

§16. Кососимметричные билинейные и грассмановы квадратичные формы

16.1. Симплектические пространства. Согласно теореме Дарбу¹, каждое векторное пространство с невырожденной кососимметричной формой изометрически изоморфно координатному пространству \mathbb{k}^{2n} , на котором форма имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

как в [прим. 14.3](#) на стр. 170. Мы будем называть такие пространства *симплектическими* и обозначать Ω_{2n} по аналогии с гиперболическими пространствами H_{2n} .

УПРАЖНЕНИЕ 16.1. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма $\Omega_{2m} \dot{+} \Omega_{2k}$ изометрически изоморфна $\Omega_{2(m+k)}$.

Прямым аналогом [предл. 15.1](#) на стр. 178 является следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.1

Каждое изотропное подпространство U невырожденной кососимметричной формы ω на пространстве V содержится в некотором симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2 \dim U$, и любой базис в U дополняется² до симплектического базиса в W .

Доказательство. Выберем в U базис u_1, u_2, \dots, u_m , дополним его до базиса в V и рассмотрим двойственный к нему относительно ω базис. Первые m векторов $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$ этого двойственного базиса удовлетворяют равенствам

$$\omega(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (16-1)$$

которые не нарушаются при добавлении к любому из векторов u_j^\vee любой линейной комбинации векторов u_i . Заменяя каждый вектор u_j^\vee вектором

$$w_j = u_j^\vee - \sum_{v < j} \omega(u_j^\vee, u_v^\vee) \cdot u_v, \quad (16-2)$$

получаем набор векторов w_1, w_2, \dots, w_m , также удовлетворяющий равенствам (16-1), но порождающий изотропное подпространство, поскольку для всех $i < j$

$$\omega(w_i, w_j) = \omega(u_i^\vee, u_j^\vee) - \omega(u_j^\vee, u_i^\vee) \cdot \omega(u_i^\vee, u_i) = 0.$$

Таким образом, векторы u_i и w_j с $1 \leq i, j \leq m$ составляют симплектический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве W . □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.1 (ЛАГРАНЖЕВЫ ПОДПРОСТРАНСТВА)

Изотропные подпространства максимальной возможной размерности n в симплектическом пространстве Ω_{2n} называются *лагранжевыми подпространствами*.

¹См. [теор. 14.3](#) на стр. 177.

²Многими способами.

СЛЕДСТВИЕ 16.1

Каждое изотропное подпространство $U \subset \Omega_{2n}$ содержится в некотором лагранжевом подпространстве $L \subset \Omega_{2n}$.

Доказательство. Пусть $\dim U = k$. Тогда U содержится в некотором симплектическом подпространстве $\Omega_{2k} \subset \Omega_{2n}$. Поскольку ограничение симплектической формы ω с Ω_{2n} на Ω_{2k} невырождено, $\Omega_{2n} = \Omega_{2k} \oplus \Omega_{2k}^\perp$ и ограничение формы ω на Ω_{2k}^\perp тоже невырождено, т. е. ортогонал Ω_{2k}^\perp изометрически изоморфен симплектическому подпространству $\Omega_{2(n-k)}$, которое в свою очередь является прямой суммой двух $2(n-k)$ -мерных изотропных подпространств. Прямая сумма любого из них с подпространством U является лагранжевым подпространством, содержащим U . \square

ТЕОРЕМА 16.1

Для каждого лагранжева подпространства $L \subset V$ найдётся такое лагранжево подпространство $L' \subset V$, что $V = L \oplus L'$. При этом каждый базис e подпространства L однозначно достраивается некоторым базисом e' подпространства L' до симплектического базиса пространства V . При фиксированном L' все дополнительные к L лагранжевы подпространства L'' биективно соответствуют линейным операторам $f : L' \rightarrow L$, удовлетворяющим равенству¹

$$\omega(u_1, fu_2) = -\omega(fu_1, u_2) \text{ для всех } u_1, u_2 \in L'.$$

Доказательство. Согласно предл. 16.1 базис e подпространства L достраивается до симплектического базиса в некотором содержащем L симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2 \dim L = \dim V$. Поэтому $W = V$ и в качестве L' можно взять линейную оболочку последних $n = \dim L$ векторов получающегося таким образом симплектического базиса в V . Индуцированное правой корреляцией $\omega^\wedge : V \rightarrow V^*$ отображение

$$\omega_L^\wedge : L' \rightarrow L^*, v \mapsto \omega(*, v)|_L, \quad (16-3)$$

переводящее вектор $v \in L'$ в линейную форму $u \mapsto \omega(u, v)$ на подпространстве $L \subset V$, является изоморфизмом векторных пространств, поскольку переводит любой базис e' подпространства L' , дополняющий базис e в L до симплектического базиса в V , в двойственный к e базис e^* пространства L^* .

УПРАЖНЕНИЕ 16.2. Убедитесь в этом.

Таким образом, базис e' в L' однозначно восстанавливается по e как прообраз двойственного к e базиса в L^* при независимом от выбора базиса изоморфизме (16-3).

Далее, каждое дополнительное к L подпространство $L'' \subset V = L' \oplus L$ биективно проектируется на L' вдоль L , ибо ядро такой проекции равно $L'' \cap L$. Поэтому для любого вектора $u \in L'$ существует единственный такой вектор $f(u) \in L$, что $u + f(u) \in L''$. Правило $u \mapsto f(u)$ задаёт линейное отображение $f : L' \rightarrow L$, графиком которого является подпространство $L'' \subset L' \oplus L$. Таким образом, мы получаем биекцию между линейными отображениями $f : L' \rightarrow L$ и подпространствами $L'' \subset L' \oplus L = V$, которые изоморфно проектируются на L' вдоль L . При этом изотропность такого подпространства $L'' \subset V$ равносильна антисамосопряжённости задаваемого им оператора $f : L' \rightarrow L$, графиком которого является L'' , так как

$$\omega(u_1 + f(u_1), u_2 + f(u_2)) = \omega(u_1, f(u_2)) + \omega(f(u_1), u_2)$$

в силу изотропности подпространств $L' \ni u_1, u_2$ и $L \ni f(u_1), f(u_2)$. \square

¹Такие операторы называются *антисамосопряжёнными* относительно формы ω .

16.2. Грассмановы квадратичные формы. Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен¹ второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ на конечномерном пространстве V над любым полем \mathbb{k} в подходящем базисе \mathbf{e} пространства V может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}. \quad (16-4)$$

Для этого рассмотрим произвольный базис \mathbf{u} и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \dots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2),$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$ и вектор $v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \neq 0$. Перейдём к новому базису \mathbf{v} из векторов $v_i = u_i$ при $i \neq 2$ и вектора v_2 .

УПРАЖНЕНИЕ 16.3. Убедитесь, что это действительно базис.

Подставляя в предыдущую формулу $u_2 = (v_2 - \alpha_3 v_3 - \dots - \alpha_n v_n) / \alpha_2$, получаем

$$\begin{aligned} \omega &= v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \dots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ &= (v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) \end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \mathbb{k}$. Переходя к базису \mathbf{w} из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$, после чего процесс может быть продолжен по индукции.

Следствие 16.2

Над полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в V базис \mathbf{e} , в котором $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$. Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с ненулевым коэффициентом 2, а значит, $\omega \wedge \omega \neq 0$. Таким образом, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ влечёт равенство $\omega = e_1 \wedge e_2$. \square

16.2.1. Поляризация грассмановой квадратичной формы. Напомню², что с каждым базисом $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V связан базис в $\Lambda^2 V$, состоящий из $n(n-1)/2$ грассмановых мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ с $i < j$, и каждый однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ однозначно представляется в виде

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} e_{ij}, \quad \text{где } \omega_{ij} \in \mathbb{k}, \quad (16-5)$$

и суммирование происходит по всем $1 \leq i < j \leq n$. Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, то подобно тому, как это делалось для коммутативных квадратичных форм³, каждое слагаемое в (16-5) можно переписать в виде $\omega_{ij} e_{ij} = \omega'_{ij} e_i \wedge e_j + \omega'_{ji} e_j \wedge e_i$, где $\omega'_{ij} = -\omega'_{ji} = \omega_{ij}/2$. Составленная из чисел ω'_{ij} кососимметричная квадратная матрица $\Omega_e = (\omega'_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ называется *матрицей Грама*

¹См. п° 9.2 на стр. 114.

²См. 9-5 на стр. 114.

³Ср. с п° 15.3 на стр. 182.

грассмановой квадратичной формы ω в базисе e . В терминах матрицы Грама форма ω записывается в виде

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n \omega'_{ij} e_i \wedge e_j = (e \Omega_e) \wedge e^t, \quad (16-6)$$

где в отличие от (16-5) суммирование происходит по всем n^2 парам индексов i, j , а обозначение $A \wedge B$ для матриц A, B , элементами которых являются векторы, предписывает перемножить эти матрицы по обычному правилу, используя в качестве произведения матричных элементов грассманово произведение соответствующих векторов, т. е. в (i, j) -й позиции матрицы $A \wedge B$ стоит вектор $a_{i1} \wedge b_{1j} + a_{i2} \wedge b_{2j} + \dots + a_{in} \wedge b_{nj}$.

При выборе в V другого базиса f , через который базис e выражается по формуле $e = f C_{fe}$, матрица Грама Ω_f грассмановой квадратичной формы ω в базисе f будет связана с матрицей Грама Ω_e соотношением

$$\Omega_e = C_{fe} \Omega_e C_{fe}^t \quad (16-7)$$

поскольку $\omega = (e \Omega_e) \wedge e^t = (f C_{fe} \Omega_e) \wedge (C_{fe}^t f^t) = (f C_{fe} \Omega_e C_{fe}^t) \wedge f^t$.

ПРИМЕР 16.1 (НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ДАРБУ)

Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, то существование базиса e , в котором заданная грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ имеет вид (16-4), вытекает из теоремы о приведении кососимметричной билинейной формы к нормальному виду Дарбу¹. Действительно, доказывая эту теорему, мы установили, что для любой кососимметричной матрицы Ω существует такая обратимая матрица C , что все ненулевые элементы матрицы $C \Omega C^t$ сосредоточены в расположенных на главной диагонали 2×2 -блоках вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому грассманова квадратичная форма, имеющая матрицу Грама Ω в некотором базисе f , запишется в базисе $g = f C$ как $\omega = 2g_1 \wedge g_2 + 2g_3 \wedge g_4 + \dots$. Искомый базис e получается из g удвоением векторов с нечётными номерами: $e_{2i+1} = 2g_{2i+1}$, $e_{2i} = g_{2i}$.

16.3. Пфаффиан. Рассмотрим кососимметричную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $(2n) \times (2n)$. Будем считать её элементы a_{ij} с $i < j$ независимыми коммутирующими переменными и обозначим через $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ кольцо многочленов с целыми коэффициентами от этих $2n^2 - n$ переменных. Мы собираемся показать, что существует единственный такой многочлен $\text{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, что

$$\text{Pf}^2(A) = \det(A) \quad \text{и} \quad \text{Pf}(J') = 1,$$

где J' — блочно диагональная матрица из n идущих по главной диагонали 2×2 -блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

как в доказательстве теор. 14.3 на стр. 177. Многочлен $\text{Pf}(A)$ называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы A и явно выражается через матричные элементы по формуле

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n) \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \quad (16-8)$$

¹См. теор. 14.3 на стр. 177.

где суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ в объединение n неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых тоже не существен, а sgn означает знак указанной в его аргументе перестановки из симметрической группы S_{2n} .

УПРАЖНЕНИЕ 16.4. Убедитесь, что этот знак не меняется при перестановках пар друг с другом, а вся правая часть (16-8) не меняется при перестановке элементов внутри любой из пар.

Например,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}^2, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2.$$

Чтобы извлечь квадратный корень из $\det A$, интерпретируем A как матрицу Грама невырожденной кососимметричной формы в стандартном базисе координатного векторного пространства K^{2n} над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных a_{ij} с коэффициентами в поле \mathbb{Q} . Доказывая теор. 14.3 на стр. 177, мы видели, что в K^{2n} есть базис, в котором эта форма имеет матрицу Грама J' . Поэтому $A = CJ'C^t$ для некоторой матрицы $C \in \text{GL}_{2n}(K)$. Так как $\det J' = 1$, определитель $\det(A) = \det^2(C)$.

Покажем, что $\det C$ является многочленом с целыми коэффициентами и вычисляется по формуле (16-8). Для этого рассмотрим ещё одну кососимметричную матрицу $B = (b_{ij})$, наддиагональные элементы b_{ij} которой также будем считать независимыми переменными, и образуем грассманову квадратичную форму

$$\beta_B(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi B) \wedge \xi^t = \sum_{ij} b_{ij} \xi_i \wedge \xi_j$$

от переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})$ с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[b_{ij}]$. Поскольку чётные мономы $\xi_i \wedge \xi_j$ лежат в центре грассмановой алгебры, n -тая грассманова степень

$$\begin{aligned} \beta_B(\xi)^{\wedge n} &= \beta_B(\xi) \wedge \dots \wedge \beta_B(\xi) = \\ &= \left(\sum_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1} \xi_{i_1} \wedge \xi_{j_1} \right) \wedge \left(\sum_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2} \xi_{i_2} \wedge \xi_{j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_n j_n} b_{i_n j_n} \xi_{i_n} \wedge \xi_{j_n} \right) = \\ &= 2^n n! \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} = \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n) b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \dots b_{i_n j_n} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n} = \\ &= 2^n n! \text{Pf}(B) \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n}, \end{aligned} \quad (16-9)$$

где в суммирование предпоследней строке происходит, как и в формуле (16-8), по всем разбиениям множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ в объединение n неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых тоже не существен, и $\text{Pf}(B) \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$ означает тот же самый многочлен, что и в формуле (16-8). Заменим в (16-9) грассмановы переменные ξ на новые грассмановы переменные η по формуле $\xi = \eta C$, где $C \in \text{GL}_{2n}(K)$. В правой части (16-9) получим $2^n n! \text{Pf}(B) \det C \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Квадратичная форма $\beta_B(\xi)$ в самой левой части (16-9) превратится в

$$\beta_B(\xi) = (\xi B) \wedge \xi^t = (\eta C B) \wedge (\eta C)^t = (\eta C B C^t) \wedge \eta^t = \beta_{C B C^t}(\eta),$$

а её n -тая грасманова степень — в $\beta_{CBC^t}(\eta)^{\wedge n} = 2^n n! \text{Pf}(CBC^t) \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \cdots \wedge \eta_{2n}$. Таким образом, для любой матрицы $C \in \text{GL}_{2n}(K)$ в кольце многочленов $K[b_{ij}]$ от переменных b_{ij} с коэффициентами в поле K выполняется равенство

$$\text{Pf}(CBC^t) = \text{Pf}(B) \det C. \quad (16-10)$$

Полагая в этом равенстве $B = J'$ и беря в качестве C такую матрицу, что $CJ'C^t = A$, получаем в поле $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ равенство $\text{Pf}(A) = \det C$.

УПРАЖНЕНИЕ 16.5. Убедитесь, что $\text{Pf}(J') = 1$.

Это доказывает существование пфаффина и формулу (16-8). Единственность пфаффина вытекает из того, что многочлен

$$x^2 - \det A = (x - \text{Pf}(A))(x + \text{Pf}(A)) \in \mathbb{Z}[a_{ij}][x]$$

имеет в целостном кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ ровно два корня $x = \pm \text{Pf}(A)$, и требование $\text{Pf}(J') = 1$ однозначно фиксирует нужный знак.

16.4. Симплектическая группа. Изометрии $f : \Omega_{2n} \xrightarrow{\simeq} \Omega_{2n}$ называются *симплектическими преобразованиями* и образуют группу $\text{Sp}(\Omega_{2n})$, называемую *симплектической группой* пространства Ω_{2n} . Сопоставление оператору его матрицы в симплектическом базисе изоморфно отображает группу $\text{Sp}(\Omega_{2n})$ на *группу симплектических матриц*

$$\text{Sp}_{2n}(\mathbb{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \text{Mat}_{2n}(\mathbb{k}) \mid F^t J F = J\}, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 16.6. Убедитесь, что $J^2 = -E$ и $\det J = 1$.

Если записать симплектическую матрицу F в блочном виде

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } A, B, C, D \in \text{Mat}_n(\mathbb{k}),$$

то условие $F^t J F = J$ примет вид

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

и будет равносильно выполнению соотношений $C^t A = A^t C$, $D^t B = B^t D$, $E + C^t B = A^t D$.

УПРАЖНЕНИЕ 16.7. Убедитесь в этом.

Из этих соотношений вытекает, что полная линейная группа $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ гомоморфно вкладывается в симплектическую группу $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{k})$ по правилу

$$G \mapsto \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{t^{-1}} \end{pmatrix}. \quad (16-11)$$

На бескоординатном языке вложение (16-11) описывается в духе [теор. 16.1](#) на стр. 193. Разложим симплектическое пространство в прямую сумму $\Omega_{2n} = L \oplus L'$ лагранжевых подпространств L, L' . В доказательстве [теор. 16.1](#) мы видели, что сопоставление вектору $w \in L'$ линейного функционала $\omega_L^\wedge(w) : L \rightarrow \mathbb{k}$, $u \mapsto \omega(u, w)$, устанавливает изоморфизм пространства L' с двойственным к L пространством L^* . Прямая сумма этого изоморфизма с тождественным изоморфизмом

$\text{Id}_L : L \simeq L$ даёт изоморфизм $\Omega_{2n} = L \oplus L' \simeq L \oplus L^*$, который переводит симплектическую форму ω на Ω_{2n} в невырожденную кососимметричную форму ω_L на $L \oplus L^*$, действующую на векторы (u, ξ) и (w, η) из $L \oplus L^*$ по правилу

$$\omega_L((u, \xi), (w, \eta)) = \eta(u) - \xi(w). \quad (16-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 16.8. Убедитесь в этом.

Вложение $\text{GL}(L) \hookrightarrow \text{Sp}(\omega_L)$ переводит обратимый оператор $g : L \simeq L$ в оператор

$$g \oplus (g^{-1})^* : L \oplus L^* \simeq L \oplus L^*, \quad (v, \xi) \mapsto (gv, (g^{-1})^*\xi), \quad (16-13)$$

где $(g^{-1})^* : L^* \rightarrow L^*$ — оператор, двойственный к обратному к g оператору $g^{-1} : L \rightarrow L$. Так как оператор (16-13) сохраняет симплектическую форму (16-12):

$$\begin{aligned} \omega_L((gu, (g^{-1})^*\xi), (gw, (g^{-1})^*\eta)) &= (g^{-1})^*\eta(gu) - (g^{-1})^*\xi(gw) = \\ &= \eta(g^{-1}gu) - \xi(g^{-1}gw) = \eta(u) - \xi(w) = \omega_L((u, \xi), (w, \eta)), \end{aligned}$$

он действительно задаёт инъективный гомоморфизм групп $\text{GL}(L) \hookrightarrow \text{Sp}(L \oplus L^*)$. Матричная формула (16-11) получается если записать операторы g и $(g^{-1})^*$ в двойственных базисах e и e^* пространств L и L^* .

УПРАЖНЕНИЕ 16.9. Убедитесь что базис $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e_1^*), \dots, (0, e_n^*)$, где e_i и e_i^* пробегают двойственные друг другу базисы в L и L^* , является симплектическим для формы (16-12) на $L \oplus L^*$.

Предложение 16.2

Каждая симплектическая матрица $F \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{k})$ имеет единичный определитель $\det F = 1$ и возвратный¹ характеристический многочлен $\chi_F(t) = t^{2n}\chi_F(t^{-1})$.

Доказательство. Из равенства $F^t J F = J$ и форм. (16-10) на стр. 197 вытекает, что

$$\text{Pf}(J) = \text{Pf}(F^t J F) = \det(F) \text{Pf}(J),$$

откуда $\det F = 1$, так как $\text{Pf}(J) \neq 0$. Кроме того, из равенства $F^t J F = J$ вытекает, что обратная к F матрица $F^{-1} = J^{-1} F^t J = -J F^t J$, откуда характеристический многочлен

$$\begin{aligned} \chi_F(t) &= \det(tE - F) = t^{2n} \det(F) \det(F^{-1} - t^{-1}E) = t^{2n} \det(t^{-1}J^2 - JF^t J) = \\ &= t^{2n} \det^2(J) \det(t^{-1}E - F^t) = t^{2n} \det(t^{-1}E - F) = t^{2n} \chi_F(t^{-1}), \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Предложение 16.3

Симплектическая группа $\text{Sp}(\Omega_{2n})$ транзитивно действует на изотропных и на симплектических подпространствах любой фиксированной размерности.

¹Напомню, что многочлен $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ называется *возвратным*, если последовательность его коэффициентов симметрична относительно своей середины: $a_k = a_{m-k}$ при всех $k = 0, 1, \dots, m$.

Доказательство. По [сл. 16.1](#) на [стр. 193](#) каждое изотропное подпространство $U_1 \subset \Omega_{2n}$ содержится в некотором лагранжевом подпространстве L_1 , и $\Omega_{2n} = L_1 \oplus L'_1$ для некоторого дополнительного к L_1 лагранжева подпространства L'_1 согласно [теор. 16.1](#) на [стр. 193](#). Каждый базис \mathbf{u}_1 в U_1 включается в некоторый базис подпространства L_1 и достраивается до симплектического базиса в $L_1 \oplus L'_1 = \Omega_{2n}$. С любым другим изотропным подпространством $U_2 \subset \Omega_{2n}$ той же размерности, что и U_1 , и базисом \mathbf{u}_2 в U_2 можно точно также связать лагранжевы подпространства $L_2, L'_2 \subset L_2 \oplus L'_2 = \Omega_{2n}$ и симплектический базис в Ω_{2n} , достраивающий какой-нибудь содержащий \mathbf{u}_2 базис в L_2 . Изометрический изоморфизм $\Omega_{2n} \simeq \Omega_{2n}$, переводящий первый построенный нами симплектический базис во второй, переводит U_1 в U_2 . Транзитивность действия на симплектических подпространствах доказывается ещё проще: пусть подпространства $W_1, W_2 \subset \Omega_{2n}$ изометрически изоморфны Ω_{2k} . Тогда их ортогоналы $W_1^\perp, W_2^\perp \subset \Omega_{2n}$ изометрически изоморфны $\Omega_{2(n-k)}$. Композиция изометрических изоморфизмов

$$W_1 \oplus W_1^\perp \simeq \Omega_{2k} \dot{+} \Omega_{2(n-k)} \simeq W_2 \oplus W_2^\perp$$

является изометрическим изоморфизмом $\Omega_{2n} \simeq \Omega_{2n}$, переводящим W_1 в W_2 . □

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 16.4. Перестановка одной пары с другой как единого целого чётная (это пара транспозиций).

Перестановка между собою элементов из ν -й пары меняет знак $\text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n)$, но одновременно заменяет матричный элемент $a_{i_\nu j_\nu}$ элементом $a_{j_\nu i_\nu} = -a_{i_\nu j_\nu}$.

Упр. 16.8. Пусть $\xi = \omega^\wedge(u')|_L$ и $\eta = \omega^\wedge(w')|_L$ для некоторых $u', w' \in L'$. Тогда $\omega(u + u', w + w') = \omega(u, w') - \omega(w, u') = \eta(u) - \xi(w)$, что и утверждается.