Задачи для подготовки к контрольной № 6

ПК6◇1. Постройте рациональные параметризации аффинных коник

а) $-4x^2 + 28xy + 8x - 28y^2 - 12y - 1 = 0$

б) $-12x^2 - 44xy - 65y^2 + 10y - 1 = 0$

в) $-20x^2 - 36xy - 8x - 28y^2 - 4y - 1 = 0$.

ОТВЕТ: с точностью до дробно линейного преобразования параметра t
в (а) $x = (-t^2 - 2t + 1)/(6t^2 + 6t - 2)$, $y = (-2t^2 - 2t + 1)/(6t^2 + 6t - 2)$;
в (б) $x = (-23t^2 + 12t - 2)/(54t^2 - 28t + 5)$, $y = (12t^2 - 6t + 1)/(54t^2 - 28t + 5)$;
в (в) $x = (-5t^2 + 6t - 3)/(14t^2 - 18t + 10)$, $y = (2t^2 - 2t + 1)/(14t^2 - 18t + 10)$.

ПК6◇2. Доподлинно выясните, совпадают ли Ваши ответы к предыдущей задаче с указанными в ней ответами с точностью до дробно линейного преобразования параметра t.

ПК6◇3. Для гомографии $\varphi : \mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) \rightleftarrows \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ найдите прообраз точки

а) $13/23$, если φ переводит $1/2$ в $4/7$, $4/7$ в $29/51$, а $5/8$ в $17/30$,

б) $-62/35$, если φ переводит $-1/3$ в $-7/4$, $-2/7$ в $-16/9$, а $-3/10$ в $-23/13$,

в) $-76/163$, если φ переводит $-1/3$ в $-1/2$, $-2/7$ в $-8/17$, а $-5/18$ в $-7/15$.

ОТВЕТ: в (а) $\frac{2}{3}$, двойное отношение точек-образов $[\frac{4}{7}, \frac{29}{51}, \frac{17}{30}, \frac{13}{23}] = \frac{4}{3}$; в (б) $-\frac{8}{27}$, двойное отношение точек-образов $[-\frac{7}{4}, -\frac{16}{9}, -\frac{23}{13}, -\frac{62}{35}] = \frac{2}{3}$; в (в) $-\frac{18}{65}$, двойное отношение точек-образов $[-\frac{1}{2}, -\frac{8}{17}, -\frac{7}{15}, -\frac{76}{163}] = \frac{12}{11}$.

ПК6◇4. Найдите неподвижные точки инволюции $\sigma : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightleftarrows \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, если

а) $\sigma(-4) = \infty$, а $\sigma(-1) = 3/2$ **б)** $\sigma(2/3) = 3$, а $\sigma(-2/3) = 1/4$ **в)** $\sigma(2) = 1$, а $\sigma(4/3) = 4$.

ОТВЕТ: в (а) $(-1 : -8+\sqrt{66})$ и $(-1 : -\sqrt{66}-8)$ (уравнения прямых, соединяющих квадраты соответственных точек, имеют коэффициенты $(0,1,4)$ и $(-2,1,3)$, и эти прямые пересекаются в точке $(-1,-8,2)$); в (б) $(-8 : 78 + 22\sqrt{15})$ и $(-8 : -22\sqrt{15} + 78)$ (уравнения прямых, соединяющих квадраты соответственных точек, имеют коэффициенты $(-3,11,-6)$ и $(-12,-5,2)$, и эти прямые пересекаются в точке $(-8,78,147)$); в (в) $(16 : 10 + 2\sqrt{3}\,i)$ и $(16 : 10 - 2\sqrt{3}\,i)$ (уравнения прямых, соединяющих квадраты соответственных точек, имеют коэффициенты $(1,-3,2)$ и $(-3,16,-16)$, и эти прямые пересекаются в точке $(16,10,7)$).

ПК6◇5. Найдите косинус меньшего из двух смежных углов между касательными прямыми

а) опущенными на конику $-60x^2 - 52xy - 64x - 12y^2 - 28y - 17 = 0$ из точки $(0, -1)$

б) опущенными на конику $-5x^2 - 18xy - 6x + 7y^2 - 2y - 1 = 0$ из точки $(-1/3, -1/6)$

в) опущенными на конику $15x^2 + 56xy - 22x + 12y^2 - 28y + 7 = 0$ из точки $(2/5, 1/5)$

ОТВЕТ: в (а) $\cos\vartheta = \frac{8\sqrt{65}}{65}$, уравнения касательных: $4x + 2y + 2 = 0$ и $-6x - 4y - 4 = 0$, точки касания: $(-\frac{1}{2}, 0)$ и $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$; в (б) $\cos\vartheta = \frac{7\sqrt{85}}{85}$, уравнения касательных: $2x - 4y = 0$ и $-2x - 8y - 2 = 0$, точки касания: $(-\frac{2}{7}, -\frac{1}{7})$ и $(-1, 0)$; в (в) $\cos\vartheta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, уравнения касательных: $-4x - 2y + 2 = 0$ и $-6x - 8y + 4 = 0$, точки касания: $(\frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ и $(\frac{4}{9}, \frac{1}{6})$.

ПК6◇6. Напишите однородное уравнение проективной коники, проходящей через

а) точки $(-3 : -2 : 1)$, $(16 : 9 : -6)$, $(-3 : -3 : 1)$, $(29 : 17 : -11)$, $(-28 : -19 : 10)$

б) точки $(0 : 3 : 1$, $(-1 : 1 : 1)$, $(-3 : 14 : 6)$ и касающейся прямой $6x_0 - 6x_1 + 20x_2 = 0$ в точке $(3 : -7 : -3)$.

в) точку $(1 : 0 : 0)$ и касающейся прямых $2x_0 + 12x_1 + 6x_2 = 0$ и $2x_0 - 2x_2 = 0$ соответственно в точках $(9 : -4 : 5)$ и $(1 : 0 : 1)$.

ОТВЕТ: в (а) $-21x_0^2 + 24x_0x_1 - 74x_0x_2 - 4x_1^2 + 52x_1x_2 - 57x_2^2 = 0$;
в (б) $8x_0^2 - 12x_0x_1 + 40x_0x_2 + 3x_1^2 - 22x_1x_2 + 39x_2^2 = 0$;
в (в) $4x_0x_1 + 4x_0x_2 - x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2 = 0$.

ПК6◇7. Определите типы евклидовых коник и для центральных коник найдите центры и направления главных осей, а для парабол — направление оси и вершину.

а) $20x^2 + 52xy - 20x + 34y^2 - 24y + 9 = 0$

б) $-16x^2 - 76xy - 8x - 90y^2 - 20y - 1 = 0$

в) $-7x^2 + 20xy + 2x - 14y^2 - 4y = 0$

г) $20x^2 - 52xy + 32x + 34y^2 - 40y + 15 = 0$

д) $-x^2 - 4xy - 6x - 4y^2 - 8y + 3 = 0$

е) $-4x^2 - 12xy - 4x - 9y^2 - 8y + 4 = 0$.

ОТВЕТ: в (а) эллипс с центром $(7, -5)$ и осями вдоль векторов $\left(-\frac{7}{26}+\frac{5\sqrt{29}}{26} \,:\, 1\right)$ и $\left(-\frac{5\sqrt{29}}{26}-\frac{7}{26} \,:\, 1\right)$;
в (б) гипербола с центром $(-5, 2)$ и осями вдоль векторов $\left(-\frac{37}{38}+\frac{\sqrt{2813}}{38} \,:\, 1\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{2813}}{38}-\frac{37}{38} \,:\, 1\right)$;
в (в) гипербола с центром $(3, 2)$ и осями вдоль векторов $\left(\frac{7}{20}+\frac{\sqrt{449}}{20} \,:\, 1\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{449}}{20}+\frac{7}{20} \,:\, 1\right)$;
в (г) эллипс с центром $(-6, -4)$ и осями вдоль векторов $\left(\frac{7}{26}+\frac{5\sqrt{29}}{26} \,:\, 1\right)$ и $\left(-\frac{5\sqrt{29}}{26}+\frac{7}{26} \,:\, 1\right)$;
в (д) парабола с осью $(-4 \,:\, 2)$ и вершиной $(\frac{87}{25}, -\frac{71}{25})$;
в (е) парабола с осью $(6 \,:\, -4)$ и вершиной $(-\frac{731}{169}, \frac{418}{169})$.