## Задачи, предлагавшиеся на коллоквиуме

**Задача 1.** Сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце квадратной матрицы $A$ равна единице. Может ли матрица $A - E$ быть обратима? Пусть матрица $B$ обладает тем же свойством, что и $A$. Обладает ли им матрица $AB$?

**Задача 2.** Имеется 7 одинаковых банок, каждая из которых на $9/10$ заполнена краской одного из семи цветов радуги, в разных банках — разные цвета. Можно ли, переливая краску из банки в банку и равномерно размешивая содержимое после каждого переливания, получить хотя бы в одной из банок колер, где все семь цветов представлены в равной пропорции?

**Задача 3.** Нетождественное аффинное преобразование коммутирует со всеми сдвигами. Верно ли, что тогда и само оно — сдвиг? Докажите, что дифференциал композиции аффинных преобразований равен композиции дифференциалов.

**Задача 4.** Выразите через длины сторон $\triangle abc$ барицентрические координаты относительно вершин $\triangle abc$ центра вписанной в $\triangle abc$ окружности.

**Задача 5.** Выясните, при каких $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ обратима матрица $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ и явно вычислите обратную матрицу, когда она существует.

**Задача 6.** Покажите, что для любых пяти различных точек на аффинной координатной плоскости $\mathbb{k}^2$ найдётся такой многочлен $f \in \mathbb{k}[x, y]$ степени 2, что кривая, заданная в $\mathbb{k}^2$ уравнением $f(x, y) = 0$, пройдёт через эти точки.

**Задача 7.** Для заданного числа $\alpha \in \mathbb{k}$ постройте в пространстве многочленов степени $\leqslant m$ с коэффициентами из $\mathbb{k}$ такой базис, в котором координатами каждого многочлена $f(x)$ являются его значение и значения первых $m$ его производных при $x = \alpha$. Много ли существует таких базисов?

**Задача 8.** Обозначим через $A, B, C, D, E$ концы стандартных базисных векторов в $\mathbb{R}^5$, а через $X$ — середину отрезка, соединяющего центры $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$. Проходящая через $X$ прямая $YZ$ имеет точку $Y$ на прямой $AE$, а точку $Z$ — в плоскости $BCD$. Найдите $\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{YZ}$.

**Задача 9.** Может ли поле из 27 элементов содержать подполе из 9 элементов? Сколько аффинных плоскостей имеется в трёхмерном аффинном пространстве над полем из 27 элементов?

**Задача 10.** Может ли векторное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа гиперплоскостей?

**Задача 11.** Точки $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ аффинного пространства $\mathbb{R}^4$ не лежат в одном трёхмерном пространстве, а точка $p$ является их барицентрической комбинацией со строго положительными весами. Можно ли провести через точку $p$ прямую, не пересекающую ни одной двумерной плоскости $(a_i a_j a_k)$?

**Задача 12.** В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы не пересекающиеся двумерная плоскость $\Pi$ с направляющим векторным пространством $U$ и прямая $\ell$ с вектором скорости $v \notin U$. Опишите объединение всех прямых $(ab)$ с $a \in \ell$ и $b \in \Pi$.

**Задача 13.** Верно ли, что любые три различные параллельные прямые на аффинной плоскости можно перевести аффинным преобразованием в любые три другие различные параллельные прямые? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.

**Задача 14.** Покажите, что для любых девяти различных точек аффинного пространства $\mathbb{k}^3$

существует такой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, x_3]$ степени два, что поверхность, заданная в $\Bbbk^3$ уравнением $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, проходит через эти девять точек.

**Задача 15.** Пусть элементы матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ имеют вид $a_{ij} = x_i + y_j$ для некоторых $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$ из $\Bbbk$. Верно ли, что $\operatorname{rk} A \leqslant 2$?

**Задача 16.** Точки $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ аффинного пространства $\mathbb{R}^4$ не лежат в одном трёхмерном пространстве, а точка $p$ является их барицентрической комбинацией со строго положительными весами. Можно ли провести через точку $p$ двумерную плоскость, не пересекающую ни одной двумерной плоскости $(a_i a_j a_k)$?

**Задача 17.** Докажите, что биективное аффинное преобразование, дифференциал которого не имеет ненулевых неподвижных векторов, обязательно имеет неподвижную точку.

**Задача 18.** Докажите, что дифференциал композиции аффинных отображений равен композиции их дифференциалов. Пусть аффинное преобразование $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таково, что $\varphi^m = \mathrm{Id}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\varphi$ имеет неподвижную точку.

**Задача 19.** Подсчитайте количество $3 \times 3$ матриц ранга 2 над полем из $q$ элементов.

**Задача 20.** Докажите, что всякая квадратная матрица $A$ с элементами из поля $\Bbbk$ удовлетворяет уравнению $f(A) = 0$ для некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ (при подстановке в многочлен $x = A$ мы полагаем $A^0 \overset{\text{def}}{=} E$). Решите в $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk)$ уравнение $X^2 = 0$.

**Задача 21.** Докажите, что число элементов в любом конечном поле $\Bbbk$ является степенью некоторого простого числа $p$. Верно ли, что каждый элемент конечного поля $\Bbbk$ является корнем многочлена, коэффициенты которого являются суммами единиц поля $\Bbbk$?

**Задача 22.** Покажите, что множество $2^M$ всех подмножеств данного множества $M$ образует векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ вычетов по модулю 2 относительно операций $X + Y \overset{\text{def}}{=} (X \cup Y) \smallsetminus (X \cap Y)$, $1 \cdot X \overset{\text{def}}{=} X$, $0 \cdot X \overset{\text{def}}{=} \varnothing$. Можно ли в таком пространстве построить линейно зависимый набор из $m \geqslant 2$ непустых подмножеств, в котором ни одно подмножество не содержится в объединении остальных? А линейно зависимый набор из $m \geqslant 2$ строго возрастающих по включению непустых подмножеств?