Геометрия Лобачевского

Терминология. Зафиксируем в $\mathbb{R}^{n+1}$ скалярное *произведение Лоренца* $(x,y)_{\mathbb{L}} = x_0y_0 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$. Квадрика $I = \{x \in \mathbb{P}_n \mid (x,x)_{\mathbb{L}} = 0\} \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ называется *абсолютом*. Множество $\mathbb{L}^n = \{x \in \mathbb{P}_n \mid (x,x)_{\mathbb{L}} > 0\}$ с таким расстоянием $|a,b|_{\mathbb{L}}$, что $\operatorname{ch}|a,b|_{\mathbb{L}} = |(a,b)_{\mathbb{L}}| \,/\, \sqrt{(a,a)_{\mathbb{L}}(b,b)_{\mathbb{L}}}$, называется n-мерным *пространством Лобачевского* или *гиперболическим пространством*. Проективные автоморфизмы $\mathbb{P}_n$, вызванные изометриями формы Лоренца, называются *движениями*. Проективные прямые $\ell \subset \mathbb{P}_n$ называются *геодезическими*. Полярное к точке p *векторное* пространство $T_p\mathbb{L}^n \overset{\text{def}}{=} p^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (p,v) = 0\}$ называется *касательным пространством* к $\mathbb{L}^n$ в точке $p \in \mathbb{L}^n$. На $T_p\mathbb{L}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ есть евклидово скалярное произведение $(v,w) \overset{\text{def}}{=} -(v,w)_{\mathbb{L}}$. Длины касательных векторов и углы между ними всегда вычисляются в этой евклидовой структуре. Из каждой точки p в направлении каждого касательного вектора $v \in T_p$ выходит единственная геодезическая, а именно та, что отвечает двумерной плоскости, порождённой векторами $p, v \in V$. Вектор $v \in T_p$ называется *направляющим вектором* геодезической. Под углом между пересекающимися геодезическими понимается евклидов угол между их направляющими векторами в точке пересечения. Квадрика, пепендикулярная всем геодезическим, проходящим через фиксированную точку на абсолюте, называется *орициклом*.

ГС14⋄1. Докажите на плоскости $\mathbb{L}^2$ признак равенства треугольников по трём углам.

ГС14⋄2. Укажите в $\mathbb{L}^2$ треугольник, вокруг которого нельзя описать окружность.

ГС14⋄3. Существует ли в $\mathbb{L}^2$ треугольник, в который вписана окружность радиуса 2019?

ГС14⋄4. Докажите, что в $\mathbb{L}^2$ **а)** перпендикулярность двух пересекающихся геодезических означает их сопряжённость относительно коники I в пучке прямых с центром в точке пересечения **б)** пучок концентрических гиперболических окружностей с центром в данной точке a это пучок коник на $\mathbb{P}_2$, натянутый на I и двойную прямую $\mathbb{P}(a^{\perp})$.

ГС14⋄5. Реализуется ли кратчайшее расстояние от точки p до прямой $\ell \not\ni p$ вдоль перпендикуляра, опущенного из p на ℓ, и много ли есть таких перпендикуляров?

ГС14⋄6. Докажите для любых $n+2$ точек $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{L}^n$ равенство $\det\bigl(\operatorname{ch}|p_i,p_j|_{\mathbb{L}}\bigr) = 0$ (можно ограничиться $n = 2, 3$).

ГС14⋄7. Покажите, что каждое движение пространства $\mathbb{L}^n$ является композицией $\leqslant (n+1)$ отражений σ_w в гиперплоскостях $w^{\perp}$, лоренцево ортогональных анизотропным векторам w с $(w,w)_{\mathbb{L}} < 0$.

ГС14⋄8. Как действует на $\mathbb{L}^n$ отражение σ_a задаваемое вектором $a \in \mathbb{L}^n$?

ГС14⋄9. Покажите, что у тетраэдра в $\mathbb{L}^3$ с вершинами на абсолюте сумма двугранных углов при каждой вершине равна π.

ГС14⋄10 (модель Пуанкаре в шаре). Отождествим пространство $\mathbb{L}^n \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ с точками единичного шара $B_1^n = \{(1, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\}$ в стандартной аффинной карте $U_0 \subset \mathbb{P}^n$ и обозначим через $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ единичную сферу с центром в нуле. Параллельная проекция вдоль оси x_0 отождествляет B_1^n с полусферой $x_0 \geqslant 0$ в S^n. Центральная проекция из $(-1, 0, 0, \dots 0)$ на экваториальную плоскость $x_0 = 0$ отождествляет эту полусферу с шаром $B_0^n = \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\}$. Итого: $\mathbb{L}^n \simeq B_1^n \simeq B_0^n$. Покажите, что: **а)** геодезические изображаются в B_0^n диаметрами этого шара, а также дугами окружностей, пересекающих его границу под прямым углом **б)** угол между геодезическими в $\mathbb{L}^n$ равен евклидову углу между их изображениями в B_0^n.

ГС14⋄11. Как выглядят в модели B_0^2 плоскости $\mathbb{L}^2$: **а)** пучок окружностей с данным центром **б)** орицикл **в)** отражение относительно прямой $e^{\perp}$ (где $(e,e)_{\mathbb{L}} < 0$) **г)** срединный перпендикуляр к отрезку **д)** ГМТ, равноудалённых от двух данных параллельных прямых?

ГС14⋄12 (модель Пуанкаре в верхней полуплоскости). Отобразим диск B_0^2 на верхнюю полуплоскость $H \subset \mathbb{C}$ при помощи инверсии. Что это за инверсия? Как выглядят в H геодезические? Ответьте на все вопросы предыдущей задачи в модели H.