Словарик «Линейная алгебра – Проективная геометрия»

Терминология и обозначения. Точками проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ являются одномерные векторные подпространства в V. Мы полагаем $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$ и $\dim \mathbb{P}(V) \overset{\text{def}}{=} \dim V - 1$. Для ненулевого ковектора $\xi \in V^*$ множество одномерных подпространств, порождённых такими векторами $v \in V$, что $\xi(v) \neq 0$, является аффинным пространством над векторным подпространством $\operatorname{Ann}\xi \subset V$. Оно обозначается U_ξ и называется *аффинной картой*. Проективное подпространство $\mathbb{P}(\operatorname{Ann}\xi) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *бесконечной гиперплоскостью* аффинной карты U_ξ. Если $n+1$ ковекторов $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n$ образуют базис в V^*, функции $t_i = \xi_i/\xi : U_\xi \to \Bbbk$ называются *локальными аффинными координатами* в карте U_ξ относительно этого базиса. Аффинные карты $U_i \overset{\text{def}}{=} U_{x_i}$, где $x_0, x_1, \dots, x_n$ — стандартные координаты на $\Bbbk^{n+1}$, называются *стандартными* аффинными картами на $\mathbb{P}_n$. В качестве стандартных аффинных координат на U_i берутся n функций $t_\nu^{(i)} = x_\nu / x_i$, где $0 \leqslant \nu \leqslant n$ и $\nu \neq i$. Набор отношений $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ называется *однородными координатами* на $\mathbb{P}_n$. Для линейно независимых векторов $A, B, C, D, \ldots \in V$ под прямой (AB), плоскостью (ABC), трёхмерным пространством $(ABCD)$, … в пространстве $\mathbb{P}(V)$ понимаются проективизации, соответственно, двумерной линейной оболочки векторов A и B, трёхмерной линейной оболочки векторов A, B и C, четырёхмерной линейной оболочки векторов A, B, C и D, и т. д.

ГС4◇1. Сколько k-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$ над полем из q элементов?

ГС4◇2. Напишите уравнение кривой $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ на $\mathbb{P}_2$ в каких-нибудь локальных аффинных координатах на картах **а)** $U_2 = U_{x_2}$ **б)** $U_1 = U_{x_1}$ **в)** $U_{x_2 - x_1}$.

ГС4◇3. При каком условии на три прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 на проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ в векторном пространстве V^* можно выбрать такой базис x_0, x_1, x_2, что каждая прямая ℓ_i является бесконечно удалённой для стандартной аффинной карты $U_i = \{v \in V \mid x_i(v) \neq 0\}$?

ГС4◇4. Укажите три точки $A, B, C \in \mathbb{P}_2$ так, чтобы точки $A' = (1 : 0 : 0)$, $B' = (0 : 1 : 0)$ и $C' = (0 : 0 : 1)$ лежали, соответственно, на прямых (BC), (CA) и (AB), а прямые (AA'), (BB') и (CC') пересекались в точке $(1 : 1 : 1)$.

ГС4◇5. Рассмотрим в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{v \in V \mid \xi(v) \neq 0\}$, отвечающую ненулевому ковектору $\xi \in V^*$, и k-мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_n$, ассоциированное с $(k+1)$-мерным векторным подпространством $W \subset V$. Убедитесь, что либо $K \cap U_\xi = \varnothing$, либо $K \cap U_\xi$ наблюдается в аффинном пространстве U_ξ как k-мерное аффинное подпространство.

ГС4◇6. Пусть сумма размерностей двух непересекающихся проективных подпространств L_1 и L_2 в $\mathbb{P}_n$ равна $n-1$. Покажите, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \smallsetminus (L_1 \sqcup L_2)$ существует единственная прямая $\ell \ni p$, пересекающая как L_1, так и L_2.

ГС4◇7. Кубика Веронезе C_3 в проективизации $\mathbb{P}_3$ векторного пространства однородных кубических многочленов от двух переменных t_0, t_1 с коэффициентами в поле $\mathbb{C}$ состоит из ненулевых многочленов, являющихся полными кубами[1]. Опишите проекцию кривой C_3

а) из точки t_0^3 на плоскость $\left(3\,t_0^2 t_1,\ 3\,t_0 t_1^2,\ t_1^3\right)$

б) из точки $3\,t_0^2 t_1$ на плоскость $\left(t_0^3,\ 3\,t_0 t_1^2,\ t_1^3\right)$

в) из точки $3 t_0 t_1 (t_0 + t_1)$ на плоскость $\left(t_0^3,\ 3\,t_0^2 t_1,\ t_1^3\right)$.

А именно, напишите параметрическое уравнение кривой-образа в однородных координатах на плоскости проекции, а также (непараметрическое) аффинное уравнение кривой-образа в каждой из трёх стандартных аффинных карт и нарисуйте все девять аффинных кривых, задаваемых этими аффинными уравнениями над полем $\mathbb{R}$. Убедитесь, что кривая в (б) имеет остриё, а кривая в (в) — самопересечение (над $\mathbb{C}$).

ГС4◇8*. Постройте гомеоморфизмы **а)** между $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ и лентой Мёбиуса с заклеенной диском границей **б)** между $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

[1] Т. е. представимых в виде $(\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1)^3$, где $(\alpha_0 : \alpha_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1$.