Сферы и инверсии

Терминология. Аффинная квадрика, задаваемая в $\mathbb{R}^n$ уравнением $q(x) = (x - c, x - c) - r^2$ называется *сферой* радиуса r с центром в точке c и обозначается $S(r, c)$. *Степенью* точки $p \in \mathbb{R}^n$ относительно этой сферы называется число $\deg_{r,c}(p) \overset{\text{def}}{=} q(p)$. Одноточечная компактификация $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \infty$ называется *пополненным* евклидовым пространством. Аффинными подпространствами в $\widehat{\mathbb{R}}^n$ называются замыкания[1] аффинных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Инволюция $\sigma_{r,c} : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightleftarrows \widehat{\mathbb{R}}^n$, переставляющая точки ∞ и c и переводящая каждую точку $x \neq c, \infty$ в сопряжённую с нею относительно сферы $S(r, c)$ точку прямой[2] (xc) называется *инверсией* относительно сферы $S(r, c)$. Группа преобразований пространства $\widehat{\mathbb{R}}^n$, порождённая инверсиями и отражениями в гиперплоскостях, называется (несобственной) группой Мёбиуса и обозначается GM_n. Для точки $p \notin S(r, c)$ инволюция $\sigma_p : S(r, c) \rightleftarrows S(r, c)$, переставляющая коллинеарные с p точки $a, b \in S(r, c)$, называется *инверсией* сферы $S(r, c)$ с центром в p.

ГС12◇1. Пусть проходящая через точку p прямая пересекает сферу $S(r, c)$ в точках a и b (возможно, совпадающих). Покажите, что $(p - a, p - b) = \deg_{r,c}(p)$.

ГС12◇2 (радикальная гиперплоскость). Для данных $a, b \in \mathbb{R}^n$ и $r, s \in \mathbb{R}$ опишите ГМТ $p \in \mathbb{R}^n$ с $\deg_{r,a}(p) = \deg_{s,b}(p)$.

ГС12◇3. Покажите, что инверсия $\sigma_p : S(r, c) \rightleftarrows S(r, c)$ является ограничением на сферу $S(r, c)$ инверсии $\sigma_{R,q} : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightleftarrows \widehat{\mathbb{R}}^n$ относительно однозначно определяемой точкой p сферы $S(R, q)$.

ГС12◇4. Покажите, что стереографическая проекция $\pi : S^n \smallsetminus p \to \Pi$ сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ из её северного полюса p на её экваториальную плоскость Π **а)** является ограничением на S^n единственной инверсии объемлющего пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ **б)** устанавливает конформную[3] биекцию между множеством сфер $S^{n-1} \subset S^n$ и множеством сфер и гиперплоскостей в Π, причём полюс относительно S^n каждой не проходящей через p гиперплоскости H проектируется из p на Π в центр той сферы, которая является проекцией сферы $H \cap S \subset S$.

ГС12◇5. В условиях предыдущей задачи покажите, что для любой инверсии $\sigma_q : S^n \rightleftarrows S^n$ сферы S^n композиция $\pi\sigma_q\pi^{-1} : \widehat{\Pi} \rightleftarrows \widehat{\Pi}$, где $\pi(p) \overset{\text{def}}{=} \infty$, является отражением в гиперплоскости или инверсией и наоборот.

ГС12◇6. Покажите, что: **а)** если мёбиусово преобразование $\widehat{\mathbb{R}}^n \rightleftarrows \widehat{\mathbb{R}}^n$ сохраняет точку ∞, то оно является композицией движения и гомотетии **б)** если не сохраняет, то является композицией движения, гомотетии и инверсии **в)** все движения и гомотетии являются мёбиусовыми преобразованиями.

ГС12◇7. Покажите, что в каждом порождённом двумя сферами пучке квадрик **а)** все непустые гладкие квадрики являются сферами **б)** инверсия относительно любой из сфер пучка переводит каждую сферу пучка в сферу из пучка **в)** вещественное базисное множество пучка либо пусто, либо является сферой коразмерности 2 или точкой. В зависимости от взаимного расположения двух сфер, порождающих пучок, **г)** выясните, какой из трёх случаев имеет место в п. (в) **д)** опишите все вырожденные проективные квадрики пучка.

ГС12◇8. Опишите все инверсии, переводящие две различные сферы радиусов r_1, r_2 с центрами в точках c_1, c_2 друг в друга, если эти сферы **а)** не пересекаются **б)** касаются друг друга **в)** пересекаются по сфере коразмерности 2.

ГС12◇9. Опишите все инверсии, переводящие две данные непересекающиеся (соотв. пересекающиеся по сфере коразмерности 2 или касающиеся друг друга) сферы радиусов r_1, r_2 с центрами в точках c_1, c_2 в концентрические сферы (соотв. в пару пересекающихся или параллельных гиперплоскостей).

---

[1] Т. е. одноточечные компактификации той же самой точкой $\infty \in \widehat{\mathbb{R}}^n$.

[2] Т. е. в такую точку $x' \in (xc)$, что $(x - c, x' - c) = r^2$. Иными словами, $x' = c + r^2(x - c)/(x - c, x - c)$.

[3] Т. е. сохраняющую углы.