Метрические инварианты квадрик и линейных операторов на евклидовом пространстве

Терминология. Аффинное уравнение квадрики в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *каноническим*, если оно имеет вид $2x_1 = a_2x_2^2+\dots+a_nx_n^2$ (для параболоида), $a_1x_1^2+\dots+a_nx_n^2 = \pm 1$ (для центральной квадрики) и $a_1x_1^2+\dots+a_nx_n^2 = 0$ (для конуса), где отрицательных a_i не больше, чем положительных, причём когда во втором уравнении их поровну, в его правой части стоит $+1$. Ортонормальный репер, в котором уравнение квадрики становится каноническим, тоже называется *каноническим*. С точностью до перенумерации, коэффициенты a_i не зависят от выбора канонического репера.

Каждое линейное отображение евклидовых пространств $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ является композицией ортогональной проекции $\mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \ker^{\perp} f$, растяжения вдоль $\operatorname{rk} f$ попарно ортогональных направлений внутри $\ker^{\perp} f$ с положительными (и зависящими от направления) коэффициентами и ортогонального вложения $\ker^{\perp} f \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Направления и коэффициенты называются *сингулярными направлениями* и *числами* оператора f. Квадраты последних суть ненулевые собственные значения оператора $f^tf : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Каждый линейный оператор $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ имеет единственные *полярные разложения* $f = g_1h_1$ и $f = h_2g_2$, в которых $g_1, g_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, а $h_1 = \sqrt{ff^t}$ и $h_2 = \sqrt{f^tf}$ самосопряжены и положительны.

ГС10◇1. Покажите, что следующие величины не зависят от выбора точки (или точек) на конике в евклидовой плоскости: **а)** сумма расстояний от точки эллипса до его фокусов **б)** модуль разности расстояний от точки гиперболы до её фокусов **в)** диагональ прямоугольника описанного вокруг эллипса **г)** сумма квадратов диагоналей (или сторон) параллелограмма $zapb$, где z — центр, а za и zb — сопряжённые радиусы эллипса.

ГС10◇2. Покажите, что парабола является ГМТ, равноудалённых от фокуса и директрисы.

ГС10◇3. Определите типы коник, найдите направления их главных осей, а также центр (для центральных коник) или вершину (для парабол) и напишите уравнение каждой коники в ортонормальном репере с началом в центре или вершине и базисными векторами, направленными вдоль главных осей. Каковы длины главных полуосей (для центральных коник) и расстояние от фокуса до директрисы (для парабол)?

а) $2x^2 - 6xy + 4x + 5y^2 - 6y = -1$ **б)** $-x^2 + 6xy + 10x - 7y^2 - 18y = 8$
в) $-x^2 - 4xy - 2x - 4y^2 - 6y = 2$ **г)** $-3x^2 + 10xy + 6x - 8y^2 - 8y = 1$
д) $-x^2 + 4xy + 6x - 4y^2 - 8y = 9$ **е)** $3x^2 - 10xy + 10x + 9y^2 - 18y = -8$

ответы: (а) эллипс $a\,x^2 + b\,y^2 = 1$ с $a = -\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $b = -\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}$, центром $z = (-1, 0)$ и осями $\overrightarrow{zx} \sim (1+\sqrt{5} : 2)$ и $\overrightarrow{zy} \sim (1-\sqrt{5} : 2)$
(б) гипербола $a\,x^2 + b\,y^2 = 1$ с $a = -3\sqrt{2} + 4$, $b = 4 + 3\sqrt{2}$ центром $z = (-4, -3)$ и осями $\overrightarrow{zx} \sim \left(1+\sqrt{2} : 1\right)$, $\overrightarrow{zy} \sim \left(-\sqrt{2}+1 : 1\right)$
(в) парабола $y^2 = -\frac{2\sqrt{5}}{25}\,x$ с вершиной $z = \left(-\frac{6}{25}, -\frac{29}{50}\right)$ и осью $\overrightarrow{zx} \sim (2 : -1)$
(г) гипербола $a\,x^2 + b\,y^2 = 1$ с $a = -\frac{5\sqrt{5}}{2} + \frac{11}{2}$, $b = \frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2}$ центром $z = (-4, -3)$ и осями $\overrightarrow{zx} \sim \left(1+\sqrt{5} : 2\right)$, $\overrightarrow{zy} \sim \left(1-\sqrt{5} : 2\right)$
(д) парабола $y^2 = -\frac{4\sqrt{5}}{25}\,x$ с вершиной в точке $z = \left(\frac{63}{25}, \frac{4}{25}\right)$ и осью $\overrightarrow{zx} \sim (2 : 1)$
(е) эллипс $a\,x^2 + b\,y^2 = 1$ с $a = -6 + \sqrt{34}$, $b = -6 - \sqrt{34}$, с центром $z = (0, 1)$ и осями $\overrightarrow{zx} \sim \left(3+\sqrt{34} : 5\right)$, $\overrightarrow{zy} \sim \left(3-\sqrt{34} : 5\right)$.

ГС10◇4. Найдите ортогональные собственные базисы следующих самосопряжённых операторов, заданных своими матрицами в стандартном ортонормальном базисе $\mathbb{R}^4$:

а) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & 1 & 2 \\ -3/2 & 1/2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 & -3/2 \\ 2 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 4/5 & 6/5 & 4/5 & 6/5 \\ 6/5 & -1 & -12/5 & -4/5 \\ 4/5 & -12/5 & 13/5 & 0 \\ 6/5 & -4/5 & 0 & 13/5 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1/2 & -5/6 & -2/3 & 2 \\ -5/6 & -13/6 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & -17/6 & -1/2 \\ 2 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 9/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 9/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 9/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & 9/4 \end{pmatrix}$

ответы: (а) $v_{-4} = (-1,-1,1,1)$, $v_1 = (-1,1,-1,1)$, $v_2 = (1,1,1,1)$, $v_3 = (1,-1,-1,1)$
(б) $v_{-3} = (-2,4,2,1)$, $v_1 = (-2,-1,-1/2,1)$, $v_3 = (1/2,1/4,-1/2,1)$, $v_4 = (1/2,-1,2,1)$
(в) $v'_{-3} = (1/4,1/4,1,0)$, $v''_{-3} = (-3/4,-3/4,0,1)$, $v\_2 = (-1/3,5/3,-1/3,1)$, $v_2 = (5/3,-1/3,-1/3,1)$
(г) $v'_2 = (1,-1,1,1)$, $v''_2 = (1,1,1,-1)$, $v'''_2 = (1,1,-1,1)$, $v_3 = (-1,1,1,1)$.

ГС10◇5. Укажите начала и направления координатных осей канонических реперов, напишите канонические уравнения и определите типы следующих квадратичных поверхностей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$:

а) $10x^2 + 4xy + 4xz + 48x + 13y^2 + 8yz + 42y + 13z^2 + 42z = -72$
б) $-16x^2 + 16xy + 68xz - 132x + 14y^2 - 52yz + 120y - 7z^2 - 30z = -81$
в) $-2x^2 - 28xy + 8xz + y^2 + 20yz - 108y + 10z^2 = -45$
г) $10x^2 - 8xy - 16xz + 18x + 16y^2 - 8yz - 9y + 10z^2 - 54z = -9$
д) $-16x^2 + 56xy - 40xz - 57x - 22y^2 + 16yz + 66y + 2z^2 - 78z = -18$
е) $-7x^2 + 44xy + 28xz + 108x - 10y^2 - 16yz - 108y + 8z^2 = 90$

ответы: (а) эллипсоид $\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + x_3^2 = 1$ в репере с началом $(-2, -1, -1)$
и осями $e_1 = (2/3, 1/3, -2/3)$, $e_2 = (-2/3, 2/3, -1/3)$, $e_3 = (1/3, 2/3, 2/3)$
(б) связный гиперболоид $\frac{x_1^2}{2} + 2x_2^2 - 3x_3^2 = 1$ в репере с началом $(2/3, -1/3, 7/3)$
и осями $e_1 = (2/3, 2/3, 1/3)$, $e_2 = (-1/3, 2/3, -2/3)$, $e_3 = (-2/3, 1/3, 2/3)$
(в) несвязный гиперболоид $2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 = -1$ в репере с началом $(-10/3, 2/3, 2/3)$
и осями $e_1 = (-1/3, 2/3, 2/3)$, $e_2 = (-2/3, 1/3, -2/3)$, $e_3 = (-2/3, -2/3, 1/3)$
(г) эллиптический параболоид $\frac{3x_1}{2} + x_2^2 + x_3^2 = 0$ в репере с началом $(-5/3, -1/3, 1/3)$
и осями $e_1 = (-2/3, -1/3, -2/3)$, $e_2 = (-1/3, -2/3, 2/3)$, $e_3 = (-2/3, 2/3, 1/3)$
(д) гиперболический параболоид $\frac{3x_1}{2} + x_2^2 - 3x_3^2 = 0$ в репере с началом $(-2/3, 5/3, 5/3)$
и осями $e_1 = (-1/3, -2/3, -2/3)$, $e_2 = (-2/3, -1/3, 2/3)$, $e_3 = (-2/3, 2/3, -1/3)$
(е) конус $\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 - 2x_3^2 = 0$ в репере с началом $(4/3, -1/3, -8/3)$
и осями $e_1 = (-1/3, -2/3, 2/3)$, $e_2 = (-2/3, -1/3, -2/3)$, $e_3 = (2/3, -2/3, -1/3)$.

ГС10◇6. Найдите полярное разложение $f = gh$, где g — ортогонален, а h — самосопряжён и положителен, линейного оператора f на евклидовом пространстве, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу

а) $\begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -4/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -1 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & -2 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 0 & -2/7 & -2 & 4/7 \\ -1 & -3/7 & 1 & 13/7 \\ 2 & -2/7 & 0 & 4/7 \\ 1/2 & -31/14 & -1/2 & -15/14 \end{pmatrix}$

ответы: (а) $\begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -4/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11/9 & 2/9 & -8/9 \\ 2/9 & 2/9 & 10/9 \\ -8/9 & 10/9 & 5/9 \end{pmatrix}$

(б) $\begin{pmatrix} -1 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & -2 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 & -4/9 & -8/9 \\ -8/9 & 4/9 & -1/9 \\ 4/9 & 7/9 & -4/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7/9 & 14/9 & 4/9 \\ 14/9 & -10/9 & 10/9 \\ 4/9 & 10/9 & -19/9 \end{pmatrix}$

(в) $\begin{pmatrix} 0 & -2/7 & -2 & 4/7 \\ -1 & -3/7 & 1 & 13/7 \\ 2 & -2/7 & 0 & 4/7 \\ 1/2 & -31/14 & -1/2 & -15/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/14 & 13/14 & 1/14 & -1/14 \\ 11/14 & -5/14 & 5/14 & -5/14 \\ 5/14 & -1/14 & 1/14 & 13/14 \\ -5/14 & 1/14 & 13/14 & 1/14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 & 9/4 \\ 1/4 & -1/4 & -9/4 & -1/4 \\ 1/4 & -9/4 & -1/4 & -1/4 \\ 9/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$.

ГС10◇7. Найдите ядро, сингулярные числа, сингулярные направления и образы сингулярных направлений оператора $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ с матрицей

а) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -12 & -7 & -4 & -4 \\ -6 & 24 & -12 & -12 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 & -12 \\ 2 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

ГС10◇8* **(нормальные операторы).** Покажите, что равенство $ff^t = f^t f$ для невырожденного оператора $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ с полярными разложениями $f = g_1h_1 = h_2g_2$ равносильно равенствам $g_1 = g_2$ и $h_1 = h_2$, а также каждому из равенств $g_1h_1 = h_1g_1$ и $g_2h_2 = h_2g_2$.

ГС10◇9*. Найдите экстремумы функции $S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $v \mapsto (v, fv)$, где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — самосопряжённый линейный оператор, а $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, v) = 1\}$ — единичная сфера.

ГС10◇10*. Существует ли в $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ оператор, переводящий подпространства $x_1 + x_2 - x_3 = x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$ и $2x_1 - x_3 - 3x_4 = x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$ соответственно в подпространства $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$ и $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$?