ПРОГРАММА ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ

«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ »

ЗА ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР 2019/20 УЧЕБНОГО ГОДА

ТЕМА 1. Геометрическое описание поля комплексных чисел, евклидова плоскость = комплексная прямая. Тригонометрические формулы кратных углов. Группа подобий $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, описание подобий в терминах комплексных чисел, существование неподвижной точки.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *свободно вычислять с комплексными числами, в частности, возводить их в любые целые степени; отличать собственные подобия от несобственных, вычислять композиции подобий; находить неподвижные точки подобий.*

ТЕМА 2. Векторные пространства. Порождающие наборы векторов, линейная зависимость, лемма о замене, существование и свойства базисов. Размерность суммы и пересечения подпространств. Трансверсальные и дополнительные подпространства, прямые суммы подпространств. Фактор пространства, размерность фактора.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить размерности и указывать базисы в разнообразных пространствах; выяснять, являются ли данные векторы линейно зависимыми и/или порождающими, а заданные подпространства — трансверсальными и/или дополнительными.*

ТЕМА 3. Линейные отображения, размерность ядра и образа, непустые слои являются сдвигами ядра. Матрица линейного отображения, размерность пространства линейных отображений, произведение матриц и композиция отображений. Важный пример: полиномиальная интерполяция с кратными узлами.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *выписывать матрицу оператора в заданном базисе; находить размерность ядра и образа, а также указывать в них явные базисы; находить многочлен с предписанными струями в заданных точках.*

ТЕМА 4. Аффинные пространства, аффинизация векторного пространства и векторизация аффинного пространства. Пересечение аффинных подпространств. Аффинный репер и аффинные координаты. Центр тяжести взвешенных точек, барицентрические комбинации точек, барицентрические координаты.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить размерность аффинной оболочки заданного набора точек, а также размерность пересечения аффинных подпространств, заданных уравнениями или как аффинные оболочки наборов точек, либо доказывать, что такое пересечение пусто; находить центр тяжести и применять теорему о группировании масс; написать уравнение (соотв. неравенство), задающее в аффинных или в барицентрических координатах гиперплоскость (соотв. полупостранство) с предписанными геометрическими свойствами.*

ТЕМА 5. Аффинные отображения, дифференциал аффинного отображения. Группа аффинных преобразований, аффинное преобразование n-мерного пространства однозначно задаётся своим действием на $n+1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости. Полуаффинные преобразования, всякое полуаффинное преобразование аффинного пространства размерности $\geqslant 2$ над полем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p$ аффинно.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *описывать образы и прообразы точек, прямых и других фигур при заданных аффинных преобразованиях, а также находить неподвижные точки и инвариантные прямые аффинных преобразований; предъявлять аффинные преобразования с предписанным действием на те или иные фигуры или доказывать, что таких аффинных преобразований не существует.*

ТЕМА 6. Алгебра матриц, ассоциативность умножения. Матрица перехода от одного набора векторов к другому. Изменение матрицы оператора при смене базиса. Обратимые матрицы, критерии обратимости. Обращение унитреугольной матрицы над произвольным ассоциативным кольцом. Ранг матрицы: размерность линейной оболочки строк равна размерности линейной оболочки столбцов.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *свободно перемножать матрицы; получать из данной матрицы A матрицу с предписанными строками и столбцами при помощи умножения матрицы A на подходящую матрицу с нужной* *стороны; применять таблицу умножения базисных матриц E_{ij} при практических вычислениях; использовать матричные обозначения для линейных выражений одних векторов через другие и свободно оперировать с матрицами перехода C_{uw}; находить ранг матрицы методом Гаусса или по теореме об окаймляющих минорах; оценивать ранг произведения и суммы матриц.*

ТЕМА 7. Качественный анализ систем линейных уравнений: матричная запись, интерпретация в терминах линейных отображений, критерии разрешимости, размерность и структура аффинного пространства решений, альтернатива Фредгольма и специализации всего этого для систем, у которых число уравнений равно числу неизвестных.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *оценивать размерность пространства решений и выяснять, совместна ли система, не решая уравнений явно.*

ТЕМА 8. Метод Гаусса: преобразование матрицы к приведённому ступенчатому виду при помощи элементарных операций над строками. Использование метода Гаусса для отыскания базиса в линейной оболочке конечного множества векторов, для решения системы линейных уравнений, для анализа обратимости и отыскания обратной матрицы, для отыскания базиса в факторе по линейной оболочке конечного множества векторов. Комбинаторный тип векторного подпространства в $\Bbbk^n$, единственность базиса с приведённой ступенчатой матрицей координат. Две системы линейных уравнений имеют одно и то же пространство решений если и только если их матрицы преобразуются к одинаковому приведённому ступенчатому виду.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *преобразовывать матрицу к приведённому ступенчатому виду и находить её ранг, а также обратную матрицу, если последняя существует; разделять неизвестные в системе линейных уравнений на свободные и связанные, указывать параметрическое описание всех решений, а также аффинный репер в пространстве решений; предъявлять базис в U и в $\Bbbk^n / U$ для подпространства $U \subset \Bbbk^n$, заданного системой линейных однородных уравнений или как линейная оболочка набора векторов.*

ТЕМА 9. Двойственное пространство, двойственные базисы, координаты линейной формы в двойственном базисе. Вложение $V \hookrightarrow V^{**}$ и изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ для конечномерного V. Задание подпространств системами однородных уравнений: аннуляторы, биекция $U \leftrightarrow \operatorname{Ann} U$ между подпространствами дополнительных размерностей в V и в V^* инволютивна, обращает включения и переводит суммы в пересечения, а пересечения — в суммы. Пространства, двойственные к подпространству и к фактор пространству, описание двойственного пространства к линейной оболочке заданного набора векторов, ранг матрицы. Двойственные линейные отображения, связь между их ядрами и образами.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *описывать базис, двойственный к данному; написать матрицу двойственного оператора в двойственном базисе; находить размерность, указывать базис и задавать уравнениями векторные подпространства вида $U + W$ и $U \cap W$, если известны векторы, порождающие подпространства $U, W \subset \Bbbk^n$, и/или линейные уравнения, задающие эти подпространства.*

ТЕМА 10. Объём ориентированного параллелепипеда, полилинейные кососимметричные и знакопеременные формы, пространство кососимметричных n-линейных форм на n-мерном пространстве одномерно. Чётность и длина перестановки, знак тасующей перестановки. Определитель квадратной матрицы: полилинейность, инвариантность относительно транспонирования, мультипликативность. Правила Крамера для решения невырожденных систем из n неоднородных и $n-1$ однородных линейных уравнений на n неизвестных. Присоединённая матрица, тождество $A \cdot A^\vee = A^\vee \cdot A = \det(A) \cdot E$ для матриц с элементами из произвольного коммутативного кольца с единицей, явная формула для обратной матрицы. Матрицы с элементами в алгебре многочленов = многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, характеристический многочлен и тождество Гамильтона – Кэли. Грассмановы многочлены, линейные замены переменных и миноры, формулы Лапласа для разложения определителя по набору строк или столбцов, квадратичное соотношение Плюккера.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить знаки перестановок; вычислять определители и миноры разнообразных матриц; быстро обращать матрицы размера 2×2 и 3×3 и решать системы из двух неоднородных (соотв. однородных) линейных уравнений на две (соотв. три) неизвестных; свободно вычислять с грассмановыми многочленами.*

ТЕМА 11. Пространства с операторами: гомоморфизмы и изоморфизмы (подобия), (не)приводимость, (не)разложимость, примеры неразложимых приводимых операторов. Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора. Спектр оператора, собственные числа и собственные подпространства, трансверсальность собственных подпространств с разными собственными числами. Разложение пространства с оператором по разложению аннулирующего этот оператор многочлена на взаимно простые множители. Корневые подпространства и корневое разложение. Вычисление функций от матриц и операторов при помощи полиномиальной интерполяции с кратными узлами в корнях аннулирующего многочлена. Диагонализуемые операторы, критерии диагонализуемости. Общие собственные векторы коммутирующих операторов, одновременная диагонализация коммутирующих диагонализуемых операторов. Нильпотентные операторы, существование жорданова базиса, цикловой тип. Разложение Жордана, жорданова нормальная форма.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить характеристический и минимальный многочлены, спектр, собственные и корневые подпространства, а также аналитические функции данного оператора или матрицы; выяснять, диагонализуем ли данный оператор; находить цикловой тип нильпотентного оператора.*

ТЕМА 12. Евклидовы пространства, скалярное произведение $V \times V \to \mathbb{R}$ однозначно восстанавливается по функции длины $V \to \mathbb{R}$, $V \mapsto |v|$, ортогонализация Грамма – Шмидта. Матрицы и определители Грама, преобразование матрицы Грама при линейной замене векторов, неотрицательность определителя Грама, неравенство Коши – Буняковского – Шварца, неравенство треугольника. Ориентированный угол между двумя ненулевыми векторами, тригонометрические формулы сложения аргументов. Евклидов объём и ориентация, определитель Грама равен квадрату евклидова объёма. Изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^*$, задаваемый скалярным произведением, евклидово двойственные базисы. Ортогональные дополнения, прямое разложение $V = U \oplus U^\perp$, биекция $U \leftrightarrow U^\perp$ между подпространствами дополнительных размерностей инволютивна, обращает включения и переводит суммы в пересечения, а пересечения — в суммы. Ортогональная проекция вектора над подпространство, минимальное расстояние между непересекающимися аффинными подпространствами, минимальный угол между вектором и подпространством. Евклидова интерпретация уравнения гиперплоскости. Общий перпендикуляр к набору векторов, векторные произведения.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *вычислять расстояние между непересекающимися аффинными подпространствами и угол между вектором и подпространством; находить евклидовы объёмы параллелепипедов и симплексов; находить ортогональную проекцию вектора на подпространство; строить ортонормальный базис в линейной оболочке заданного набора векоров.*

ТЕМА 13. Ортогональные линейные преобразования и движения аффинного евклидова пространства, описание движений евклидовой плоскости и трёхмерного евклидова пространства. Отражения в гиперплоскостях, композиция отражений является поворотом или сдвигом, разложение ортогонального оператора в композицию отражений и в ортогональную сумму поворотов в двумерных плоскостях.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *отыскивать центры поворотов, а также оси и векторы сдвига скользящих симметрий на плоскости; оси поворотов и зеркала отражений трёхмерного пространства; вычислять композиции таких движений и выяснять — собственное движение или несобственное; находить углы поворотов, ортогональной прямой суммой которых является данный ортогональный линейный оператор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*