрики можно провести m -мерное проективное подпространство, целиком лежащее на квадрике, и никакое $(m + 1)$ -мерное проективное подпространство на такой квадрике не лежит.

Согласно сл. 15.3 на стр. 183, уравнение гладкой квадрики $Q = V(q)$ в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ в подходящих однородных координатах записывается в виде

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n), \quad (19-2)$$

где $-1 \leq m \leq (n + 1)/2$,

где α — анизотропная квадратичная форма от $n - 2m - 1$ переменных, а число $2m + 2$ равно размерности гиперболического слагаемого в разложении пространства V в прямую ортогональную относительно формы \tilde{q} сумму гиперболического и анизотропного подпространств. Таким образом, максимум размерностей изотропных относительно формы \tilde{q} векторных подпространств в V равен $m + 1$ и, стало быть, планарность квадрики (19-2) равна m . В частности, квадрики вида (19-2) с разными m не могут быть переведены одна в другую проективным преобразованием.

Пример 19.5 (квадрики максимальной планарности)

Максимально возможная планарность квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ равна $(n - 1)/2$ при нечётном n и $(n - 2)/2$ при чётном n . Над алгебраически замкнутым полем все невырожденные квадрики имеют максимальную планарность. Над любым полем уравнение квадрики максимальной планарности в \mathbb{P}_n в подходящих однородных координатах записывается в виде

$$0 = x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} \text{ при } n = 2m + 1, \quad (19-3)$$

$$x_0^2 = x_1x_{m+1} + x_2x_{m+2} + \dots + x_mx_{2m} \text{ при } n = 2m. \quad (19-4)$$

Поэтому все квадрики максимальной планарности переводятся друг в друга проективными преобразованиями. Например, все непустые гладкие коники на \mathbb{P}_2 проективно конгруэнтны.

¹Что так в общем случае.

Предложение 19.4

Сечение гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ произвольной гиперплоскостью Π либо является гладкой квадрикой в этой гиперплоскости, либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$. Последнее равносильно тому, что $\Pi = T_p Q$ касается квадрики в точке p , и в этом случае $Q \cap T_p$ является конусом с вершиной в p над гладкой квадрикой на единицу меньшей планарности и на два меньшей размерности, чем у Q , расположенной в $(n - 2)$ -мерной плоскости, дополнительной к p внутри $T_p Q$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $\Pi = \mathbb{P}(W)$ и $Q = V(q)$. Ядро ограничения оператора корреляции $\hat{q} : V \simeq V^*$ на подпространство $W \subset V$ является пересечением W с одномерным подпространством $W^\perp \subset V$. Это пересечение либо нулевое, либо является точкой $p \in \Pi$. В первом случае квадрика $Q \cap \Pi$ невырождена, а во втором случае — имеет единственную особую точку p , причём $\Pi = \mathbb{P}(p^\perp)$ является касательным пространством¹ к Q в точке p . Согласно теор. 17.1 на стр. 208, особая квадрика $Q \cap \Pi$ в пространстве $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ является линейным соединением точки p и неособой квадрики, лежащей в любой не проходящей через p гиперплоскости $\mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}_{n-2} \subset \Pi$. Так как ограничение квадратичной формы q на подпространство $U \subset V$ невырождено, имеется ортогональное разложение $V = U \oplus U^\perp$. Ограничение формы q на двумерное пространство U^\perp невырождено, и в U^\perp есть изотропная прямая $p \subset U^\perp$. Следовательно, $U^\perp \simeq H_2$ является гиперболической плоскостью, и размерность гиперболической составляющей ограничения $q|_U$ на два меньше, чем у самой формы q на V , т. е. планарность гладкой квадрики $Q \cap \mathbb{P}(U)$ на единицу меньше, чем у Q . \square

19.3. Классификация проективных квадрик. Две квадрики называются *проективно конгруэнтными*, если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства. Поскольку над алгебраически замкнутым полем уравнение квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ всегда приводится линейной заменой координат к виду

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0, \quad \text{где } r = \text{rk } Q = n - \dim \text{Sing } Q,$$

мы заключаем, что над алгебраически замкнутым полем две квадрики проективно конгруэнтны тогда и только тогда, когда у них одинаковый ранг.

В теор. 17.1 на стр. 208 мы видели, что над любым полем каждая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ является линейным соединением своего пространства особых точек $\text{Sing } Q$ и неособой квадрики $Q \cap L$ в любом дополнительном к $\text{Sing } Q$ проективном подпространстве $L \subset \mathbb{P}_n$, $L \cap \text{Sing } Q = \emptyset$, $\dim L = \text{rk } Q - 1$. Так как любая пара дополнительных подпространств переводится в любую другую такую пару проективным автоморфизмом, классификация квадрик над произвольным полем сводится к классификации гладких квадрик.

Гладкие квадрики разной планарности, очевидно, не могут быть проективно конгруэнтны. В прим. 19.5 мы видели, что над произвольным полем все квадрики максимально возможной в \mathbb{P}_n планарности $[(n - 1)/2]$ проективно конгруэнтны. Уравнение непустой квадрики не максимальной планарности m в подходящих координатах приводится к виду (19-2):

$$x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2m} x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n),$$

где α — ненулевая анизотропная форма, и классификация таких квадрик над произвольным полем \mathbb{k} требует описания имеющихся над \mathbb{k} анизотропных квадратичных форм. Для многих

¹См. формулу (17-5) на стр. 208.

полей, например, для поля \mathbb{Q} , множество классов анизотропных форм с точностью до изоморфизма представляется на сегодняшний день совершенно необозримым. Но над теми полями, где есть эффективное описание анизотропных форм, можно дать и полную классификацию проективных квадрик.

19.3.1. Вещественные квадрики. Над полем \mathbb{R} при каждом $k \in \mathbb{N}$ есть единственная с точностью до изометрии и умножения на константу анизотропная форма от k переменных:

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2.$$

Поэтому каждая гладкая вещественная квадрика размерности n , лежащая в $(n + 1)$ -мерном пространстве $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$, в подходящих однородных координатах задаётся уравнением

$$x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2m} x_{2m+1} = x_{2m+2}^2 + x_{2m+3}^2 + \dots + x_{n+1}^2, \quad (19-5)$$

где $-1 \leq m \leq n/2$.

При разных m эти уравнения задают проективно неконгруэнтные квадрики разной планарности. Поэтому формула (19-5) доставляет полный список парно неконгруэнтных гладких вещественных квадрик. Мы будем обозначать квадрику (19-5) через $Q_{n,m}$ и называть вещественной m -планарной квадрикой размерности n . Планарность m , размерность n и абсолютная величина индекса¹ ι квадратичной формы, задающей вещественную квадрику, связаны равенством

$$n = 2m + \iota.$$

В ортогональном базисе уравнение квадрики $Q_{n,m}$ принимает вид

$$t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_m^2 = t_{m+1}^2 + t_{m+2}^2 + \dots + t_{n+1}^2.$$

Гиперболические координаты x_ν связаны с ортогональными координатами t_ν формулами

$$x_{2i} = t_{m+i} + t_i, \quad x_{2i+1} = t_{m+i} - t_i \quad \text{при } 0 \leq i \leq m$$

и $x_j = t_j$ при $2m + 2 \leq j \leq n + 1$.

Квадрика планарности 0 задаётся в ортогональных координатах уравнением

$$t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2$$

и называется *эллиптической*. Она непуста и не содержит прямых. Квадрики положительной планарности традиционно называют *гиперболическими*, не смотря на то, что гиперболической формой задаётся всего одна из них — чётномерная квадрика максимальной планарности $Q_{2k,k}$. Все (-1) -планарные квадрики пусты. Из [предл. 19.4](#) на стр. 239 вытекает

Следствие 19.4

Пересечение гладкой вещественной n -мерной m -планарной квадрики $Q_{n,m}$ с касательной гиперплоскостью в точке p является конусом с вершиной в p над гладкой квадрикой $Q_{n-2,m-1}$ размерности $n - 2$ и планарности $m - 1$. \square

¹См. п.° 15.5 на стр. 186.

19.4. Квадратичные поверхности. Особая квадратичная поверхность минимального ранга 1 в подходящих координатах задаётся уравнением $x_0^2 = 0$ и называется *двойной плоскостью*.

Особая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_3$ ранга 2 является линейным соединением вершинной прямой $\text{Sing } Q$ и гладкой квадрики на любой дополнительной прямой. Если эта гладкая квадрика пуста, то $Q = \text{Sing } Q$ — это прямая, целиком состоящая из особых точек. Такая квадрика называется *двойной прямой*. Над \mathbb{R} двойная прямая задаётся уравнением $x_0^2 + x_1^2 = 0$, а над алгебраически замкнутыми полями таких квадрик не бывает. Если квадрика Q пересекает дополнительную к $\text{Sing } Q$ прямую по двум точкам, то она является объединением двух различных плоскостей, пересекающихся по прямой $\text{Sing } Q$. Такая квадрика называется *распавшейся*. Уравнение распавшейся квадрики является произведением двух различных линейных форм и в подходящих координатах имеет вид $x_0x_1 = 0$.

Особая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_3$ ранга 3 имеет единственную особую точку $s = \text{Sing } Q$ и является линейным соединением этой точки с гладкой коникой в произвольной не проходящей через s плоскости $\Pi \subset \mathbb{P}_3$. Если эта коника пуста, квадрика Q состоит из единственной точки s и называется *двойной точкой*. Над \mathbb{R} двойная точка задаётся уравнением $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, над алгебраически замкнутым полем таких квадрик нет. Если гладкая коника $Q \cap \Pi$ непуста, квадрика Q называется *простым конусом* с вершиной в p . Над любым полем уравнение такой квадрики приводится к виду $x_1^2 = x_0x_2$, и её вершина в этих координатах находится в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$.

Упражнение 19.7. Покажите, что каждая лежащая на простом конусе прямая проходит через его вершину.

Гладкая квадратичная поверхность $Q \subset \mathbb{P}_3$ либо пуста, либо 0-планарна, либо 1-планарна. Не содержащая прямых непустая квадрика планарности нуль задаётся уравнением

$$x_0x_1 = \alpha(x_2, x_3),$$

где α — анизотропная квадратичная форма от двух переменных. Классификация таких квадрик требует описания бинарных анизотропных квадратичных форм над полем \mathbb{k} . Над \mathbb{R} такая квадрика ровно одна — это эллиптическая квадрика $Q_{2,0}$, уравнение которой можно записать в виде $x_0x_1 = x_2^2 + x_3^2$ или, если угодно, в виде $t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$.

19.4.1. Гладкая квадратичная поверхность планарности один. Над любым полем все гладкие квадратичные поверхности планарности 1 проективно конгруэнтны. Удобной геометрической моделью такой поверхности является *квадрика Сегре* в проективном пространстве

$$\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k})),$$

задаваемая квадратным уравнением $\det(A) = 0$ и состоящая из матриц ранга 1:

$$Q_S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \mid \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \quad (19-6)$$

Каждый оператор $F : U \rightarrow U$ ранга 1 на двумерном векторном пространстве U имеет одномерный образ, который является точкой на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, и одномерное ядро, аннулятор которого является точкой на $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$. Наоборот, любые ненулевые вектор $v \in U$ и ковектор $\xi \in U^*$ задают на U линейный оператор ранга 1

$$v \otimes \xi : U \rightarrow U, \quad u \mapsto v \cdot \xi(u), \quad (19-7)$$

образ которого порождается вектором v , а аннулятор ядра — ковектором ξ . Оператор (19-7) называется *тензорным произведением* вектора v и ковектора ξ . При умножении v и ξ на ненулевые константы, оператор $v \otimes \xi$ умножается на произведение этих констант. Мы получаем биекцию между точками квадрики Сегре и точками $(v, \xi) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$. Вложение

$$s: \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(\text{End}(U)), \quad (v, \xi) \mapsto v \otimes \xi, \quad (19-8)$$

образом которого является квадрика Сегре, называется *вложением Сегре*.

УПРАЖНЕНИЕ 19.8. Покажите, что касательное пространство к квадрике Сегре в точке $v \otimes \xi$ состоит из таких линейных операторов $f: U \rightarrow U$, что $f(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v$.

Для координатного пространства $U = \mathbb{k}^2$, вектора $x \in \mathbb{k}^2$ с координатами $(x_0 : x_1)$ и ковектора $\xi \in \mathbb{k}^{2*}$ с координатами $(\xi_0 : \xi_1)$ в двойственном базисе оператор $x \otimes \xi$ имеет в стандартном базисе пространства \mathbb{k}^2 матрицу

$$\begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot (\xi_0 \quad \xi_1). \quad (19-9)$$

Точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$ и $(\xi_0 : \xi_1) \in \mathbb{P}_1^\times$ восстанавливаются по заданной матрице ранга 1 как отношение между её строками и отношение между её столбцами соответственно, и для любых двух заданных таких отношений матрица (19-9) является единственной с точностью до пропорциональности матрицей, в которой эти отношения реализуются.

УПРАЖНЕНИЕ 19.9. Обязательно убедитесь во всём этом этом!

Матрицы с предписанным отношением строк $x = (x_0 : x_1)$ составляют двумерное векторное подпространство в $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k})$. Его проективизация является образом «вертикальной» координатной прямой $x \times \mathbb{P}_1^\times \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ при вложении (19-8) и представляет собою лежащую на квадрике Сегре прямую в \mathbb{P}_3 . Аналогично, каждая «горизонтальная» координатная прямая $\mathbb{P}_1 \times \xi \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ переводится вложением (19-8) в лежащую на квадрике Сегре прямую, образованную классами пропорциональных матриц ранга 1 с фиксированным отношением столбцов $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$. Поскольку отображение (19-8) является биекцией между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ и квадрикой Сегре, мы приходим к следующему заключению.

Предложение 19.5

Квадратичная поверхность планарности 1 в \mathbb{P}_3 над произвольным полем \mathbb{k} замечается двумя семействами прямых так, что любые две прямые из одного семейства не пересекаются, любые две прямые из разных семейств пересекаются, каждая точка квадрики является точкой пересечения двух прямых из разных семейств, и каждая лежащая на квадрике прямая принадлежит ровно одному из семейств.

Доказательство. Проверки требует лишь последнее утверждение, означающее, что на квадрике Сегре не лежит никаких других прямых кроме образов координатных прямых произведения $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ при отображении (19-8). Лежащая на квадрике Q_S прямая ℓ содержится в пересечении этой квадрики с касательной плоскостью $T_p Q_S$, построенной в любой точке $p \in \ell$. Пересечение $Q_S \cap T_p Q_S$ является коникой в плоскости $T_p Q_S$ и содержит пару проходящих через p прямых из разных семейств. Тем самым, это распавшаяся коника, состоящая ровно из этих двух прямых, и прямая ℓ — одна из них. \square

Упражнение 19.10. Покажите, что гомография $\varphi : \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$, задаваемая не лежащей на квадрике Q_S точкой $\varphi \in \mathbb{P}(\text{End}(U))$, переводит точку $p \in \mathbb{P}(U)$ в такую точку $q \in \mathbb{P}(U)$, что плоскость, порождённая точкой φ и прямолинейной образующей $\mathbb{P}_1 \times p^\times \subset Q_S$, пересекает квадрику Q_S по этой образующей и образующей $q \times \mathbb{P}_1^\times$.

Предложение 19.6

Любые три прямые $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset \mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике. Если прямые попарно не пересекаются, то проходящая через них квадрика единственна, невырождена, 1-планарна и является объединением всех прямых, пересекающих каждую из прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 .

Доказательство. Квадрики в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Так как любые 9 гиперплоскостей в \mathbb{P}_9 пересекаются, через любые 9 точек в \mathbb{P}_3 можно провести квадрику. Выбирая на каждой из прямых по 3 различные точки и проводя через эти точки квадрику, заключаем, что она целиком содержит все три прямые, а также любую прямую, пересекающую каждую из прямых ℓ_i в трёх разных своих точках. Поскольку ни на какой особой квадрике нет трёх попарно непересекающихся прямых, построенная квадрика гладкая и 1-планарная, если $\ell_i \cap \ell_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. В этом случае все три прямые ℓ_i лежат в одном семействе прямолинейных образующих, и каждая прямая из второго семейства образующих пересекает каждую из прямых ℓ_i . \square

Упражнение 19.11. Сколько прямых в \mathbb{P}_3 пересекает каждую из четырёх заданных прямых? Перечислите все возможные над полями \mathbb{R} и \mathbb{C} ответы. Какие из них устойчивы к малым шевелениям заданных прямых?

19.5. Квадрика Плюккера в \mathbb{P}_5 и прямые в \mathbb{P}_3 . Множество всех k -мерных векторных подпространств в фиксированном n -мерном векторном пространстве называется *грассманианом* $\text{Gr}(k, n)$. Например, проективное пространство $\mathbb{P}_n = \text{Gr}(1, n+1)$, а двойственное ему пространство гиперплоскостей $\mathbb{P}_n^\times = \text{Gr}(n, n+1)$. Простейшим отличным от проективного пространства грассманианом является $\text{Gr}(2, 4)$. Его точки суть двумерные векторные подпространства в векторном пространстве $V \simeq \mathbb{k}^4$ или, что то же самое, проективные прямые в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. Он вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ отображением Плюккера

$$\mathbb{p} : \text{Gr}(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V), \quad U \mapsto \Lambda^2U, \quad (19-10)$$

которое переводит прямую $(ab) \subset \mathbb{P}_3$, являющуюся проективизацией двумерного векторного подпространства $U \subset V$ с базисом a, b , в одномерное подпространство $\Lambda^2U \subset \Lambda^2V$, порождённое грассмановым произведением $a \wedge b$.

Упражнение 19.12. Убедитесь, что отображение (19-10) инъективно.

Согласно сл. 16.2 на стр. 194, разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega \in \Lambda^2V$ на два линейных множителя равносильна тому, что $\omega \wedge \omega = 0$. Это соотношение задаёт в пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ квадрику Плюккера

$$P = V(q) = \{ \omega \in \Lambda^2V \mid \omega \wedge \omega = 0 \}, \quad (19-11)$$

которая является множеством изотропных векторов билинейной формы $\tilde{q} : \Lambda^2V \times \Lambda^2V \rightarrow \mathbb{k}$, однозначно с точностью до пропорциональности определяемой тем, что для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2V$ в одномерном векторном пространстве Λ^4V выполняется равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad (19-12)$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V . Поскольку однородные грассмановы многочлены степени два коммутируют друг с другом, эта билинейная форма симметрична.

Упражнение 19.13. Убедитесь, что задаваемая равенством (19-12) форма \tilde{q} билинейна и невырождена, а при выборе другого базиса в V она умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из шести мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

В координатах x_{ij} относительно стандартного базиса из мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$, $1 \leq i < j \leq 4$, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ для бивектора $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$ принимает вид

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0, \quad (19-13)$$

а отображение (19-10) переводит прямую (ab) , порождённую векторами a, b , строки координат которых в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 составляют 2×4 матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

в грассманову квадратичную форму $a \wedge b$ с координатами $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$, равными 2×2 минорам этой матрицы.

Упражнение 19.14. Убедитесь в этом и выясните, существует ли комплексная 2×4 -матрица, шесть 2×2 -миноров которой, выписанные в случайном порядке, суть а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$? Если да, то предъявите такую матрицу явно.

Поскольку квадратичная форма (19-13) гиперболическая, квадрика (19-11) 2-планарна. Таким образом, любая 2-планарная квадрика в \mathbb{P}_5 над любым полем отличной от 2 характеристики может восприниматься как множество прямых в подходящем пространстве \mathbb{P}_3 .

Лемма 19.1

Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются если и только если их плюккеровы образы ортогональны относительно квадратичной формы (19-12).

Доказательство. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4 , что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $\mathbb{P}(\ell_1) \wedge \mathbb{P}(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a , то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $\mathbb{P}(\ell_1) \wedge \mathbb{P}(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. \square

Следствие 19.5

Для любой точки $p = \mathbb{P}(\ell) \in P$ пересечение $P \cap T_p P = \{\mathbb{P}(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \emptyset\}$.

19.5.1. Связки и пучки прямых в \mathbb{P}_3 . Множество прямых в \mathbb{P}_3 называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $p_i = \mathbb{P}(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом

$$\pi = T_{p_1} P \cap T_{p_2} P \cap T_{p_3} P \subset P.$$

По лем. 19.1 и сл. 19.5 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, пересекающих каждую из трёх попарно пересекающихся прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в \mathbb{P}_3 . Три прямые в \mathbb{P}_3 попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, есть два геометрически разных типа связок прямых на \mathbb{P}_3 :

α -плоскость $\pi_\alpha(O) \subset P$, состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$

β -плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$, состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$.

Мы заключаем, что пюккерова квадрика замечается двумя семействами плоскостей разного типа так, что любые две плоскости одного типа всегда пересекаются ровно по одной точке

$$\begin{aligned} \pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) &= \mathbb{P}(\Pi_1 \cap \Pi_2) \\ \pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) &= \mathbb{P}((O_1 O_2)), \end{aligned}$$

а две плоскости $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(O)$ разных типов не пересекаются при $O \notin \Pi$, а при $O \in \Pi$ пересекаются по прямой, которая является пюккеровым образом пучка прямых, лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $O \in \Pi$. Покажем, что все прямые, лежащие на квадрике Пюккера, имеют такой вид. Для этого рассмотрим конус $C = P \cap T_p P$ с вершиной p , образованный всеми лежащими на квадрике P прямыми, проходящими через точку p , и зафиксируем какое-нибудь не содержащее p трёхмерное проективное подпространство $H \subset T_p P$, см. рис. 19◊7. Пересечение $G = C \cap H$ является гладкой 1-планарной квадрикой в H , и любая проходящая через p прямая на P имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$ для некоторой точки $p' \in G$ и плоскостей π_α, π_β натянутых на точку p и пару проходящих через p' прямолинейных образующих квадрики G .

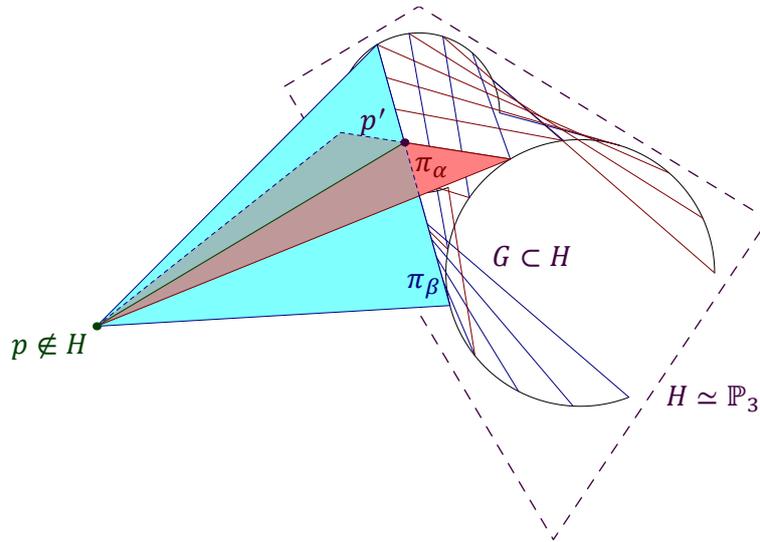


Рис. 19◊7. Конус $C = P \cap T_p P$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 19.3. Возьмём произвольную точку $p_0 \in Q$ и любую не проходящую через p_0 гиперплоскость $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$, пересекающую Q по гладкой квадрике $Q' = \Pi \cap Q$ (убедитесь, что при $n \geq 2$ это возможно¹). Выберем на Q' линейно независимые точки p_1, \dots, p_n и проведём через p_0 прямую, пересекающую гиперплоскость Π вне квадрики Q' и $n+1$ плоскостей размерности $n-2$, высекаемых из Π касательной гиперплоскостью $T_{p_0}Q$ и n гиперплоскостями, натянутыми на точку p_0 и все точки p_i , без какой-нибудь одной². Эта прямая пересечёт квадртку Q в точке p_{n+1} , которая не лежит в одной гиперплоскости ни с какими n из точек p_0, \dots, p_n .

Упр. 19.4. Построим поляры³ каких-нибудь двух точек a, b , лежащих на данной прямой ℓ вне очерчиваемого окружностью круга. Точка их пересечения будет полюсом прямой (ab) . Поляра лежащей внутри круга точки — это прямая, проходящая через полюса произвольной пары прямых, пересекающихся в этой точке.

Упр. 19.5. Пересечение квадртки Q с прямой (cd) задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса c, d квадратичной формой $q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d)$, поляризация которой

$$\tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2} (\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d)).$$

Условие сопряжённости $\tilde{q}(a, b) = 0$ означает, что $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$, т. е. $[a, b, c, d] = -1$.

Упр. 19.7. Если прямая $\ell \subset Q$ не проходит через s , то порождённая прямой ℓ и точкой s плоскость целиком лежит на квадртке Q и пересекает плоскость Π по прямой, что невозможно, так как гладкая коника $Q \cap \Pi$ не содержит прямых.

Упр. 19.8. Базисом пространства $T_{v \otimes \xi}$ являются операторы $v \otimes \xi, u \otimes \xi$ и $v \otimes \eta$, где $u \in U$ и $\eta \in U^*$ суть любые вектор и ковектор, не пропорциональные v и ξ соответственно. Применение любого из этих операторов к вектору $w \in \text{Ann } \xi$ даёт либо 0, либо вектор, пропорциональный v . Поскольку операторы $F : U \rightarrow U$ со свойством $F(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v$ тоже составляют трёхмерное векторное пространство, последнее совпадает с $T_{v \otimes \xi}$.

Упр. 19.11. Над \mathbb{C} устойчивый ответ — две, над \mathbb{R} — две или ни одной. При специальном расположении четырёх заданных прямых их могут пересекать ровно одна или бесконечно много прямых. Рассмотрите множество всех прямых, пересекающих первые три данные прямые, и выясните, как эта квадртка взаимодействует с четвёртой данной прямой.

¹См. предл. 19.4 на стр. 239.

²Это можно сделать, поскольку произведение квадратичной формы, задающей квадртку Q' , и $n+1$ линейных форм, задающих гиперплоскости, является ненулевым многочленом от однородных координат в гиперплоскости Π и над бесконечным полем не может тождественно обращаться в нуль во всех точках этой гиперплоскости.

³См. рис. 18◊14 на стр. 231.