Сферическая и эллиптическая геометрия

Терминология. Сфера S^n радиуса 1 с центром в нуле евклидова пространстве $V = \mathbb{R}^{n+1}$ и проективизация $\mathbb{E}_n \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ этого пространства называются n-мерными *сферическим* и *эллиптическим* пространствами соответственно. Каждое двумерное векторное подпространство в V высекает на S^n большую окружность и задаёт в $\mathbb{E}_n$ прямую. Эти окружность и прямая называются *геодезическими*. Каждый вектор $e \in V$ длины 1 задаёт n-мерное евклидово подпространство $e^\perp \subset V$, которое называется *касательным пространством*, соответственно, к S^n в точке $e \in S^n$ и к $\mathbb{E}_n$ в точке $v \in \mathbb{E}_n$ и обозначается T_eS^n или $T_e\mathbb{E}_n$. Векторы этого пространства называются *касательными векторами*. Их углы и длины вычисляются в евклидовой структуре на пространстве $e^\perp$, индуцированной евклидовой структурой на V. Из каждой точки p в направлении каждого касательного вектора $v \in T_p$ выходит единственная геодезическая, а именно та, что отвечает двумерной плоскости, порождённой векторами $p, v \in V$. Вектор $v \in T_p$ называется *направляющим вектором* геодезической. Под углом между пересекающимися геодезическими понимается евклидов угол между их направляющими векторами в точке пересечения.

Для векторов $a, b \in S^n$ *сферическое расстояние* $|a,b|_s \in [0,\pi]$ между точками $a, b \in S^n$ определяется равенством $\cos|a,b|_s \overset{\text{def}}{=} (a,b)$, а *эллиптическое расстояние* $|a,b|_e \in [0,\pi/2]$ между точками $a,b \in \mathbb{E}_n$ — равенством $\cos|a,b|_e \overset{\text{def}}{=} |(a,b)|$.

Комплексная проективная квадрика $I = \{w \in \mathbb{P}\left(\mathbb{C}^{n+1}\right) \mid (w,w) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$, где $(\ast,\ast)$ означает продолжение евклидовой структуры на $\mathbb{R}^n$ до комплексно билинейной симметричной формы на $\mathbb{C}^{n+1} \supset \mathbb{R}^{n+1}$, называется *абсолютом*.

ГС13◇1. Покажите, что сферические расстояния между $n+2$ точками $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in S^n$ связаны соотношением $\det\cos|p_i,p_j|_s = 0$.

ГС13◇2. Полярным к сферическому треугольнику $\triangle abc \subset S^2$ называется $\triangle a'b'c'$, вершины которого перпендикулярны двумерным плоскостям в $\mathbb{R}^3$, натянутым соответственно на векторы b и c, a и c, a и b, и лежат по отношению к этим плоскостям в тех же полупространствах в $\mathbb{R}^3$, что и вершины a, b, c исходного треугольника. Как связаны друг с другом длины сторон и углы полярных треугольников?

ГС13◇3. При каких n на S^2 имеется выпуклый прямоугольный n-угольник?

ГС13◇4. Покажите, что периметр сферического треугольника на S_2 не превышает 2π.

ГС13◇5. Найдите длину стороны правильного сферического треугольника на S_2, вписанного в сферическую окружность радиуса r.

ГС13◇6. Пусть сферический треугольник на $\triangle ABC \subset S^2$ имеет стороны a, b, c, углы α, β, γ, площадь[1] S и полярный треугольник $\triangle A'B'C'$. Докажите соотношения:

а) $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ **б)** $\sin a/\sin\alpha = \sin b/\sin\beta = \sin c/\sin\gamma = \det(A,B,C)/\det(A'B'C')$

в) $\det(A,B,C) = \sin b \cdot \sin c \cdot \sin\alpha$ **г)** $\det(A',B',C') = \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin a$

ГС13◇7 (эллиптическая теорема косинусов). Убедитесь, что для $\triangle abc \subset \mathbb{E}_2$ выполняется соотношение $\cos|a,b|_e \cdot \cos|a,c|_e + \sin|a,b|_e \cdot \sin|a,c|_e \cdot \cos\measuredangle(bac) = \pm\cos|b,c|_e$, где знаки «+» и «–» отвечают, соответственно, стягиваемым и нестягиваемым треугольникам[2], см. рисунки 1◇1 и 1◇2 ниже.

ГС13◇8. Реализуется ли (1) на сферической (2) на эллиптической плоскости кратчайшее расстояние от точки p до геодезической $\ell \not\ni p$ вдоль перпендикуляра, опущенного из p на ℓ, и много ли можно опустить таких перпендикуляров?

ГС13◇9. На (1) сферической (2) эллиптической плоскости опишите ГМТ **а)** равноудалённых

[1] Напомню, что площадь двумерной единичной полусферы равна 2π ☺.

[2] Стягиваемые и нестягиваемые треугольники на $\mathbb{E}_2$ называют, соответственно, треугольниками *первого* и *второго рода*.

от двух данных точек **б)** находящихся на фиксированном расстоянии от данной геодезической **в)** равноудалённых от двух данных геодезических.

ГС13◇10. Пусть проективная прямая $(ab) \subset \mathbb{E}_n$ пересекает абсолют I в (комплексных) точках $c, d \in I$. Покажите, что двойное отношение $[a, b, c, d]$ на прямой (ab) лежит на единичной окружности в $\mathbb{C}$ и $|a, b|_e = \frac{1}{2}|\operatorname{Arg}[a, b, c, d]|$.

ГС13◇11. Покажите, что на эллиптической плоскости $\mathbb{E}_2$ пучок концентрических окружностей с центром в данной точке a представляет собою пучок коник, порождённый абсолютом I и двойной прямой $\mathbb{P}(a^{\perp})$.

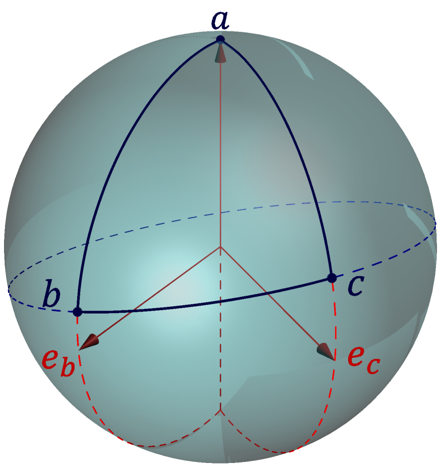

Рис. 1◇1. Треугольник первого рода.

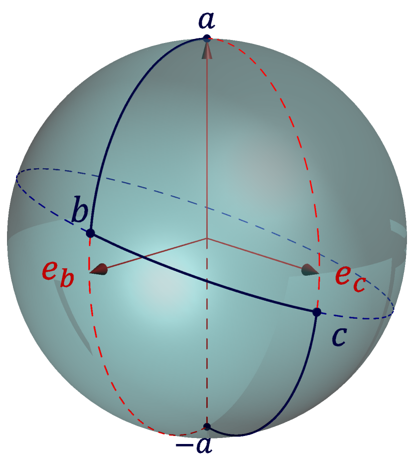

Рис. 1◇2. Треугольник второго рода.