Задачи для подготовки к контрольной № 5

ПК5◇1. Выясните, вырождено ли ограничение билинейной формы с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе пространства $\mathbb{Q}^4$ на подпространство $U \subset \mathbb{Q}^4$ решений системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0\,, \end{cases}$$

и если нет, найдите проекции вектора $v = (-1, 0, 6, 5)$ на U вдоль $U^\perp$ и на $U^\perp$ вдоль U.

ответ: $v_U = (1, -2, 2, 1)$, $v_{U^\perp} = (-2, 2, 4, 4)$.

ПК5◇2. Те же вопросы про

а) форму $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & -6 & 16 & 7 \\ 7 & 16 & 14 & -7 \\ 0 & 7 & -7 & -8 \end{pmatrix}$ систему $\begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\,. \end{cases}$ и вектор $(26, -7, -5, -2)$

б) форму $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 7 \\ -2 & 0 & -12 & -15 \\ -7 & 12 & 0 & -11 \\ -7 & 15 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ систему $\begin{cases} x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 0\,. \end{cases}$ и вектор $(30, 20, -7, 1)$

в) форму $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -9 & 11 \\ -5 & 4 & 6 & -7 \\ -9 & 6 & -2 & 4 \\ 11 & -7 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ систему $\begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0\,. \end{cases}$ и вектор $(-20, -29, -1, -3)$

ответ: в (а) $v_U = (6, -1, -1, 0)$, $v_{U^\perp} = (20, -6, -4, -2)$, в (б) $v_U = (8, 6, -2, 0)$, $v_{U^\perp} = (22, 14, -5, 1)$, в (в) $v_U = (-1, -1, 0, 0)$, $v_{U^\perp} = (-19, -28, -1, -3)$.

ПК5◇3. В $\mathbb{R}^4$ найдите ранг и сигнатуру ограничения квадратичной формы

а) $-4x_1^2 - 25x_2^2 - 2x_3^2 - 11x_4^2 + 20x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 16x_2x_4 + 2x_3x_4$ на ортогонал[1] к вектору $(0, 3, 0, -7)$

б) $x_1^2 - 3x_2^2 + 8x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4 - 8x_3x_4$ на ортогонал к вектору $(4, 5, 2, 3)$

в) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 25x_3^2 + 18x_4^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 - 14x_2x_3 + 12x_2x_4 - 42x_3x_4$ на ортогонал к вектору $(1, 2, -2, -3)$.

ответ: в (а) ранг 3 сигнатура $(1, 2)$, в (б) ранг 2 сигнатура $(2, 0)$, в (в) ранг 3 сигнатура $(2, 1)$.

ПК5◇4. Существует ли на $\mathbb{R}^6$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

а) $\Delta_1 = 0,\quad \Delta_2 = 0,\quad \Delta_3 > 0,\quad \Delta_4 = 0,\quad \Delta_5 = 0,\quad \Delta_6 < 0$

б) $\Delta_1 = 0,\quad \Delta_2 > 0,\quad \Delta_3 > 0,\quad \Delta_4 = 0,\quad \Delta_5 = 0,\quad \Delta_6 < 0$

в) $\Delta_1 = 0,\quad \Delta_2 < 0,\quad \Delta_3 = 0,\quad \Delta_4 = 0,\quad \Delta_5 > 0,\quad \Delta_6 = 0$

г) $\Delta_1 > 0,\quad \Delta_2 = 0,\quad \Delta_3 = 0,\quad \Delta_4 > 0,\quad \Delta_5 = 0,\quad \Delta_6 > 0$?

Если да, найдите её ранг, сигнатуру и приведите пример матрицы Грама с такими минорами. Если нет, обстоятельно объясните, почему.

[1] Здесь и далее имеется в виду ортогонал относительно поляризации заданной квадратичной формы.

ОТВЕТ: форм с минорами (б) и (г) нет, форма в (а) имеет ранг 6 и сигнатуру $(3,3)$, в (в) — ранг 5 и сигнатуру $(3,2)$.

ПК5◇5. Существует ли **а)** линейная обратимая **б)** ортогональная[2] замена координат в $\mathbb{R}^3$, переводящая квадратичную форму $x_1^2 - 11/9x_2^2 + 2/9x_3^2 + 32/9x_1x_2 - 16/9x_1x_3 + 8/3x_2x_3$ в квадратичную форму $-1/3x_1^2 - 2/3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8/3x_1x_3 - 4/3x_2x_3$?

ОТВЕТ: формы ортогонально эквивалентны, их матрицы Грама имеют одинаковые хар. многочлены: $t^3 - 7t + 6 = (t-2)(t-1)(t+3)$.

ПК5◇6. Те же вопросы про квадратичные формы

а) $-1/9x_1^2 - 7/9x_2^2 - 1/9x_3^2 + 8/9x_1x_2 - 16/9x_1x_3 - 8/9x_2x_3$ и $1/9x_1^2 - 14/9x_2^2 - 5/9x_3^2 + 4/9x_1x_2 - 32/9x_1x_3 - 28/9x_2x_3$

б) $10/9x_1^2 + 13/9x_2^2 + 13/9x_3^2 - 4/9x_1x_2 - 4/9x_1x_3 + 8/9x_2x_3$ и $11/9x_1^2 - 2/9x_2^2 - x_3^2 - 8/3x_1x_2 + 32/9x_1x_3 - 16/9x_2x_3$.

ОТВЕТ: В (а) формы линейно эквивалентны, а ортогонально — нет; хар. многочлены матриц Грама: $t^3+t^2-t-1 = (t-1)(t+1)^2$ и $t^3+2t^2-5t-6 = (t-2)(t+1)(t+3)$. В (б) формы линейно не эквивалентны; хар. многочлены матриц Грама: $t^3-4t^2+5t-2 = (t-2)(t-1)^2$ и $t^3-7t-6 = (t-3)(t+1)(t+2)$.

ПК5◇7. Найдите в $\mathbb{Q}^3$ все изотропные векторы квадратичных форм

а) $-3x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_3^2 + 10x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$

б) $-5x_1^2 - 24x_2^2 - 4x_3^2 + 22x_1x_2 - 8x_1x_3 + 18x_2x_3$

в) $-x_1^2 - 3x_2^2 - 16x_3^2 + 14x_2x_3$.

ОТВЕТ: Изотропные векторы могут быть описаны, например, так:

$$\text{в (а)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^2 \\ t_1t_2 \\ t_2^2 \end{pmatrix}, \quad \text{в (б)}\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^2 \\ t_1t_2 \\ t_2^2 \end{pmatrix}, \quad \text{в (в)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^2 \\ t_1t_2 \\ t_2^2 \end{pmatrix},$$

где $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$ — любые, но такие описания далеко не единственны.

ПК5◇8. Найдите ранги грассмановых квадратичных форм **а)** $\xi_1\wedge\xi_2 - 5\xi_1\wedge\xi_3 + 4\xi_1\wedge\xi_4 + \xi_1\wedge\xi_6 + \xi_2\wedge\xi_3 - 2\xi_2\wedge\xi_4 + 2\xi_2\wedge\xi_5 - \xi_2\wedge\xi_6 + 6\xi_3\wedge\xi_4 - 10\xi_3\wedge\xi_5 + 3\xi_3\wedge\xi_6 + 8\xi_4\wedge\xi_5 - \xi_4\wedge\xi_6 - 2\xi_5\wedge\xi_6$ **б)** $-\xi_2\wedge\xi_3 - \xi_2\wedge\xi_4 + 3\xi_2\wedge\xi_5 - 4\xi_2\wedge\xi_6 + \xi_3\wedge\xi_4 - 7\xi_3\wedge\xi_5 + 8\xi_3\wedge\xi_6 - 4\xi_4\wedge\xi_5 + 4\xi_4\wedge\xi_6 + 3\xi_5\wedge\xi_6$.

ОТВЕТ: обе формы имеют $\mathrm{rk} = 4$.

[2] По отношению в стандартной евклидовой структуре в $\mathbb{R}^3$.