Евклидова геометрия

Терминология. Фигуры $I_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 1\}$ и $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1, x_i \geqslant 0\}$ называются стандартными n-мерными *кубом* и *симплексом*. Стандартным *кокубом* $C_n \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка центров $(n-1)$-мерных[1] граней стандартного куба I_n. Угол между вектором v и векторным подпространством U определяется как $\min_{u \in U \smallsetminus 0} \measuredangle(v, u) = \measuredangle(v, v_U)$, где $v - v_U \in U^\perp$. Пересечение фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ с любой гиперплоскостью, относительно которой Φ лежит в одном замкнутом полупространстве, называется *гранью* фигуры Φ. Нульмерные грани называются *вершинами*. Точка $p \in \Phi$ называется *крайней*, если она не является внутренней точкой никакого содержащегося в Φ отрезка.

ГС11◇1. Нарисуйте какую-нибудь двумерную параллельную проекцию четырёхмерного куба, у которой все вершины различны.

ГС11◇2. Нарисуйте развёртку трёхмерной границы четырёхмерного куба[2] и составьте инструкцию по склейке[3] из этой развёртки четырёхмерного куба.

ГС11◇3. Сколько трёхмерных плоскостей симметрии у четырёхмерного куба?

ГС11◇4. Сколько у n-мерного куба граней в каждой размерности?

ГС11◇5. Верно ли что середины рёбер **а)** трёхмерного **б)** четырёхмерного правильного симплекса являются вершинами правильного кокуба?

ГС11◇6. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ найдите радиусы вписанного и описанного шаров пирамиды с вершиной в точке $(1, 0, 0, 0, 0)$, основанием которой служит лежащий в гиперплоскости $x_1 = 0$ правильный четырёхмерный симплекс, описанный около единичного шара с центром в нуле.

ГС11◇7. В стандартном n-мерном кубе $I_n \subset \mathbb{R}^n$ найдите:

а) число внутренних[4] диагоналей, ортогональных заданной внутренней диагонали

б) длину d_n внутренней диагонали (диаметр описанного шара) и $\lim_{n\to\infty} d_n$

в) угол δ_n между внутренней диагональю и ребром, а также $\lim_{n\to\infty} \delta_n$

г) отношения, в которых внутренняя диагональ делится ортогональными проекциями на неё всех вершин куба.

ГС11◇8. В стандартном n-мерном симплексе $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ найдите

а) радиусы вписанного и описанного шаров, а также их пределы при $n \to \infty$

б) угол между ребром и не содержащей его $(n-1)$-мерной гранью

в) угол между ребром и противолежащей ему $(n-2)$-мерной гранью

г) углы между векторами, идущими из центра симплекса в центры всех его граней[5]

д) кратчайшее расстояние между гранями, натянутыми на дополнительные множества вершин.

ГС11◇9. Задайте стандартный n-мерный кокуб C^n системой линейных неоднородных неравенств и найдите количество его граней в каждой размерности.

ГС11◇10. Найдите радиус вписанного в C^n шара и его предел при $n \to \infty$.

ГС11◇11. У всякой ли замкнутой выпуклой фигуры Φ **а)** грань грани является гранью **б)** крайняя точка грани является крайней точкой Φ **в)** все вершины являются крайними точками **г)** все крайние точки являются вершинами?

ГС11◇12. Покажите, что каждая замкнутая ограниченная выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

---

[1] Здесь и далее под *размерностью* фигуры Φ понимается размерность её аффинной оболочки — пересечения всех содержащих эту фигуру аффинных подпространств.

[2] Она представляет собою трёхмерный многогранник, составленный из обычных трёхмерных кубиков.

[3] Укажите, какие пары двумерных граней трёхмерных кубов надлежит склеить друг с другом и как именно.

[4] Т. е. не лежащих в гранях.

[5] Каждая грань симплекса задаётся множеством вершин, на которую она натянута. Таким образом, речь идёт про углы $\measuredangle(v_X, v_Y)$ для всех пар непустых собственных подмножеств $X, Y \subset \{0, 1, \dots, n\}$.