§5. Матрицы

5.1. Умножение матриц происходит из композиции линейных отображений. А именно, зафиксируем в пространствах U, V, W некоторые базисы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, и пусть линейные отображения $B : U \to V$ и $A : V \to W$ имеют в этих базисах матрицы $B_{\boldsymbol{vu}} = (b_{ij})$ и $A_{\boldsymbol{wv}} = (a_{ij})$, т. е.

$$B(u_j) = \sum_k v_k b_{kj} \quad \text{и} \quad A(v_k) = \sum_i w_i a_{ik} .$$

Тогда их композиция $C = A \circ B : U \to W$ переводит каждый базисный вектор u_j из базиса $\boldsymbol{u}$ в

$$C(u_j) = A\Big(\sum_k v_k b_{kj}\Big) = \sum_k A(v_k) b_{kj} = \sum_i \sum_k w_i a_{ik} b_{kj} = \sum_i w_i \cdot \sum_k a_{ik} b_{kj} .$$

Тем самым, матрица $C_{\boldsymbol{wu}} = (c_{ij})$ имеет в i-й строке и j-м столбце элемент

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{is} b_{sj} , \quad \text{где} \quad s = \dim V , \tag{5-1}$$

равный произведению i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B в том самом смысле, как мы определили его в форм. (2-5) на стр. 24:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_s b_s . \tag{5-2}$$

Таким образом, матрица композиции линейных отображений является произведением матриц этих отображений.

Если в формуле (5-2) интерпретировать каждую букву a_ν в строке $\boldsymbol{a}$ как столбец элементов, составляющих ν-тый столбец матрицы A, а вместо столбца $\boldsymbol{b}$ подставить j-й столбец матрицы B, то правило умножения матриц можно сформулировать следующим образом: в j-м столбце матрицы AB стоит линейная комбинация столбцов матрицы A взятых с коэффициентами, стоящими в j-м столбце матрицы B. Например, чтобы получить из матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (a_1, \, a_2 \, , a_3) \tag{5-3}$$

матрицу $(a_1 + a_2 \cdot \lambda, a_1 + a_3 \, , a_3 + a_2 \cdot \mu \, , a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3)$, у которой во втором столбце стоит сумма первого и третьего столбцов матрицы A, а в первом и третьем — суммы первого и третьего столбцов матрицы A со вторым, умноженным, соответственно, на λ и на μ, и кроме того, имеется ещё один, четвёртый столбец, равный сумме всех столбцов матрицы A, помноженных на их номера, надо умножить матрицу A справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \mu & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Упражнение 5.1. Убедитесь в этом прямым вычислением по формуле (5-1).

Симметричным образом, интерпретируя в формуле (5-2) каждую букву b_μ в столбце $\boldsymbol{b}$ как μ-ю строку матрицы B, а строку a — как i-ю строку матрицы A, мы заключаем, что в i-й строке матрицы AB стоит линейная комбинация строк матрицы B с коэффициентами из i-й строки матрицы A. Например, если в той же матрице (5-3) хочется поставить вторую строку на место первой, а вместо второй написать её сумму с первой строкой, умноженной на λ, то это достигается умножением слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} .$$

Упражнение 5.2. Убедитесь в этом прямым вычислением по формуле (5-1).

Два только данных нами описания произведения AB получаются друг из друга заменой слова «столбец» на слово «строка» с одновременной перестановкой местами букв A и B. Матрица, по строкам которой записаны столбцы матрицы[1] $A = \left(a_{ij}\right)$ называется *транспонированной* к матрице A и обозначается $A^t = \left(a^t_{ij}\right)$. Её элементы a^t_{ij} связаны с элементами a_{ij} матрицы A равенствами $a^t_{ij} = a_{ji}$.

Упражнение 5.3. Проверьте, что транспонирование является инволютивным антигомоморфизмом, т. е. $(A^t)^t = A$ и $(AB)^t = B^t A^t$.

Так как композиция линейных отображений ассоциативна, произведение матриц также ассоциативно, т. е. для любых $F \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(\Bbbk)$, $G \in \mathrm{Mat}_{k\times \ell}(\Bbbk)$ и $H \in \mathrm{Mat}_{\ell\times n}(\Bbbk)$ выполняется равенство $(FG)H = H(FG)$. Поскольку композиция линейных отображений линейна по каждому из сомножителей[2], в произведении линейных комбинаций матриц одинакового размера можно раскрывать скобки по обычным правилам, т. е.

$$(\lambda_1 F_1 + \mu_1 G_1)(\lambda_2 F_2 + \mu_2 G_2) = \lambda_1\lambda_2 F_1 F_2 + \lambda_1\mu_2 F_1 G_2 + \mu_1\lambda_2 G_1 F_2 + \mu_1\mu_2 G_1 G_2$$

для всех $F_i \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(\Bbbk)$, $G_i \in \mathrm{Mat}_{k\times \ell}(\Bbbk)$ и всех $\lambda_i, \mu_i \in \Bbbk$.

Как и композиция отображений, умножение матриц обычно не коммутативно. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 23 \end{pmatrix} .$$

Более того, как и композиция отображений, произведение матриц не всегда определено: ширина левого множителя должна быть равна высоте правого. В частности, бывает так, что произведение AB определено, а BA — нет.

5.2. Матрицы перехода. Пусть вектор v линейно выражается через векторы $w_1, \dots, w_m$:

$$v = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_m x_m . \tag{5-4}$$

Организуем коэффициенты $x_i \in \Bbbk$ в матрицу-столбец размера $m \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{5-5}$$

[1] Или — что то же самое — по столбцам которой стоят строки матрицы A.

[2] См. упр. 4.7 на стр. 55.

а векторы w_i — в матрицу-строку $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ размера $1 \times n$ с элементами из V. Тогда формула (5-4) свернётся в матричное равенство $v = \boldsymbol{w}x$, в котором v рассматривается как матрица размера 1×1 с элементом из V. Если имеются два набора векторов: $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, и каждый вектор u_j первого из них линейно выражается через векторы второго в виде

$$u_j = \sum_{\nu=1}^{m} c_{\nu j} w_\nu = w_1 \cdot c_{1j} + w_2 \cdot c_{2j} + \cdots + w_m \cdot c_{mj} \,,$$

то эти n равенств собираются в одну матричную формулу $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} \cdot C_{\boldsymbol{wu}}$, где $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ рассматриваются как матрицы-строки с элементами из V, а матрица

$$C_{\boldsymbol{wu}} = \left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \tag{5-6}$$

получается подстановкой в матрицу $\boldsymbol{u}$ вместо каждого из векторов u_j столбца коэффициентов его линейного выражения через векторы w_i. Матрица (5-6) называется *матрицей перехода* от векторов $\boldsymbol{u}$ к векторам $\boldsymbol{w}$. Название объясняется тем, что умножение на матрицу $C_{\boldsymbol{uw}}$ позволяет переходить от линейных выражений произвольных векторов $v_k \in V$ через векторы u_j к линейным выражениям этих же векторов через векторы w_i, а именно

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}C_{\boldsymbol{uv}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}C_{\boldsymbol{wu}}C_{\boldsymbol{uv}} \,.$$

Таким образом, произведение матрицы перехода от векторов $\boldsymbol{u}$ к векторам $\boldsymbol{w}$ и матрицы перехода от векторов $\boldsymbol{v}$ к векторам $\boldsymbol{u}$ является матрицей перехода от векторов $\boldsymbol{v}$ к векторам $\boldsymbol{w}$:

$$C_{\boldsymbol{wu}}C_{\boldsymbol{uv}} = C_{\boldsymbol{wv}} \,. \tag{5-7}$$

Подчеркнём, что когда набор векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ линейно зависим, каждый вектор v из их линейной оболочки допускает много *различных* линейных выражений через векторы w_j. Поэтому обозначение $C_{\boldsymbol{wv}}$ в этой ситуации не корректно в том смысле, что элементы матрицы $C_{\boldsymbol{wv}}$ определяются наборами векторов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{v}$ не однозначно, и равенство (5-7) означает, что имея какие-нибудь линейные выражения $C_{\boldsymbol{wu}}$ и $C_{\boldsymbol{uv}}$ векторов $\boldsymbol{u}$ через $\boldsymbol{v}$ и векторов $\boldsymbol{v}$ через $\boldsymbol{w}$, мы можем предъявить некоторое явное линейное выражение $C_{\boldsymbol{wv}}$ векторов $\boldsymbol{u}$ через векторы $\boldsymbol{w}$, перемножив матрицы $C_{\boldsymbol{wu}}$ и $C_{\boldsymbol{uv}}$.

Если же набор векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ является базисом, то матрица перехода $C_{\boldsymbol{ew}}$, выражающая произвольный набор векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ через базис $\boldsymbol{e}$ однозначно определяется по наборам $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{w}$, т. е. два набора векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ совпадают если и только если выполняется равенство $C_{\boldsymbol{eu}} = C_{\boldsymbol{ew}}$.

5.3. Обратимые матрицы. Квадратная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(по диагонали стоят единицы, в остальных местах — нули) называется *единичной*.

Упражнение 5.4. Убедитесь, что $AE = A$ и $EA = A$ всякий раз, когда такие произведения определены.

Квадратная матрица A называется *обратимой* или *невырожденной*, если существует такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Матрица A^{-1} называется *обратной* к A. Она однозначно определяется матрицей A, поскольку для любых двух матриц B, C, удовлетворяющих равенствам $AB = E$ и $CA = E$, имеем $C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$. В частности, для обратимости матрицы A достаточно, чтобы существовали такие матрицы B и C, что $AB = E$ и $CA = E$.

Упражнение 5.5. Докажите, что обратимость матрицы A равносильна обратимости транспонированной к ней матрицы[1] A^t.

Пример 5.1 (обратимые 2×2-матрицы)
Матричное равенство

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

означает, что стандартные базисные векторы e_1, e_2 пространства $\Bbbk^2$ линейно выражаются через столбцы стоящей слева матрицы A как

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot y_1 + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Если такие выражения существуют, то столбцы матрицы A линейно порождают $\Bbbk^2$ и в частности не пропорциональны, т. е. $\det A \neq 0$. Наоборот, если $\det A \neq 0$, то по правилу Крамера[2]

$$x_1 = \frac{d}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{-c}{ad - bc}, \quad y_1 = \frac{-b}{ad - bc}, \quad y_2 = \frac{a}{ad - bc} .$$

Мы заключаем, что 2×2-матрица A с элементами из поля $\Bbbk$ обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$ и в этом случае

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} . \tag{5-8}$$

Стоящая справа матрица называется *присоединённой*[3] к матрице A и обозначается

$$A^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Предложение 5.1
Пусть набор векторов $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ образует базис пространства V. Для того, чтобы набор из n векторов $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\, C_{\boldsymbol{vu}}$ тоже составлял базис, необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода $C_{\boldsymbol{vu}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\Bbbk)$ была обратима, и в этом случае $C_{\boldsymbol{vu}}^{-1} = C_{\boldsymbol{uv}}$.

[1] См. упр. 5.3 на стр. 62.
[2] См. лем. 1.2 на стр. 11.
[3] По-английски *adjunct*.

Доказательство. Если векторы $\boldsymbol{u}$ образуют базис, то векторы $\boldsymbol{e}$ линейно выражается через $\boldsymbol{u}$, и согласно формуле (5-7) имеют место равенства $C_{\boldsymbol{ee}} = C_{\boldsymbol{eu}}C_{\boldsymbol{ue}}$ и $C_{\boldsymbol{uu}} = C_{\boldsymbol{ue}}C_{\boldsymbol{eu}}$. Так как каждый набор векторов имеет единственное выражение через базис, мы имеем равенства

$$C_{\boldsymbol{ee}} = C_{\boldsymbol{uu}} = E\,.$$

Тем самым, $C_{\boldsymbol{ue}}C_{\boldsymbol{eu}} = C_{\boldsymbol{ue}}C_{\boldsymbol{eu}} = E$. Наоборот, если набор $\boldsymbol{u}$ не является базисом, то он линейно зависим, т. е. $\boldsymbol{u}\lambda = 0$ для некоторого ненулевого столбца коэффициентов $\lambda \in \Bbbk^n$. Тем самым, $\boldsymbol{e}C_{\boldsymbol{eu}}\lambda = 0$, откуда $C_{\boldsymbol{eu}}\lambda = 0$, так как $\boldsymbol{e}$ — базис. Если бы матрица $C_{\boldsymbol{eu}}$ была обратима, умножая обе части этого равенства слева на $C_{\boldsymbol{eu}}^{-1}$, мы получили бы $\lambda = 0$ вопреки выбору λ. Противоречие. □

Следствие 5.1
Следующие условия на квадратную матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ эквивалентны:

1) матрица A обратима
2) столбцы матрицы A линейно независимы
3) столбцы матрицы A линейно порождают координатное пространство $\Bbbk^n$,

и то же самое верно с заменой столбцов на строки.

Доказательство. Обозначим через $a_1, a_2, \dots, a_n$ столбцы матрицы A, рассматриваемые как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$. Матрица A является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису пространства $\Bbbk^n$. По предл. 5.1 обратимость матрицы A равносильна тому, что векторы a_i образуют в $\Bbbk^n$ базис, что в свою очередь равносильно каждому из условий (2), (3) по сл. 4.1 на стр. 50. Последнее утверждение предложения вытекает из упр. 5.5 на стр. 64. □

Пример 5.2 (замена координат при смене базиса)
Пусть набор векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ выражается через базис $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ как $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}C_{\boldsymbol{ew}}$. Если $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}C_{\boldsymbol{ev}}$ — другой базис, то в выражении $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}C_{\boldsymbol{vw}}$ векторов $\boldsymbol{w}$ через базис $\boldsymbol{v}$ матрица $C_{\boldsymbol{vw}} = C_{\boldsymbol{ve}}C_{\boldsymbol{ew}} = C_{\boldsymbol{ev}}^{-1}C_{\boldsymbol{vw}}$. В частности столбец координат произвольного вектора $\boldsymbol{w}$ в базисе $\boldsymbol{v}$ получаются из столбца его координат в базисе $\boldsymbol{e}$ умножением слева на матрицу $C_{\boldsymbol{ev}}^{-1}$, обратную к матрице координат векторов базиса $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{e}$.

Пример 5.3 (замена матрицы отображения при смене базиса)
Напомню, что для линейного отображения $F : U \to W$ и строки векторов $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ мы обозначаем через $F(\boldsymbol{v}) \overset{\text{def}}{=} \big(F(v_1),\ F(v_2),\ \dots\ ,\ F(v_r)\big)$ строку значений отображения F на этих векторах. В силу линейности отображения F для любой числовой матрицы $M \in \mathrm{Mat}_{r\times s}(\Bbbk)$ выполняется равенство $F(\boldsymbol{v}\,M) = F(\boldsymbol{v})\,M$.

Упражнение 5.6. Убедитесь в этом.

Матрица $F_{\boldsymbol{wu}}$ отображения F в базисах $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ пространств U и W однозначно определяется равенством $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}F_{\boldsymbol{wu}}$. В других базисах $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}C_{\boldsymbol{u}\widetilde{\boldsymbol{u}}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}C_{\boldsymbol{w}\widetilde{\boldsymbol{w}}}$ мы получим

$$F_{\widetilde{\boldsymbol{w}}\widetilde{\boldsymbol{u}}} = C_{\widetilde{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}}F_{\boldsymbol{wu}}C_{\boldsymbol{u}\widetilde{\boldsymbol{u}}} = C_{\boldsymbol{w}\widetilde{\boldsymbol{w}}}^{-1}F_{\boldsymbol{wu}}C_{\boldsymbol{u}\widetilde{\boldsymbol{u}}} = C_{\widetilde{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}}F_{\boldsymbol{wu}}C_{\widetilde{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}}^{-1}\,, \tag{5-9}$$

поскольку $F(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = F(\boldsymbol{u}C_{\boldsymbol{u}\widetilde{\boldsymbol{u}}}) = F(\boldsymbol{u})\,C_{\boldsymbol{u}\widetilde{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{w}\,F_{\boldsymbol{wu}}C_{\boldsymbol{u}\widetilde{\boldsymbol{u}}} = \widetilde{\boldsymbol{w}}\,C_{\widetilde{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}}F_{\boldsymbol{wu}}C_{\boldsymbol{u}\widetilde{\boldsymbol{u}}}$. В частности, если линейный эндоморфизм $F : V \to V$ векторного пространства V задаётся в базисе $\boldsymbol{e}$ матрицей $F_{\boldsymbol{e}} = F_{\boldsymbol{ee}}$,

j-тый столбец которой есть столбец координат вектора $F(e_j)$ в том же самом базисе $\boldsymbol{e}$, то при замене базиса $\boldsymbol{e}$ на базис $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}C_{\boldsymbol{eu}}$ матрица отображения F в новом базисе приобретёт вид

$$F_{\boldsymbol{u}} = C_{\boldsymbol{ue}}F_{\boldsymbol{e}}C_{\boldsymbol{eu}} = C_{\boldsymbol{eu}}^{-1}F_{\boldsymbol{e}}C_{\boldsymbol{eu}} = C_{\boldsymbol{ue}}F_{\boldsymbol{e}}C_{\boldsymbol{ue}}^{-1}\,. \tag{5-10}$$

5.4. Ранг матрицы. Размерность линейной оболочки столбцов матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ в координатном векторном пространстве $\Bbbk^m$ называется *рангом* матрицы A и обозначается $\operatorname{rk} A$. Каждая матрица A задаёт линейное отображение $F_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$, $x \mapsto Ax$, которое переводит координатный столбец $x \in \Bbbk^n$ в координатный столбец $Ax \in \Bbbk^m$ и матрица которого в стандартных базисах координатных пространств $\Bbbk^n$ и $\Bbbk^m$ совпадает с матрицей A. Линейная оболочка столбцов матрицы A представляет собою образ оператора F_A. Тем самым, $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{im} F_A$.

Лемма 5.1
Ранг матрицы не меняется при умножении на обратимые матрицы слева или справа.

Доказательство. Пусть матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ произвольна, а матрицы $D \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ и $C \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\Bbbk)$ обратимы. Рассмотрим задаваемые этими матрицами линейные отображения

$$F_C : \Bbbk^m \to \Bbbk^m\,,\ z \mapsto Cz\,, \quad F_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m\,,\ y \mapsto Ay\,, \quad F_D : \Bbbk^n \to \Bbbk^n\,,\ x \mapsto Dx\,.$$

Согласно сл. 5.1 отображения F_D и F_C являются линейными изоморфизмами. В силу биективности отображения F_D образ композиции F_AF_D совпадает с образом отображения F_A:

$$\operatorname{im}(F_AF_D) = F_A(F_D(\Bbbk^m)) = F_A(\Bbbk^m) = \operatorname{im} F_A\,.$$

Образ композиции $F_CF_AF_D$ является образом подпространства $\operatorname{im} F_A \subset \Bbbk^m$ при изоморфизме $F_C : \Bbbk^m \xrightarrow{\sim} \Bbbk^m$. Следовательно $\dim \operatorname{im}(F_CF_AF_D) = \dim \operatorname{im} F_A$, т. е. линейная оболочка столбцов матрицы CAD имеет ту же размерность, что и линейная оболочка столбцов матрицы A. □

Теорема 5.1 (теорема о ранге матрицы)
Для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ выполняется равенство $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^t$. Иными словами, линейная оболочка строк матрицы A в координатном пространстве $\Bbbk^n$ и линейная оболочка столбцов матрицы A в координатном пространстве $\Bbbk^m$ имеют равные размерности.

Доказательство. Применяя лем. 5.1 к транспонированной матрице A^t, мы заключаем, что размерность линейной оболочки строк матрицы A тоже не меняется при умножении матрицы A слева и справа на обратимые матрицы. Следуя доказательству предл. 4.7 на стр. 56 обозначим через $u_1, \dots, u_k$ базис в ядре $\ker F_A \subset \Bbbk^n$ задаваемого матрицей A линейного отображения $F_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$, $x \mapsto Ax$, и дополним его до базиса $\boldsymbol{v} = (w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_k)$ всего пространства $\Bbbk^n$. Как мы видели в доказательстве предл. 4.7, векторы $f_j = F_A(w_j)$, где $1 \leqslant j \leqslant r$, образуют базис в подпространстве $\operatorname{im} F_A \subset \Bbbk^m$. Дополним его до базиса $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_m)$ всего пространства $\Bbbk^m$. Матрица $F_{\boldsymbol{fv}} = \left(f_{ij}\right)$ оператора $F_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ в базисах $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{v}$ пространств $\Bbbk^m$ и $\Bbbk^n$ имеет $f_{ii} = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant r$ и нули в остальных местах. Таким образом, линейная оболочка её строк в координатном пространстве $\Bbbk^n$ и линейная оболочка её столбцов в координатном пространстве $\Bbbk^m$ имеют одну и ту же размерность r. Согласно прим. 5.3 матрица $F_{\boldsymbol{fv}} = C_{\boldsymbol{fm}}AC_{\boldsymbol{nv}}$ получается из матрицы $A = F_{\boldsymbol{mn}}$ оператора F_A в стандартных базисах $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ пространств $\Bbbk^m$ и $\Bbbk^n$ умножением слева и справа на обратимые[1] матрицы $C_{\boldsymbol{fm}}$ и $C_{\boldsymbol{nv}}$ переходов, соответственно, от стандартного базиса $\boldsymbol{m}$ в $\Bbbk^m$ к базису $\boldsymbol{f}$ и от базиса $\boldsymbol{v}$ к стандартному базису $\boldsymbol{n}$ в $\Bbbk^n$. Как

[1]См. предл. 5.1 на стр. 64.

мы знаем, такое умножение не изменяет ни размерность линейной оболочки строк, ни размерность линейной оболочки столбцов. □

5.5. Системы линейных уравнений. Система неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5-11}$$

на неизвестные $x_1, \dots, x_n$ в матричных обозначениях записывается одним равенством $Ax = b$, в котором $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, а x и b обозначают матрицы-столбцы, состоящие из неизвестных и правых частей уравнений (5-11). Как и в n° 5.4 выше, обозначим через

$$F_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m , \quad x \mapsto Ax ,$$

линейное отображение, переводящее стандартные базисные векторы $e_1, e_2, \dots, e_n \in \Bbbk^n$ в столбцы $a_1, a_2, \dots, a_n$ матрицы A. Множество решений уравнения $Ax = b$ и системы (5-11) состоит из всех таких векторов $x \in \Bbbk^n$, что $F_A(x) = b$, т. е. представляет собою полный прообраз $F^{-1}(b)$ вектора b при отображении F_A. Если $b \notin \operatorname{im} F_A$, то этот прообраз пуст и система (5-11) несовместна. Если $b \in \operatorname{im} F_A$, то по форм. (4-5) на стр. 56 множество решений системы (5-11) представляет собою аффинное подпространство $F_A^{-1}(b) = p + \ker F_A \subset \Bbbk^n$, которое является сдвигом векторного подпространства $\ker F_A \subset \Bbbk^n$ в любую такую точку p, что $F(p) = b$.

На языке уравнений ядро $\ker F_A$ представляет собою множество решений системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$ с теми же самыми левыми частями, что и система (5-11). В развёрнутом виде она выглядит как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 . \end{cases} \tag{5-12}$$

Наличие у такой системы ненулевого решения означает, что $\ker F_A \neq 0$, и в этом случае любая система (5-11) либо несовместна, либо имеет более одного решения[1]. Это наблюдение известно как *альтернатива Фредгольма*: либо у однородной системы (5-12) есть ненулевое решение, либо у каждой системы (5-11) имеется не более одного решения.

Предложение 5.2

Пространство решений системы линейных однородных уравнений (5-12) имеет размерность $n - \operatorname{rk} A$. В частности, эта размерность не меньше, чем $n - m$, и если в число уравнений m меньше, чем число неизвестных n, то система обязательно имеет ненулевое решение.

Доказательство. По предл. 4.7 на стр. 56 $\dim \ker F_A = n - \dim \operatorname{im} F_A = n - \operatorname{rk} A$. □

[1] А над бесконечным полем — бесконечно много решений.

Предложение 5.3 (критерий Кронекера – Капелли)
Система (5-11) совместна если и только если $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \boxed{A|b}$, где *расширенная матрица системы*

$$\boxed{A|b} \in \operatorname{Mat}_{m\times(n+1)}(\Bbbk)$$

получена приписыванием справа к матрице A столбца b правых частей системы (5-11).

Доказательство. Совместность системы (5-11) равносильна тому, что вектор b лежит в линейной оболочке столбцов матрицы A, что в свою очередь означает, что размерность линейной оболочки столбцов у матрицы A такая же, как у расширенной матрицы $\boxed{A|b}$. □

Пример 5.4 (системы с квадратной матрицей левых частей)
Если количество уравнений в системе (5-11) равно количеству неизвестных, линейное отображение $F_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ является эндоморфизмом n-мерного векторного пространства, и по сл. 4.6 на стр. 56 равенство $\ker F_A = 0$ равносильно сюрьективности оператора F_A. Это позволяет уточнить альтернативу Фредгольма: при $m = n$ либо все неоднородные системы (5-11) имеют единственное решение, либо у однородной системы (5-12) есть ненулевое решение. В первом случае матрица A обратима по сл. 5.1, и знание обратной матрицы A^{-1} позволяет решить систему $Ax = b$ при любой правой части b по формуле $x = A^{-1}b$.

5.6. Алгебры над полем. Векторное пространство A над полем $\Bbbk$ называется $\Bbbk$-*алгеброй*[1], если на нём имеется билинейная операция умножения $A \times A \to A$. Это требование включает в себя перестановочность умножения векторов на константы с умножением в алгебре:

$$\forall\,\lambda \in \Bbbk\,,\ \forall\,a, b \in A \quad (\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$$

и стандартное правило раскрытия скобок: $\forall\,\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \Bbbk$ и $\forall\,a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$

$$(\lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1)(\lambda_2 a_2 + \mu_2 b_2) = \lambda_1\lambda_2 a_1 a_2 + \lambda_1\mu_2 a_1 b_2 + \mu_1\lambda_2 b_1 a_2 + \mu_1\mu_2 b_1 b_2\,.$$

Алгебра A называется *ассоциативной*, если $\forall\,a, b, c \in A\ (ab)c = a(bc)$. Алгебра A называется *коммутативной*, если $\forall\,a, b \in A\ ab = ba$. Алгебра A называется *алгеброй с единицей*, если в ней есть такой элемент $e \in A$, что $ea = ae = a$ для всех $a \in A$.

Упражнение 5.7. Покажите, что $0 \cdot a = 0$ для всех a в любой алгебре A и что единичный элемент единствен (если существует).

Примерами *коммутативных* ассоциативных алгебр с единицами являются алгебра многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n]$ и алгебра $\Bbbk[\![\Bbbk_1, \Bbbk_2, \dots , \Bbbk_n]\!]$ формальных степенных рядов с коэффициентами из поля $\Bbbk$. Ключевыми примерами некоммутативных ассоциативных алгебр являются алгебры $\operatorname{End}(V)$ линейных эндоморфизмов векторных пространств V над полем $\Bbbk$ и алгебры $\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из поля $\Bbbk$. Последние являются частными примерами первых, поскольку каждая квадратная матрица $A \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ может восприниматься как эндоморфизм координатного пространства $\Bbbk^n$, действующий на столбец $x \in \Bbbk^n$ по правилу[2] $x \mapsto Ax$.

[1] Более торжественно: *алгеброй над полем* $\Bbbk$.
[2] Как в n° 5.4 и n° 5.5 выше.

Пример 5.5 (базис матричной алгебры)
Базис алгебры $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ как векторного пространства над полем $\Bbbk$ составляют матрицы E_{ij} имеющие единицу в пересечении i-й строки с j-м столбцом и нули во всех остальных местах. Соответствующий линейный оператор $E_{ij} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ переводит e_j в e_i, а все остальные стандартные базисные векторы отображает в нуль. Из этого описания вытекает, что

$$E_{ij}E_{k\ell} = \begin{cases} E_{i\ell} & \text{при } j = k \\ 0 & \text{в остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{5-13}$$

Написанная таблица умножения базисных матриц позволяет перемножать произвольные матрицы, которые являются линейными комбинациями базисных, просто раскрывая скобки. Например, для всех $\alpha \in \Bbbk$ и $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = (E + \alpha E_{12})^n = E + n\alpha E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

а из равенства $(E + \alpha E_{12})(E - \alpha E_{12}) = E$ вытекает, что

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Упражнение 5.8 (центр матричной алгебры). Для алгебры A над полем $\Bbbk$ подалгебра

$$Z(A) \overset{\text{def}}{=} \{z \in A \mid \forall\, a \in A \ az = za\}$$

называется *центром* алгебры A. Покажите, что $Z(\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)) = \{tE \mid t \in \Bbbk\}$ состоит из *скалярных матриц*.

5.6.1. Обратимые элементы. Элемент a алгебры A с единицей $e \in A$ называется *обратимым*, если существует такой элемент $a^{-1} \in A$, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Как и в алгебре матриц[1], в любой ассоциативной алгебре A это требование можно ослабить до существования левого и правого обратных к a элементов $a', a'' \in A$, обладающих свойствами $a'a = e = aa''$, поскольку такие элементы автоматически равны: $a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$. Из этого вычисления также вытекает, что обратный к a элемент ассоциативной алгебры однозначно определяется по a.

Обратимыми элементами алгебры $\mathrm{End}\,V$ линейных эндоморфизмов $V \to V$ являются линейные изоморфизмы $V \xrightarrow{\sim} V$. Они образуют группу преобразований пространства V. Эта группа обозначается $\mathrm{GL}\,V$ и называется *полной линейной группой* пространства V. Группа обратимых матриц размера $n \times n$ обозначается $\mathrm{GL}_n(\Bbbk) \subset \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$.

5.6.2. Алгебраические и трансцендентные элементы. С каждым элементом ξ ассоциативной $\Bbbk$-алгебры A с единицей связан *гомоморфизм вычисления*

$$\mathrm{ev}_\xi : \Bbbk[t] \to A\,, \quad f(x) \mapsto f(\xi) \in A\,. \tag{5-14}$$

Он переводит многочлен $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$ в результат подстановки в этот многочлен $x = \xi$. При этом мы считаем, что результатом такой подстановки в свободный

[1] Ср. с n° 5.3 на стр. 63.

член $a_0 = a_0 x^0$ является элемент $a_0 \xi^0 \stackrel{\text{def}}{=} a_0\, e \in A$. Обратите внимание, что отображение (5-14), во-первых, линейно, а во-вторых, перестановочно со сложеним и умножением.

Если гомоморфизм (5-14) инъективен, то элемент $\xi \in A$ называется *трансцендентным* над $\Bbbk$. Отметим, что в этом случае алгебра A бесконечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$, так все натуральные степени элемента ξ линейно независимы. Если гомоморфизм (5-14) имеет ненулевое ядро, то элемент ξ называется *алгебраическим* над $\Bbbk$.

Упражнение 5.9 (по алгебре). Убедитесь, что если ядро $\ker \mathrm{ev}_\xi \neq 0$, то в нём имеется единственный многочлен $\mu_\xi(x)$ наименьшей положительной степени[1] со старшим коэффициентом 1, и $\ker \mathrm{ev}_\xi = (\mu_\xi)$ состоит из всех многочленов, делящихся на μ_ξ.

Приведённый многочлен μ_ξ из упр. 5.9 называется *минимальным многочленом* элемента ξ.

Пример 5.6 (алгебраичность линейных эндоморфизмов)
Если $\dim V = n$, то $\dim \mathrm{End}\, V = n^2$, и последовательные итерации $F^0 = \mathrm{Id}_V, F, F^2, \dots, F^{n^2}$ любого линейного оператора $F : V \to V$ представляют собою линейно зависимый набор векторов пространства $\mathrm{End}\, V$. Поэтому каждый эндоморфизм[2] F удовлетворяет нетривиальному полиномиальному уравнению $F^m + a_1 F^{m-1} + \dots + a_{m-1} F + a_m E = 0$, где $a_i \in \Bbbk$.

5.7. Матрицы над ассоциативным кольцом. Абелева группа R, на которой помимо сложения также имеется операция умножения $R \times R \to R$, называется *ассоциативным кольцом*, если для всех $f, g, h \in R$ выполнены равенства $f(g+h) = fg + fh$, $(f+g)h = fh + gh$ и $f(gh) = (fg)h$. Если при этом ещё имеется такой элемент $e \in R$, что $ef = fe = f$ для всех $f \in R$, то он называется *единицей*, а кольцо R — *кольцом с единицей*. Например, всякая ассоциативная $\Bbbk$-алгебра является кольцом.

Упражнение 5.10. Покажите, что в любом ассоциативном кольце $0 \cdot f = 0$ для всех f и что единица единственна (если существует).

Квадратные матрицы размера $n \times n$ с элементами из произвольного кольца R образуют кольцо $\mathrm{Mat}_n(R)$, сложение и умножение в котором задаются теми же правилами: сумма $S = F + G$ и произведение $P = FG$ матриц $F = \left(f_{ij}\right)$ и $G = \left(g_{ij}\right)$ имеют в качестве матричных элементов

$$s_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} f_{ij} + g_{ij} \quad \text{и} \quad p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\nu f_{i\nu} g_{\nu j}$$

Упражнение 5.11. Убедитесь, что умножение матриц с элементами из произвольного кольца R ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению, и если в кольце R есть единица $1 \in R$, то матрицы E_{ij}, определённые точно так же, как в прим. 5.5 на стр. 69, имеют ту же самую таблицу умножения (5-13), а единичная матрица $E = \sum E_{ii}$ является единицей кольца $\mathrm{Mat}_n(R)$.

Предостережение 5.1. Вычисления с матрицами, элементы которых лежат в некоммутативном кольце, требуют большей аккуратности, чем вычисления с матрицами, элементы которых лежат в поле, поскольку сомножители в произведениях матричных элементов нельзя перестав-

[1] Среди всех степеней, представленных в $\ker \mathrm{ev}_\xi$.
[2] В частности, любая квадратная матрица.

лять друг с другом и не на все ненулевые матричные элементы можно делить. Например, полученная нами в прим. 5.1 на стр. 64 формула для обратной матрицы с элементами из поля[1]

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee} \tag{5-15}$$

требует уточнения над кольцом, ибо использует деление.

Упражнение 5.12. Докажите, что матрица размера 2×2 над коммутативным кольцом с единицей обратима если и только если обратим её определитель, и в этом случае обратная матрица по-прежнему задаётся формулой (5-15).

Над некоммутативным кольцом формула (5-15) перестаёт быть верной, так как ни одна из матриц

$$A \cdot A^{\vee} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix}$$
$$A^{\vee} \cdot A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix},$$

вообще говоря, не равна матрице

$$\det A \cdot E = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}.$$

Упражнение 5.13. Покажите, что над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

обратимы тогда и только тогда, когда обратимы оба элемента на не содержащей нуля диагонали, и в этом случае

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -d^{-1}ca^{-1} & d^{-1} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1}ac^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.7 (обратимость унитреугольных матриц)
Диагональ, идущая из левого верхнего угла квадратной матрицы в правый нижний, называется *главной*. Если все стоящие под (соотв. над) главной диагональю элементы нулевые, матрица называется *верхней* (соотв. *нижней*) *треугольной*.

Упражнение 5.14. Проверьте, что верхние и нижние треугольные матрицы являются подкольцами в кольце матриц над любым ассоциативным кольцом.

Если в кольце коэффициентов есть единица, то треугольные матрицы с единицами на главной диагонали называются *унитреугольными*. Покажем, что каждая верхняя унитреугольная мат-

[1] См. формулу (5-8) на стр. 64.

рица $A = \left(a_{ij}\right)$ с элементами из любого ассоциативного кольца с единицей обратима, и обратная к ней матрица $B = A^{-1}$ тоже верхняя унитреугольная с наддиагональными элементами

$$\begin{aligned} b_{ij} = \sum_{s=0}^{j-i-1} (-1)^{s+1} \sum_{i<\nu_1<\ldots<\nu_s<j} a_{i\nu_1} a_{\nu_1\nu_2} a_{\nu_2\nu_3} \,\ldots\, a_{\nu_{s-1}\nu_s} a_{\nu_s j} = \\ = -a_{ij} + \sum_{i<k<j} a_{ik}a_{kj} - \sum_{i<k<\ell<j} a_{ik}a_{k\ell}a_{\ell j} + \sum_{i<k<\ell<m<j} a_{ik}a_{k\ell}a_{\ell m}a_{mj} - \cdots \,. \end{aligned} \tag{5-16}$$

Для этого запишем матрицу A в виде линейной комбинации базисных матриц[1] E_{ij}

$$A = E + \sum_{i<j} a_{ij}E_{ij} = E + N\,,$$

где матрица $N = \sum_{i<j} a_{ij}E_{ij}$ представляет собою наддиагональную часть матрицы A. В силу форм. (5-13) на стр. 69, коэффициент при E_{ij} в матрице N^k равен[2] нулю при $j - i < k$, а при $j - i \geqslant k$ представляет собою сумму всевозможных произведений

$$\underbrace{a_{i\nu_1} \cdot a_{\nu_1\nu_2} \cdot \,\cdots\, \cdot a_{\nu_{k-2}\nu_{k-1}} \cdot a_{\nu_{k-1}j}}_{k \text{ сомножителей}}\,, \quad \text{где} \quad i < \nu_1 < \nu_2 < \ldots \nu_{k-1} < j\,.$$

В частности $N^k = 0$ при всех k, больших размера матрицы A. Полагая $x = E$, $y = N$ в равенстве[3]

$$(x + y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + \cdots + (-1)^{m-2}xy^{m-2} + (-1)^{m-1}y^{m-1}) = x^m - y^m\,,$$

при достаточно большом m мы получим матричное равенство $A(E - N + N^2 - \cdots) = E$, откуда

$$A^{-1} = E - N + N^2 - N^3 + \ldots\,,$$

что и утверждалось.

[1] См. прим. 5.5 на стр. 69.

[2] Продуктивно представлять себе E_{ij} как стрелку, ведущую из числа j в число i на числовой прямой. Произведение k сомножителей E_{ij} отлично от нуля если и только если конец каждой стрелки совпадает с началом предыдущей, и в этом случае такое произведение равно сумме всех перемножаемых стрелок, рассматриваемых как целочисленные векторы на числовой прямой. Таким образом, каждое ненулевое произведение k стрелок имеет длину как минимум k, а разложения элемента E_{ij} в произведение k таких элементов находятся в биекции со всевозможными способами пройти из j в i за k шагов.

[3] Поскольку матрицы E и N коммутируют друг с другом, в результате этой подстановки мы получим верное матричное равенство.

Упр. 5.3. Первое равенство очевидно. Для доказательства второго положим $AB = C$, $B^tA^t = D$, тогда $c_{ij} = \sum\limits_k a_{ik}b_{kj} = \sum\limits_k a^t_{ki}b^t_{jk} = \sum\limits_k b^t_{jk}a^t_{ki} = d_{ji}$.

Упр. 5.5. Поскольку $(AB)^t = B^tA^t$, матрица B обратна матрице A если и только если матрица B^t обратна матрице A^t.

Упр. 5.7. Первое доказывается выкладкой $0 \cdot a = (b + (-1) \cdot b)a = ba + (-1)ba = 0$, второе — выкладкой $e' = e' \cdot e'' = e''$.

Упр. 5.8. Матрица $A = \sum_{ij} a_{ij}E_{ij}$ лежит в центре алгебры $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ если и только если $AE_{ij} = E_{ij}A$ для всех матричных единиц E_{ij}. В силу форм. (5-13) на стр. 69 это равносильно равенствам $a_{ii} = a_{jj}$ и $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$.

Упр. 5.9. Обозначим через $\mu_\xi \in \ker \mathrm{ev}_\xi$ какой-нибудь многочлен наименьшей (из числа имеющихся в $\ker \mathrm{ev}_\xi$) положительной степени со старшим коэффициентом 1. Деля произвольный многочлен $f \in \ker \mathrm{ev}_\xi$ на μ_ξ с остатком, получаем равенство $f(x) = \mu_\xi(x) \cdot q(x) + r(x)$, в котором многочлен r либо нулевой, либо не лежит в $\ker \mathrm{ev}_\xi$, так имеет $\deg r < \deg \mu_\xi$. Подставляя в это равенство $x = \xi$, убеждаемся, что имеет место первое. Тем самым, все многочлены $f \in \ker \mathrm{ev}_\xi$ делятся на μ_ξ. В частности, любой многочлен наименьшей (из числа имеющихся в $\ker \mathrm{ev}_\xi$) положительной степени со старшим коэффициентом 1 совпадает с μ_ξ.

Упр. 5.12. Так как $\det(FG) = \det F \cdot \det G$, беря определители обеих частей равенства $AA^{-1} = E$, заключаем, что $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, т. е. $\det F$ обратим. Наоборот, если $\det F$ обратим, то форм. (5-8) на стр. 64 выдаёт обратную к A матрицу, что проверяется прямым вычислением.

Упр. 5.13. Из равенства

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ dz & dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

вытекает, что $dw = 1$ и $dz = 0$. Тем самым, d обратим, $w = d^{-1}$, $z = 0$, и равенство $ax + bz = 1$ превращается в $ax = 1$, откуда a обратим и $x = a^{-1}$. Это позволяет переписать равенство $ay + bw = 0$ как $ay + bd^{-1} = 0$, откуда $y = -a^{-1}bd^{-1}$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} .$$

Остальные три случая разбираются аналогично, либо при помощи соотношений типа

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$