# Задачи для подготовки к контрольной №7

**ПК7◇1.** Постройте рациональные параметризации аффинных коник

**а)** $-4x^2 + 28xy + 8x - 28y^2 - 12y - 1 = 0$

**б)** $-12x^2 - 44xy - 65y^2 + 10y - 1 = 0$

**в)** $-20x^2 - 36xy - 8x - 28y^2 - 4y - 1 = 0$.

ОТВЕТ: с точностью до дробно линейного преобразования параметра $t$
в (а) $x = (-t^2 - 2t + 1)/(6t^2 + 6t - 2)$, $y = (-2t^2 - 2t + 1)/(6t^2 + 6t - 2)$;
в (б) $x = (-23t^2 + 12t - 2)/(54t^2 - 28t + 5)$, $y = (12t^2 - 6t + 1)/(54t^2 - 28t + 5)$;
в (в) $x = (-5t^2 + 6t - 3)/(14t^2 - 18t + 10)$, $y = (2t^2 - 2t + 1)/(14t^2 - 18t + 10)$.

**ПК7◇2.** Доподлинно выясните, совпадают ли Ваши ответы к предыдущей задаче с указанными в ней ответами с точностью до дробно линейного преобразования параметра $t$.

**ПК7◇3.** В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ определите тип, укажите начальную точку и направления координатных осей канонического ортонормального репера и напишите в нём уравнение квадрики, заданной в стандартном ортонормальном базисе уравнением

**а)** $14x^2 + 4xy - 8xz - 48x + 17y^2 + 4yz - 12y + 14z^2 + 96z = -162$

**б)** $5x^2 - 4xy - 4xz + 18x + 2y^2 - 8yz + 2z^2 = -3$

**в)** $-19x^2 + 28xy - 56xz + 150x + 2y^2 + 28yz - 48y - 19z^2 + 150z = 180$

**г)** $11x^2 - 20xy + 4xz - 60x + 14y^2 + 16yz + 30y + 20z^2 + 21z = -18$

**д)** $4x^2 + 8xy - 12xz - 14x - 4yz + 8y + 5z^2 + 26z = 27$

**е)** $4x^2 - 28xy + 4xz - 12x + 13y^2 - 32yz - 48y + 19z^2 + 66z = -63$

ОТВЕТ: в (а) эллипсоид $\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(2/3,\ 2/3,\ -10/3)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (2/3,\ -1/3,\ 2/3)$ , $e_2 = (-1/3,\ 2/3,\ 2/3)$ , $e_3 = (-2/3,\ -2/3,\ 1/3)$ .
в (б) связный гиперболоид $x_1^2 + x_2^2 - \frac{x_3^2}{2} = 1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(-1,\ 1,\ 1)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (-2/3,\ 2/3,\ -1/3)$ , $e_2 = (2/3,\ 1/3,\ -2/3)$ , $e_3 = (-1/3,\ -2/3,\ -2/3)$ .
в (в) несвязный гиперболоид $\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - 3x_3^2 = -1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(1,\ -2,\ 1)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (1/3,\ -2/3,\ -2/3)$ , $e_2 = (2/3,\ 2/3,\ -1/3)$ , $e_3 = (2/3,\ -1/3,\ 2/3)$ .
в (г) элиптический параболоид $3x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 0$ в ортонормальном репере с началом в точке $(1/3,\ -5/3,\ 1/3)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (-2/3,\ -2/3,\ 1/3)$ , $e_2 = (-2/3,\ 1/3,\ -2/3)$ , $e_3 = (1/3,\ -2/3,\ -2/3)$ .
в (д) гиперболический параболоид $3x_1 + 2x_2^2 - \frac{x_3^2}{2} = 0$ в ортонормальном репере с началом в точке $(2/3,\ 7/3,\ 1/3)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (1/3,\ 2/3,\ 2/3)$ , $e_2 = (-2/3,\ -1/3,\ 2/3)$ , $e_3 = (2/3,\ -2/3,\ 1/3)$ .
в (е) конус $2x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_3^2}{2} = 0$ в ортонормальном репере с началом в точке $(1/3,\ -2/3,\ -7/3)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (1/3,\ -2/3,\ 2/3)$ , $e_2 = (2/3,\ -1/3,\ -2/3)$ , $e_3 = (2/3,\ 2/3,\ 1/3)$ .

**ПК7◇4.** Центр $c_1$ сферы радиуса 9 находится на расстоянии 8 от центра $c_2$ сферы радиуса 4. Опишите все инверсии, переводящие первую сферу во вторую.

ОТВЕТ: инверсия с центром $-\frac{4}{5}c_1 + \frac{9}{5}c_2$ и квадратом радиуса 1404

**ПК7◇5.** Центр $c_1$ сферы радиуса 8 находится на расстоянии 1 от центра $c_2$ сферы радиуса 3. Опишите все инверсии, переводящие эти две сферы в пару концентрических сфер.

ОТВЕТ: центр инверсии находится в точке $\left(-27 - 12\sqrt{5}\right) \cdot c_1 + \left(12\sqrt{5} + 28\right) \cdot c_2$ или в точке $\left(-27 + 12\sqrt{5}\right) \cdot c_1 + \left(-12\sqrt{5} + 28\right) \cdot c_2$, а радиус может быть любым отличным от расстояний от центра инверсии до центров двух данных сфер.

**ПК7◇6.** Сфера $A$ с центром $a$ имеет радиус 4, центр $b$ сферы $B$ радиуса 1 находится на расстоянии 2 от $a$. Найдите неподвижные точки композиции инверсий $\sigma_B \circ \sigma_A$.

ОТВЕТ: две лежащие на линии центров точки:

$$\left(-\frac{11}{8} + \frac{\sqrt{105}}{8}\right) a + \left(-\frac{\sqrt{105}}{8} + \frac{19}{8}\right) b \quad \text{и} \quad \left(-\frac{11}{8} - \frac{\sqrt{105}}{8}\right) a + \left(\frac{\sqrt{105}}{8} + \frac{19}{8}\right) b\,.$$