§4. Многомерие

4.1. Базисы и размерность. Рассмотрим произвольное векторное пространство V над любым полем $\Bbbk$. Будем говорить, что вектор $v \in V$ *линейно выражается* через векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$, если $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$ для некоторых $\lambda_i \in \Bbbk$. Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов $w_i \in V$ с коэффициентами $\lambda_i \in \Bbbk$. Набор векторов $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$ называется *порождающим* векторное пространство V, если каждый вектор $v \in V$ линейно через него выражается. Векторное пространство, порождённое конечным набором векторов, называется *конечномерным*. Порождающий набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ называется *базисом* векторного пространства V, если любой вектор $v \in V$ линейно выражается через него *единственным* образом, т. е. если из равенства

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

вытекает, что $x_i = y_i$ для всех i. Коэффициенты x_i единственного линейного выражения

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

называются *координатами* вектора v в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Например, в координатном векторном пространстве $\Bbbk^n$ из прим. 1.2 на стр. 8 векторы

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,, \tag{4-1}$$

с единицей на i-м месте и нулями в остальных местах образуют базис, поскольку произвольный вектор $v \in \Bbbk^n$ линейно выражается через них единственным способом:

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n\,. \tag{4-2}$$

Базис (4-1) называются *стандартным* базисом координатного пространства $\Bbbk^n$. Вскоре мы убедимся, что любое конечномерное векторное пространство V обладает базисом, причём все базисы в V состоят из одинакового числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$. Таким образом, $\dim \Bbbk^n = n$.

4.1.1. Линейная зависимость. Векторы $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \tag{4-3}$$

вытекает, что все $\lambda_i = 0$. Наоборот, если существует линейная комбинация (4-3), в которой хоть один коэффициент $\lambda_i \neq 0$, то векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ называются *линейно зависимыми*. Если между векторами есть линейная зависимость, то каждый вектор, входящий в неё с ненулевым коэффициентом, линейно выражается через остальные векторы. Например, если $\lambda_m \neq 0$ в линейной зависимости (4-3), то

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\, v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m}\, v_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\, v_{m-1}\,.$$

Наоборот, любое линейное выражение вида $v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}$ можно воспринимать как линейную зависимость $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0$. Обратите внимание, что любой набор векторов, содержащий нулевой вектор, линейно зависим, поскольку $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot v = 0$ для произвольного $v \in V$.

Лемма 4.1
Порождающий векторное пространство V набор векторов $\{e_\nu\}$ является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.

Доказательство. Если $\sum \lambda_i e_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $v = \sum x_i e_i$ допускает *другое* выражение $v = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$ через векторы e_i. Наоборот, любые два различных разложения $v = \sum x_i e_i = \sum y_i e_i$ влекут линейную зависимость $\sum (x_i - y_i) v_i = 0$. □

Лемма 4.2 (лемма о замене)
Если векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$ порождают пространство V, а $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ линейно независимы, то $m \geqslant k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор векторов

$$u_1, u_2, \dots, u_k,\ w_{k+1},\ w_{k+2},\ \dots\ ,\ w_m\,,$$

полученный заменой первых k из них на векторы u_i, тоже порождает V.

Доказательство. Пусть $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$. Так как векторы u_i линейно независимы, $u_1 \neq 0$ и среди коэффициентов x_i есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы w_i так, чтобы $x_1 \neq 0$. Поскольку вектор w_1 линейно выражается через u_1 и $w_2, \dots, w_m$:

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m\,,$$

векторы $u_1,\ w_2,\ w_3,\ \dots\ ,\ w_m$ порождают V. Далее действуем по индукции. Пусть для очередного $i < k$ векторы $u_1, u_2, \dots, u_i,\ w_{i+1},\ w_{i+2},\ \dots\ ,\ w_m$ порождают V. Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + x_{i+2} w_{i+2} + \dots + x_m w_m\,.$$

В силу линейной независимости векторов u_ν вектор u_{i+1} нельзя линейно выразить только через векторы $u_1, u_2, \dots, u_i$. Поэтому в предыдущем разложении присутствует с ненулевым коэффициентом хоть один из оставшихся векторов w_j. Следовательно, $m > i$ и мы можем занумеровать оставшиеся w_j так, чтобы $x_{i+1} \neq 0$. Теперь, как и на первом шагу, вектор w_{i+1} линейно выражается через векторы $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, w_{i+2},\ w_{i+3},\ \dots\ ,\ w_m$. Тем самым, эти векторы линейно порождают V, что воспроизводит индуктивное предположение. □

Теорема 4.1 (теорема о базисе)
В конечномерном векторном пространстве V каждый порождающий V набор векторов содержит в себе некоторый базис, все базисы состоят из одинакового количества векторов, и каждый линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса.

Доказательство. Поскольку векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, во всех базисах одинаковое число векторов. Если конечный набор векторов порождает V, то последовательно выкидывая из него векторы, линейно выражающиеся через остальные, мы придём к линейно независимому порождающему набору, т. е. к базису.

Если задан линейно независимый набор векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$, то по лемме о замене в любом базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V можно заменить некоторые k векторов e_i векторами u_i так, что полученный набор из n векторов останется порождающим. Он будет базисом, так как по уже доказанному содержит в себе некоторый базис из n векторов. □

Следствие 4.1
В n-мерном векторном пространстве V всякий линейно независимый набор из n векторов, а также всякий порождающий набор из n векторов являются базисами.

Доказательство. По лем. 4.2 при замене любого базиса любыми n линейно независимыми векторами получится порождающий набор, т. е. тоже базис. По теор. 4.1 любой порождающий набор из n векторов содержит в себе некоторый базис. Так как этот базис тоже состоит из n векторов, он совпадает с исходным набором. □

Следствие 4.2
Всякое n-мерное векторное пространство V над полем $\Bbbk$ изоморфно координатному пространству $\Bbbk^n$. Линейные изоморфизмы $\Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$ взаимно однозначно соответствуют базисам в V.

Доказательство. Если задан линейный изоморфизм $F : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^n$, то векторы[1] $v_i = F(e_i)$ образуют базис пространства V, и разным линейным отображениям отвечают разные базисы, поскольку из равенств $F(e_i) = G(e_i)$ для всех i вытекает, что и для любого вектора $v = \sum x_i e_i \in V$

$$F(v) = F\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i G(e_i) = G\left(\sum x_i e_i\right) = G(v)\,.$$

Наоборот, для любого базиса $v_1, v_2, \dots, v_n$ пространства V отображение

$$F : \Bbbk^n \to V\,, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n\,,$$

линейно, биективно и переводит e_i в v_i для всех i. □

Пример 4.1 (пространство функций)
Множество $\Bbbk^X$ всех функций $f : X \to \Bbbk$ на произвольном множестве X со значениями в произвольном поле $\Bbbk$ образует векторное пространство, в котором сложение функций и их умножение на числа задаётся обычными правилами:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &: x \mapsto f_1(x) + f_2(x) \\ \lambda f &: x \mapsto \lambda \cdot f(x)\,. \end{aligned}$$

Для n-элементного множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ пространство функций $\Bbbk^X$ изоморфно отображается на координатное пространство $\Bbbk^n$ сопоставлением функции f набора её значений $\big(f(1), f(2), \dots, f(n)\big)$. Этому изоморфизму отвечает базис из *δ-функций* $\delta_i : X \to \Bbbk$:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i\,. \end{cases}$$

Пример 4.2 (интерполяционная формула Лагранжа)
Зафиксируем $n+1$ различных чисел $a_0, a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$ и обозначим через $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ пространство многочленов степени не выше n. По определению многочленов, мономы $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуют базис в $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$, и $\dim \Bbbk[x]_{\leqslant n} = n + 1$. Для каждого $i = 0, 1, 2, \dots, n$ обозначим через

$$f_i(x) = \prod_{\nu \neq i}(x - a_\nu) : \prod_{\nu \neq i}(a_i - a_\nu)$$

[1] Здесь и далее $e_1, e_2, \dots, e_n \in \Bbbk^n$ обозначает стандартный базис в $\Bbbk^n$ из формулы форм. (4-1) на стр. 48.

многочлен степени n, зануляющийся во всех точках a_ν кроме точки a_i, а в точке a_i принимающий значение $f_i(a_i) = 1$. Многочлены f_i линейно независимы, так как подставляя в равенство

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$$

значение $x = a_i$, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Тем самым, многочлены f_i тоже образуют базис пространства $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$. Подставляя в разложение

$$g(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \dots + x_n f_n(x)$$

произвольного многочлена $g \in \Bbbk[x]_{\leqslant n}$ по базису $f_0, f_1, \dots, f_n$ значение $x = a_i$, мы заключаем, что $x_i = g(a_i)$, т. е. i-я координата многочлена g в базисе $f_0, f_1, \dots, f_n$ равна значению этого многочлена в точке a_i. Таким образом, для любого набора значений $b_0, b_1, \dots, b_n \in \Bbbk$ существует единственный такой многочлен $g \in \Bbbk[x]_{\leqslant n}$, что $g(a_i) = b_i$ для всех i, а именно —

$$g(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_n f_n(x)\,.$$

Пример 4.3 (конечные поля)
Пусть конечное поле $\mathbb{K}$ содержит подполе $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{K}$, состоящее из q элементов. Будучи конечномерным векторным пространством над $\mathbb{F}_q$, поле $\mathbb{K}$ находится в линейной биекции с координатным пространством $\mathbb{F}_q^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и, тем самым, состоит из q^n элементов. Применяя это наблюдение к простому подполю поля $\mathbb{K}$, состоящему из всех элементов вида[1]

$$\pm \frac{1 + \dots + 1}{1 + \dots + 1} \in \mathbb{K}$$

с ненулевым знаменателем, мы заключаем, что число элементов в любом конечном поле является степенью некоторого простого числа.

Упражнение 4.1 (по алгебре). Убедитесь, что простое подполе любого поля изоморфно либо полю $\mathbb{Q}$, либо полю вычетов $\mathbb{Z}/(p)$ по простому модулю $p \in \mathbb{N}$.

4.2. Подпространства. Пересечение любого множества подпространств в произвольном векторном пространстве V также является подпространством в V.

Упражнение 4.2. Убедитесь в этом.

Пересечение всех подпространств, содержащих данное множество векторов $M \subset V$, называется *линейной оболочкой* множества M и обозначается $\operatorname{span}(M)$. Это наименьшее по включению векторное подпространство в V, содержащее M. Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из M, ибо все такие линейные комбинации очевидным образом образуют векторное пространство и содержатся во всех векторных подпространствах, содержащих M.

Пример 4.4 (гиперплоскости)
Линейная оболочка $H = \operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ произвольных $(n-1)$ линейно независимых векторов в n-мерном векторном пространстве V является $(n-1)$-мерным подпространством. Такие подпространства называются *гиперплоскостями* в V. Если дополнить векторы v_i некоторым вектором v_n до базиса в V и обозначить через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ координаты относительно этого базиса, то гиперплоскость H можно описать как ГМТ x удовлетворяющих линейному

[1] Ср. с n° 2.4.1 на стр. 30.

уравнению $x_n = 0$. Покажем, что и наоборот, для любого ненулевого линейного отображения $\xi : V \to \Bbbk$ множество $\operatorname{Ann}\xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 0\}$ является гиперплоскостью.

Упражнение 4.3. Убедитесь, что $\operatorname{Ann}\xi \subset V$ является векторным подпространством.

Пусть векторы $u_1, u_2, \dots, u_m$ составляют базис подпространства $\operatorname{Ann}\xi$, а вектор v таков, что $\xi(v) \neq 0$. Векторы v, $u_1, u_2, \dots, u_m$ линейно независимы, ибо векторы u_i линейно независимы, а вектор $v \notin \operatorname{Ann}\xi$ через них не выражается. Для любого вектора $w \in V$ вектор

$$w - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v \in \operatorname{Ann}\xi$$

и, тем самым, линейно выражается через векторы u_i. Следовательно, векторы v, $u_1, u_2, \dots, u_m$ составляют базис в V, откуда $m = \dim V - 1$.

Упражнение 4.4. Покажите, что векторное пространство $\Bbbk^n$ над бесконечным полем $\Bbbk$ не является объединением конечного числа своих гиперплоскостей.

4.2.1. Сумма подпространств. Объединение векторных подпространств почти никогда не является векторным пространством. Например, прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ являются одномерными векторными подпространствами координатной плоскости $\Bbbk^2$, но сумма любого ненулевого вектора первого из них с любым ненулевым вектором второго не лежит в их объединении — скажем, $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.

Упражнение 4.5. Покажите, что объединение двух подпространств является векторным пространством если и только если одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения произвольного множества подпространств $U_\nu \subset V$ называется *суммой* подпространств U_ν и обозначается

$$\sum_\nu U_\nu \overset{\text{def}}{=} \operatorname{span} \bigcup_\nu U_\nu \,.$$

Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \,,\ u_2 \in U_2\}$$
$$U_1 + U_2 + U_3 = \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1 \,,\ u_2 \in U_2 \,,\ u_3 \in U_3\} \quad \text{и т. д.}$$

Определение 4.1

Подпространства $U_1, U_2 \subset V$ называются *трансверсальными*, если $U_1 \cap U_2 = 0$. Сумма трансверсальных подпространств называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2$. Трансверсальные подпространства U_1 и U_2 с $U_1 \oplus U_2 = V$, называются *дополнительными*.

Предложение 4.1

Подпространства $U_1, U_2 \subset V$ трансверсальны если и только если каждый вектор $w \in U_1 + U_2$ имеет единственное представление в виде $w = u_1 + u_2$ с $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$.

Доказательство. Равенство $u_1' + u_2' = u_1'' + u_2''$, где $u_i', u_i'' \in U_i$, влечёт равенство

$$u_1' - u_1'' = u_2'' - u_2' \,,$$

левая часть которого лежит в U_1, а правая — в U_2. Поэтому $u_1' - u_1'' = u_2'' - u_2' \in U_1 \cap U_2$. Если $U_1 \cap U_2 = 0$, то $u_1' = u_1''$ и $u_2' = u_2''$. Если же пересечение $U_1 \cap U_2$ содержит ненулевой вектор u, то нулевой вектор $0 \in U_1 + U_2$ имеет два различных разложения $0 = 0 + 0 = u + (-u)$. □

Определение 4.2 (прямая сумма набора подпространств)
Сумма конечного набора подпространств $U_1, U_2, \dots, U_n \subset V$ называется *прямой* и обозначается

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n ,$$

если каждый вектор $w \in \sum U_i$ имеет единственное представление $w = \sum u_i$, где $u_i \in U_i$, в том смысле, что равенство

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n , \quad \text{где} \quad u_i, w_i \in U_i \text{ при каждом } i , \tag{4-4}$$

возможно только когда $u_i = w_i$ при всех i. Например, пространство V является прямой суммой одномерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами $e_1, \dots, e_n$, если и только если эти векторы образуют в V базис.

Упражнение 4.6. Покажите, что сумма подпространств $U_1, \dots, U_m \subset V$ является прямой если и только если линейно независим любой набор ненулевых векторов $u_1, \dots, u_m$, в котором $u_i \in U_i$ при каждом i.

Предложение 4.2
Сумма подпространств является прямой если и только если каждое из подпространств трансверсально сумме всех остальных.

Доказательство. Если $U_i \cap \sum_{\nu \neq i} U_\nu$ содержит ненулевой вектор u, то этот вектор допускает два различных представления в виде суммы векторов $u_j \in U_j$: одно имеет вид

$$u = 0 + \cdots + 0 + u_i + 0 + \cdots + 0 ,$$

в котором отлично от нуля только i-е слагаемое $u_i = u \in U_i$, а второе — вид

$$u = u_1 + \cdots + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + \cdots + u_n ,$$

где $u_\nu \in U_\nu$ таковы, что вектор $u \in \sum_{\nu \neq i} U_\nu$ равен их сумме. Наоборот, если в равенстве (4-4) имеется $u_i \neq w_i$, то ненулевой вектор $u_i - w_i = \sum_{\nu \neq i}(w_\nu - u_\nu) \in U_i \cap \sum_{\nu \neq i} U_\nu$. □

4.2.2. Размерность суммы и пересечения. Из теоремы о базисе вытекает, что базис любого подпространства $U \subset V$ можно дополнить до базиса во всём пространстве. Поэтому любое подпространство U конечномерного пространства V тоже конечномерно, и $\dim U \leqslant \dim V$. Разность $\operatorname{codim}_V U \overset{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$ называется *коразмерностью* подпространства U в V.

Предложение 4.3
Для любых конечномерных подпространств U_1, U_2 в произвольном[1] векторном пространстве V выполняется равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$.

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис $u_1, u_2, \dots, u_k$ в $U_1 \cap U_2$ и дополним его векторами $v_1, v_2, \dots, v_r$ и $w_1, w_2, \dots, w_s$ до базисов в подпространствах U_1 и U_2 соответственно. Достаточно показать, что векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$, $v_1, v_2, \dots, v_r$, $w_1, w_2, \dots, w_s$ образуют базис пространства

[1] Не обязательно конечномерном.

$U_1 + U_2$. Ясно, что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$ и $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$ в отдельности линейно независим, в линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \dots + \eta_s w_s = 0$$

присутствуют как векторы v_i, так и векторы w_j. Перенося $u_1, u_2, \dots, u_k$, $v_1, v_2, \dots, v_r$ в одну часть, а $w_1, w_2, \dots, w_s$ — в другую, получаем равенство между вектором из U_1 и вектором из U_2, означающее, что этот вектор лежит в пересечении $U_1 \cap U_2$. Но тогда в его разложении по базисам пространств U_1 и U_2 нет векторов v_i и w_j — противоречие. □

Следствие 4.3
Для любых подпространств U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geqslant \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V)\,.$$

В частности, $U_1 \cap U_2 \neq 0$ при $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из предл. 4.3 и неравенства $\dim(U_1 + U_2) \leqslant \dim V$. □

Следствие 4.4
Трансверсальные векторные подпространства U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V дополнительны тогда и только тогда, когда $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$.

Доказательство. При $U_1 \cap U_2 = 0$, равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$ равносильно равенству $\dim(U_1 + U_2) = \dim V$, означающему, что $U_1 + U_2 = V$. □

4.3. Аффинная геометрия. Пусть множество A является аффинным пространством[1] над векторным пространством V. Для любой точки $p \in A$ и любого векторного подпространства $U \subset V$ множество точек

$$\Pi(p, U) = p + U = \{\tau_u(p) \mid u \in U\}$$

называется проходящим через точку p *аффинным подпространством* в A с *направляющим векторным подпространством* U. Размерность аффинного пространства $\Pi(p, U)$ по определению полагается равной размерности $\dim U$ его направляющего векторного подпространства.

Пример 4.5 (прямые и плоскости)
Аффинные подпространства $p + U$, где $\dim U = 1, 2$ называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида $p + vt$, где p — некоторая точка, v — ненулевой вектор, а t пробегает $\Bbbk$. Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида $p + \lambda u + \mu w$, где p — некоторая точка, u, w — пара непропорциональных векторов, а λ, μ независимо пробегают $\Bbbk$. Отметим, что к любой такой плоскости применимо всё сказанное нами в §§ 1, 2.

Предложение 4.4
Аффинные подпространства $p + U$ и $q + W$ пересекаются если и только если $\overrightarrow{pq} \in U + W$, и в этом случае их пересечение является аффинным пространством с направляющим векторным пространством $U \cap W$.

[1] См. n° 1.4 на стр. 13.

Доказательство. Равенство $\overrightarrow{pq} = u + w$ равносильно равенству $p + u = q - w$, означающему, что точка $r = p + u = q - w \in (p + U) \cap (q + W)$. Если такая точка r существует, то для любой лежащей в пересечении $(p + U) \cap (q + W)$ точки $r' = p + u' = q - w'$ вектор $\overrightarrow{rr'} = u' - u = w - w' \in U \cap W$. Наоборот, для любого вектора $v \in U \cap W$ точка $r + v$ лежит в $(p + U) \cap (q + W)$. □

Следствие 4.5

Следующие условия на аффинные подпространства $p + U$ и $q + U$ с одним и тем же направляющим подпространством $U \subset V$ эквивалентны: (1) $\overrightarrow{pq} \in U$ (2) $p \in q + U$ (3) $q \in p + U$ (4) $p + U = q + U$ (5) $(p + U) \cap (q + W) \neq \varnothing$. □

Предложение 4.5

Точки $p_0, p_1, \dots, p_k$ аффинного пространства $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда не содержатся ни в каком $(k-1)$-мерном аффинном подпространстве, когда векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$ линейно независимы, и в этом случае через точки $p_0, p_1, \dots, p_k$ проходит единственное k-мерное аффинное подпространство.

Доказательство. Линейная зависимость k векторов $\overrightarrow{p_0p_i}$ равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше $k - 1$. Это в свою очередь означает, что в V найдётся $(k-1)$-мерное векторное подпространство U, содержащее все векторы $\overrightarrow{p_0p_i}$. Последнее равносильно тому, что $(k-1)$-мерное аффинное подпространство $p_0 + U$ содержит все точки p_i. Если векторы $\overrightarrow{p_0p_i}$ линейно независимы, то они составляют базис в любом содержащем их k-мерном векторном подпространстве $U \subset V$, и значит, любое такое подпространство совпадает с их линейной оболочкой. Поскольку прохождение аффинного пространства $p_0 + U$ через все точки p_i равносильно тому, что всевекторы $\overrightarrow{p_0p_i}$ лежат в U, мы заключаем, что такое пространство $p_0 + U$ ровно одно и его направляющее векторное пространство U представляет собою линейную оболочку векторов $\overrightarrow{p_0p_i}$. □

Пример 4.6 (аффинный репер)

В n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$, ассоциированным с векторным пространством V, каждый набор из $n + 1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ задаёт систему аффинных координат с началом в точке p_0 и базисными векторами $e_i = \overrightarrow{p_0p_i} \in V$ в том смысле, что точки $q \in \mathbb{A}^n$ оказываются в биекции с наборами таких чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что

$$\overrightarrow{p_0q} = x_1 \cdot \overrightarrow{p_0p_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{p_0p_2} + \dots + x_n \cdot \overrightarrow{p_0p_n}\,.$$

В самом деле, по определению аффинного пространства, сопоставление точке $q \in \mathbb{A}^n$ вектора $\overrightarrow{p_0q} \in V$ задаёт биекцию между точками и векторами. Так как точки p_i не лежат в одной гиперплоскости, n векторов e_i линейно независимы и составляют базис в V. Сопоставление вектору его координат в этом базисе задаёт линейную биекцию $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}^n$.

4.4. Линейные и аффинные отображения. Линейные отображения $F : U \to W$ между двумя векторными пространствами U и W над полем $\mathbb{k}$ также образуют векторное пространство относительно операций поточечного сложения значений и умножения их на константы:

$$F + G : v \mapsto F(v) + G(v) \quad \text{и} \quad \lambda F : v \mapsto \lambda \cdot F(v)\,.$$

Упражнение 4.7. Убедитесь, что отображение $\lambda F + \mu G$ линейно для любых линейных отображений $F, G : U \to W$ и что для любых линейных отображений $H : V \to U$ и $K : W \to V$ выполняются равенства $(\lambda F + \mu G)\,H = \lambda FH + \mu GH$ и $K\,(\lambda F + \mu G) = \lambda KF + \mu KG$.

Векторное пространство линейных отображений $U \to W$ обозначается $\mathrm{Hom}(U, W)$ или же через $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W)$, если важно подчеркнуть, над каким полем рассматриваются пространства.

4.4.1. Ядро и образ. С каждым линейным отображением $F : V \to W$ связаны его

ядро $\ker F \overset{\text{def}}{=} F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$ и

образ $\operatorname{im} F \overset{\text{def}}{=} F(V) = \{w \in W \mid \exists\, v \in V : F(v) = w\}$.

Упражнение 4.8. Убедитесь, что $\ker F \subset V$ и $\operatorname{im} F \subset W$ являются векторными подпространствами.

Поскольку равенства $F(v_1) = F(v_2)$ и $F(v_1 - v_2) = 0$ для линейного отображения F эквивалентны друг другу, два вектора $v_1, v_2 \in V$ тогда и только тогда переводятся отображением F в один и тот же вектор $w = F(v_1) = F(v_2) \in \operatorname{im} F$, когда $v_1 - v_2 \in \ker F$. Иными словами,

$$F^{-1}\big(F(v)\big) = v + \ker F\,, \tag{4-5}$$

т. е. полный прообраз любого вектора $w \in \operatorname{im} F$ является *параллельным сдвигом* векторного подпространства $\ker F$ на произвольный вектор $v \in F^{-1}(w)$. В частности, мы получаем

Предложение 4.6
Линейное отображение F инъективно тогда и только тогда, когда $\ker F = 0$. □

Предложение 4.7
Если V конечномерно, то для любого линейного отображения $F : V \to W$

$$\dim \ker F + \dim \operatorname{im} F = \dim V\,. \tag{4-6}$$

Доказательство. Выберем базис $u_1, u_2, \dots, u_k \in \ker F$, дополним его векторами $e_1, e_2, \dots, e_m$ до базиса в V и покажем, что векторы $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_m)$ образуют базис в $\operatorname{im} F$. Они порождают образ, т. к. для любого вектора $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j \in V$

$$F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j)\,.$$

Они линейно независимы, поскольку равенство $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$ означает, что $\sum \lambda_i e_i$ лежит в $\ker F$, т. е. является линейной комбинацией векторов u_i, что возможно только когда все $\lambda_i = 0$. □

Следствие 4.6
Следующие свойства линейного отображения $F : V \to V$ из пространства V в себя эквивалентны друг другу: (1) F изоморфизм (2) $\ker F = 0$ (3) $\operatorname{im} F = V$.

Доказательство. Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по предл. 4.7, а их одновременное выполнение равносильно (1) по предл. 4.6. □

Пример 4.7 (интерполяция с кратными узлами, продолжение прим. 4.2)
Зафиксируем, как и в прим. 4.2 на стр. 50, несколько различных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Bbbk$, однако теперь зададим для каждого числа a_i несколько произвольных значений $b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{im_i} \in \Bbbk$. Пусть общее число заданных значений $(m_1 + 1) + \dots + (m_n + 1) = m + 1$. Покажем, что существует единственный такой многочлен $g \in \Bbbk[x]$ степени не выше m, что при каждом i сам

этот многочлен и первые его m_i производных принимают в точке a_i заданные $m_i + 1$ значений $g^{(j)}(a_i) = b_{ij}$, где $0 \leqslant j \leqslant m_j$, $i = 1, \dots, n$ и $g^{(k)}(x) = d^k g(x)/dx^k$ означает k-ю производную от многочлена g, причём для единообразия обозначений мы полагаем $g^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} g$. Занумеруем $m + 1$ пар чисел (i, j) с $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m_j$ произвольным образом и выпишем их в одну строчку в порядке возрастания номеров. Рассмотрим отображение $F : \Bbbk[x]_{\leqslant m} \to \Bbbk^{m+1}$, переводящее каждый многочлен g степени $\deg g \leqslant m$ в набор значений $g^{(j)}(a_i) = b_{ij}$, записанных в зафиксированном только что порядке.

Упражнение 4.9. Убедитесь, что отображение F линейно и $\ker F = 0$.

Так как $\dim \operatorname{im} F = \dim \Bbbk[x]_{\leqslant m} = \dim \Bbbk^{m+1}$, мы заключаем, что отображение F биективно, что и требовалось.

Пример 4.8 (проекции)

С каждой парой дополнительных подпространств[1] $U, W \subset V = U \oplus W$ связаны сюрьективные линейные отображения $\pi_U : V \twoheadrightarrow U$, $u + w \mapsto u$, и $\pi_W : V \twoheadrightarrow U$, $u + w \mapsto w$, которые называются *проекциями* пространства V, соответственно, на подпространство U вдоль подпространства W и на подпространство W вдоль подпространства U. Первая из них имеет $\ker \pi_U = W$ и тождественно действует на U, а вторая имеет $\ker \pi_W = U$ и тождественно действует на W. Проекции π_U и π_W, рассматриваемые как линейные эндоморфизмы $V \to V$, удовлетворяют соотношениям $\pi_U \pi_W = \pi_W \pi_U = 0$, $\pi_U + \pi_W = \mathrm{Id}_V$, $\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$, $\pi_W \circ \pi_W = \pi_W$.

Упражнение 4.10. Покажите, что если линейный эндоморфизм $F : V \to V$ удовлетворяет соотношению $F^2 = F$, то $V = \ker F \oplus \operatorname{im} F$, и F является проекцией V на $\operatorname{im} F$ вдоль $\ker F$, а оператор $G = \mathrm{Id}_V - F$ тоже удовлетворяет соотношению[2] $G^2 = G$ и является проекцией V на $\ker F$ вдоль $\operatorname{im} F$.

4.4.2. Матрица линейного отображения. Зафиксируем в пространствах U и W базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m \in W\,, \tag{4-7}$$

и для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ разложим вектор $F(u_j)$ по базису $w_1, w_2, \dots, w_m$

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot f_{ij}\,. \tag{4-8}$$

Составленная из коэффициентов f_{ij} прямоугольная таблица[3]

$$\big(F(u_1),\ F(u_2),\ \dots,\ F(u_n)\big) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)\,, \tag{4-9}$$

j-й столбец которой содержит написанные сверху вниз координаты вектора $F(u_j)$, называется *матрицей отображения F в базисах $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$* и $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$. Мы будем обо-

[1] Напомню, что это означает, что $V = U \oplus W$, т. е. $U + W = V$ и $U \cap W = 0$, см. опр. 4.1 на стр. 52.

[2] А также соотношениям $GF = FG = 0$.

[3] Ср. с n° 2.1.2 на стр. 23.

значать эту матрицу через $F_{\boldsymbol{wu}}$ или $\left(f_{ij}\right)$. Она полностью описывает действие линейного отображения F на любой вектор $v = \sum u_j x_j \in U$, поскольку

$$F(v) = F\left(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} F(u_j)\cdot x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot f_{ij} x_j\,. \tag{4-10}$$

Обозначая через $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ и $F(\boldsymbol{u}) = \big(F(u_1),\, F(u_2),\, \dots\,,\, F(u_n)\big)$ матрицы-строки, элементами которых являются векторы, а через

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

матрицы-столбцы, составленные из чисел — координат векторов v и $F(v)$ в базисах $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$, мы получаем матричные равенства[1] $v = \boldsymbol{u}\,x$, $F(v) = \boldsymbol{w}\,y$, $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\,F_{\boldsymbol{wu}}$ и можем переписать вычисление (4-10) в виде $F(v) = F(\boldsymbol{u}x) = F(\boldsymbol{u})\,x = \boldsymbol{w}\,F_{\boldsymbol{wu}}\,x$, откуда $y = F_{\boldsymbol{wu}}\,x$. Таким образом, линейное отображение $F : U \to W$, имеющее матрицу $F_{\boldsymbol{wu}}$ в базисах (4-7), переводит вектор со столбцом координат x в базисе $\boldsymbol{u}$ в вектор со столбцом координат $F_{\boldsymbol{wu}}\,x$ в базисе $\boldsymbol{w}$, т. е. в терминах координатных столбцов действует по правилу

$$x \mapsto F_{\boldsymbol{wu}}\,x \tag{4-11}$$

Упражнение 4.11. Убедитесь, что при сложении линейных отображений и умножении их на числа матрицы этих отображений поэлементно складываются и умножаются на те же самые числа.

Предложение 4.8

Выбор базисов $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ в пространствах U, W задаёт линейный изоморфизм векторного пространства $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W)$ линейных отображений $U \to W$ с векторным пространством $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk) \simeq \Bbbk^{mn}$ матриц размера $m \times n$, сопоставляющий линейному отображению его матрицу в выбранных базисах:

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)\,, \quad F \mapsto F_{\boldsymbol{wu}}\,, \tag{4-12}$$

В частности, $\dim \mathrm{Hom}(U, W) = \dim U \cdot \dim W$.

Доказательство. Линейность отображения (4-12) вытекает из упр. 4.11. Если матрица $F_{\boldsymbol{wu}}$ нулевая, то и задаваемое ею линейное отображение (4-11) тождественно нулевое, т. е. линейное отображение (4-12) имеет нулевое ядро, а значит, инъективно. Поскольку любая матрица $F_{\boldsymbol{wu}}$ задаёт по формуле (4-11) линейное отображение $F : U \to W$, отображение (4-12) также и сюрьективно. □

Следствие 4.7

Для любого набора из $n+1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ в n-мерном аффинном пространстве A и произвольного набора из $n+1$ точек $q_0, q_1, \dots, q_n$ любого аффинного пространства B существует единственное такое аффинное отображение[2] $\varphi : A \to B$, что $\varphi(p_i) = q_i$ при всех i.

[1] Напомню, что произведение матриц было определено в n° 2.1.2, см. форм. (2-5) на стр. 24

[2] См. n° 2.1 на стр. 22.

Доказательство. Обозначим через U и W векторные пространства, подлежащие аффинным пространствам A и B. Если отображение φ существует, то его дифференциал[1] $D_\varphi : U \to W$ переводит n векторов $\overrightarrow{p_0 p_i}$, составляющих базис векторного пространства U, в заданные n векторов $\overrightarrow{q_0 q_i} \in W$. Как мы видели выше, линейное отображение D_φ с таким свойством существует, единственно и переводит вектор $u = \sum x_i \cdot \overrightarrow{p_0 p_i}$ в вектор $D_\varphi(u) = \sum x_i \cdot \overrightarrow{q_0 q_i}$. Поэтому аффинное отображение φ тоже существует, единственно и переводит точку $a = p_0 + \sum x_i \cdot \overrightarrow{p_0 p_i}$ в точку $\varphi(a) = q_0 + \sum x_i \cdot \overrightarrow{q_0 q_i}$. □

Следствие 4.8

Аффинное отображение из n-мерного аффинного пространства в себя биективно если и только если оно переводит какие-нибудь $n+1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек в точки, также не лежащие в одной гиперплоскости. Для любых двух упорядоченных наборов из $n+1$ точек, в каждом из которых точки не лежат в одной гиперплоскости, существует единственное биективное аффинное преобразование, переводящее первый набор во второй.

Доказательство. Аффинное отображение биективно если и только если биективен его дифференциал. Дифференциал биективен если и только если он переводит базис в базис. Векторы, соединяющие одну из $n+1$ точек со всеми остальными, образуют базис если и только если эти $n+1$ точек не лежат в одной гиперплоскости. □

4.5. Фактор пространства. Рассмотрим произвольное векторное пространство V и зафиксируем в нём некоторое подпространство $U \subset V$. Проходящее через точку $v \in \mathbb{A}(V)$ аффинное подпространство $v + U$ с направляющим подпространством U можно трактовать как *класс эквивалентности* вектора v по модулю сдвигов на векторы из подпространства U. Такой класс обычно обозначают через $[v]_U = v \pmod{U} = \{w \in V \mid w - v \in U\}$ и называют *классом вычетов* вектора v по модулю U. На множестве классов вычетов имеется естественная структура векторного пространства, в котором сложение и умножение на числа наследуются из V и задаются правилами $[v]_U + [w]_U \overset{\text{def}}{=} [v + w]$ и $\lambda[v] \overset{\text{def}}{=} [\lambda v]$.

Упражнение 4.12. Проверьте, что эти определения корректны и задают на множестве классов структуру векторного пространства над полем $\Bbbk$.

Пространство классов вычетов по модулю подпространства U обозначается V/U и называется *фактор пространством* пространства V по подпространству U. Повторюсь, что на геометрическом языке векторами фактор пространства V/U являются всевозможные аффинные подпространства в $\mathbb{A}(V)$ с заданным направляющим подпространством $U \subset V$.

Линейное сюрьективное отображение $V \twoheadrightarrow V/U$, $v \mapsto [v]$, переводящее каждый вектор $v \in V$ в содержащий его класс $[v]$, называется *отображением факторизации*.

Пример 4.9 (фактор по ядру)

Каждое линейное отображение $F : V \to W$ задаёт изоморфизм $V/\ker F \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} F$, сопоставляющий классу $[v] \in V/\ker F$ вектор $F(v) \in \operatorname{im} F$. Это переформулировка того, что

$$F(v) = F(w) \iff v - w \in \ker F$$

(ср. с форм. (4-5) на стр. 56).

[1] См. n° 2.1.1 на стр. 23.

Пример 4.10 (линейная оболочка как фактор)
Линейная оболочка $W = \mathrm{span}(w_1, w_2, \dots, w_m) \subset V$ произвольного набора из m векторов w_m векторного пространства V является образом линейного отображения $F : \Bbbk^m \to V$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \Bbbk^m$ в вектор $w_i \in W$. Ядро этого отображения $U = \ker F \subset \Bbbk^m$ представляет собою *пространство линейных соотношений* между образующими векторами w_i пространства W в том смысле, что вектор

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \in \Bbbk^m$$

лежит в U тогда и только тогда, когда $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m = 0$ в W. Изоморфизм

$$W = \mathrm{im}\, F \simeq \Bbbk^n / U$$

из предыдущего прим. 4.9 в данном случае утверждает, что векторы $w \in W$ можно трактовать как классы вычетов всевозможных формальных линейных комбинаций $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$ по модулю тех комбинаций, что являются линейными зависимостями между векторами w_i.

Предложение 4.9
Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ дополняют некоторый базис $u_1, u_2, \dots, u_m$ подпространства $U \subset V$ до базиса во всём пространстве V, то классы $[v_1]$, $[v_2]$, … , $[v_k]$ их вычетов по модулю U образуют базис фактор пространства V / U. В частности, $\dim U + \dim V / U = \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из предл. 4.7 на стр. 56 и его доказательства, применённых к линейному отображению факторизации $V \twoheadrightarrow V / U$. Повторим проведённое там рассуждение ещё раз на языке классов вычетов. Классы $[v_i]$ линейно независимы в V / U, поскольку наличие для некоторых $\lambda_i \in \Bbbk$ равенства $\lambda_1 [v_1] + \lambda_2 [v_2] + \dots + \lambda_k [v_k] = [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k] = [0]$ в пространстве V/U означает, что для некоторых $\mu_j \in \Bbbk$ в пространстве V выполняется равенство $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m$, возможное только когда все $\lambda_i = 0$ и все $\mu_j = 0$. Классы $[v_i]$ линейно линейно порождают V / U, поскольку для любого вектора

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m \in V$$

класс $[v] = [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k] = \lambda_1 [v_1] + \lambda_2 [v_2] + \dots + \lambda_k [v_k]$ в V / U. □

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. См. стр. 28 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf.

Упр. 4.4. Пусть $\Bbbk^n = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m$, где гиперплоскость $U = \operatorname{Ann} \xi_i \subset \Bbbk^n$ задаётся линейным уравнением $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi_{i1}x_1 + \xi_{i1}x_2 + \cdots + \xi_{in}x_n = 0$. Произведение всех линейных форм $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является ненулевым многочленом m-й степени от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но при этом задаёт тождественно нулевую функцию $\Bbbk^n \to \Bbbk$. Индукцией по n покажите, что над бесконечным такое невозможно.

Упр. 4.5. Пусть $W \not\subseteq U$ два подпространства в V. Выберем вектор $w \in W \smallsetminus U$. Если $W \cup U$ — подпространство, то $\forall\, u \in U \quad w + u \in W \cup U$. Поскольку $w + u \notin U$ (т. к. $w \notin U$), $w + u \in W$, откуда $u \in W$, т. е. $U \subset W$.

Упр. 4.8. Поскольку $\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$, любая линейная комбинация векторов из образа лежит в образе, а векторов из ядра — в ядре. Так как $F(\vec{0}) = F(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot F(\vec{0}) = 0$, ядро содержит нулевой вектор. Образ содержит нулевой вектор, поскольку $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$, откуда $0 = F(0)$.

Упр. 4.9. Линейность F вытекает из того, что отображение дифференцирования $d/dx : f \mapsto f'$ линейно. Если $g \in \ker F$, то каждое число $a_i \in \Bbbk$ является как минимум $(m_i + 1)$-кратным корнем многочлена g, и g делится на $\prod_i (x - a_i)^{m_i+1}$, что невозможно при $g \neq 0$, поскольку степень этого произведения равна $m + 1 > \deg g$.

Упр. 4.10. Если $F^2 = F$, то для любого вектора $v \in V$ вектор $v - F(v) \in \ker F$, ибо $F(v - F(v)) = F(v) - F^2(v) = 0$. Тем самым $imF + \ker F = V$. Если $v = F(w) \in \ker F \cap \operatorname{im} F$, то $v = F(w) = F^2(w) = F(v) = 0$. Тем самым, $V = \ker F \oplus \operatorname{im}$. Предыдущая выкладка показывает, что F тождественно действует на $\operatorname{im} F$. Тем самым, $F(u + w) = w$ для любых $u \in \ker F$, $w \in \operatorname{im} F$.

Упр. 4.12. Если $v_1 = v_2 + u$ и $w_1 = w_2 + u'$, где $u, u' \in U$, то $v_1 + w_1 = (v_2 + w_2) + (u + u')$ и $\lambda v_1 = \lambda v_2 + \lambda u$. Выполнение аксиом векторного пространства наследуется из V.