Билинейные формы

Обозначения. Мы рассматриваем конечномерное векторное пространство V над произвольным полем $\Bbbk$. Двойственное к V пространство линейных функций $\varphi : V \to \Bbbk$ обозначается через V^*. Если на пространстве V задана билинейная форма $\beta : V\times V \to \Bbbk$, то её значение $\beta(u, w) \in \Bbbk$ на векторах $u, w \in V$ иногда удобно записывать в виде произведения[1] $u \cdot w$. Для двух наборов векторов $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, где $u_i, w_j \in V$, матрица $B_{\boldsymbol{uw}} = \boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{w} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ с элементами $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$ называется *матрицей Грама* этих наборов и формы β. Если наборы совпадают: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$, мы пишем просто $B_{\boldsymbol{u}}$ вместо $B_{\boldsymbol{uu}}$. В этом случае $\det B_{\boldsymbol{u}} \in \Bbbk$ называется *определителем Грама* формы β и набора векторов $\boldsymbol{u}$.

ГС1◇1. Пусть наборы векторов $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ линейно выражаются через наборы векторов $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ и $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \dots, s_\ell)$ по формулам $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}\, C_{\boldsymbol{ru}}$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{s}\, C_{\boldsymbol{sw}}$, где $C_{\boldsymbol{ru}} \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\Bbbk)$, $C_{\boldsymbol{sw}} \in \mathrm{Mat}_{\ell\times m}(\Bbbk)$ — матрицы, по столбцам которых стоят коэффициенты этих выражений. Выразите матрицу Грама $B_{\boldsymbol{uw}}$ произвольно зафиксированной билинейной формы β через матрицу Грама $B_{\boldsymbol{rs}}$ той же формы и матрицы $C_{\boldsymbol{ru}}$, $C_{\boldsymbol{sw}}$.

ГС1◇2. Покажите, что определитель Грама линейно зависимого набора векторов нулевой.

ГС1◇3. Зафиксируем в пространствах V и V^* двойственные базисы $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$. Сопоставим билинейной форме $\beta : V \times V \to \Bbbk$ линейные операторы *левой* и *правой корреляции* ${}^\wedge\beta, \beta^\wedge : V \to V^*$, переводящие вектор $v \in V$ в линейные функции

$$ {}^\wedge\beta(v) : V \to \Bbbk, \quad u \mapsto \beta(v, u), \quad \text{и} \quad \beta^\wedge(v) : V \to \Bbbk, \quad u \mapsto \beta(u, v). $$

Выразите матрицы этих операторов в базисах $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}^*$ через матрицу Грама $B_{\boldsymbol{e}}$.

ГС1◇4 (ранг и коранг). Для любой билинейной формы $\beta : V \times V \to \Bbbk$ покажите, что

а) (коранг) $\dim\ker {}^\wedge\beta = \dim\ker \beta^\wedge$

б) (ранг) матрицы Грама всех базисов пространства V имеют одинаковый ранг.

в) Приведите пример формы, у которой $\ker {}^\wedge\beta \neq \ker \beta^\wedge$.

ГС1◇5 (невырожденные формы). Докажите, что следующие свойства билинейной формы β на пространстве V равносильны друг другу:

а) в V существует базис с ненулевым определителем Грама

б) любой базис в V имеет ненулевой определитель Грама

в) левая корреляция ${}^\wedge\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом

г) правая корреляция $\beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом

д) для любого ненулевого вектора $u \in V$ существует такой вектор $w \in V$, что $\beta(u, w) \neq 0$

е) для любого ненулевого вектора $w \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(u, w) \neq 0$

ж) для любой линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ существует такой вектор $v \in V$, что $\varphi(u) = \beta(u, v)$ для всех $u \in V$

з) для любой линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ существует такой вектор $v \in V$, что $\varphi(u) = \beta(v, u)$ для всех $u \in V$

причём при выполнении этих условий вектор v в последних двух пунктах определяется формой φ однозначно.

ГС1◇6. Покажите, что у любого базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в пространстве V с невырожденной билинейной формой β имеются левый и правый *двойственные базисы* ${}^\vee\boldsymbol{e} = ({}^\vee e_1, {}^\vee e_2, \dots, {}^\vee e_n)$ и $\boldsymbol{e}^\vee = (e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee)$, однозначно задаваемые тем, что $\beta({}^\vee e_i, e_j) = \beta(e_i, e_j^\vee) = \delta_{ij}$ (δ-символ

[1] Принимающего значения в поле $\Bbbk$ (т. е. *скалярного*) и, вообще говоря, некоммутативного.

Кронекера), и выразите матрицы $C_{\boldsymbol{e}\,{}^\vee\boldsymbol{e}}$ и $C_{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\vee}$, по столбцам которых стоят координаты векторов ${}^\vee e_j$ и $e_j^\vee$ в базисе $\boldsymbol{e}$, через матрицу Грама $B_{\boldsymbol{e}}$. Убедитесь, что любой вектор $v \in V$ выражается через базис $\boldsymbol{e}$ по формулам $v = \sum_i \beta({}^\vee e_i, v)\, e_i = \sum_j \beta(v, e_j^\vee)\, e_j$.

ГС1◇7. Для любой невырожденной билинейной формы β на пространстве V покажите, что

а) (соответствие между формами и операторами) сопоставление линейному оператору $f : V \to V$ билинейной формы $\beta_f(u,w) \overset{\text{def}}{=} \beta(u, f(w))$ задаёт линейный изоморфизм векторного пространства $\operatorname{End}(V)$ линейных эндоморфизмов пространства V с векторным пространством билинейных форм на V

б) (канонический оператор) существует единственный линейный оператор $\varkappa : V \to V$, такой что $\beta(u,w) = \beta(w, \varkappa(u))$ для всех $u, w \in V$. Выразите матрицу оператора $\varkappa$ через матрицу Грама формы β.

ГС1◇8. Покажите, что каждая билинейная форма над полем характеристики $\neq 2$ однозначно представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейных форм. Приведите пример невырожденной билинейной формы, у которой оба слагаемых в этой сумме вырождены. Найдите размерности векторных пространств симметричных и кососимметричных билинейных форм на n-мерном пространстве V.

ГС1◇9. Пусть для любых двух векторов $u, w \in V$ равенства $\beta(u,w) = 0$ и $\beta(w,u) = 0$ равносильны друг другу. Покажите, что форма β симметрична или кососимметрична.

ГС1◇10 (кососимметричность в характеристике 2). Покажите, что над полем $\Bbbk$ любой характеристики равенство $\beta(v,v) = 0$ для всех $v \in V$ влечёт равенство $\beta(u,w) = -\beta(w,u)$ для всех $u, w \in V$, а обратная импликация имеет место только при $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$.

ГС1◇11. Покажите, что ранг любой кососимметричной формы чётен. Подсказка: существует ли на нечётномерном пространстве невырожденная кососимметричная форма?

ГС1◇12. Рассмотрим на пространстве $V = \mathbb{Q}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени $\leqslant n$ с рациональными коэффициентами функцию $\beta(f,g)$, значение которой на многочленах $f, g \in V$ равно свободному члену многочлена[2] $f(d/dx)\, g$. Является ли она билинейной формой? Если да, то напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из мономов и выясните, вырождена ли она? Симметрична ли?

ГС1◇13 (поляризация квадратичных форм). Покажите, что над полем $\Bbbk$ характеристики $\neq 2$ для любого однородного многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ степени два существует единственная симметричная билинейная форма $\widetilde{f}$ на координатном пространстве $\Bbbk^n$, такая что $f(v) = \widetilde{f}(v,v)$ для всех $v \in \Bbbk^n$. Убедитесь, что $\widetilde{f}$ выражается через f по формуле

$$2\widetilde{f}(u,w) = f(u+w) - f(u) - f(w)\,.$$

ГС1◇14. Напишите матрицу Грама формы $\widetilde{f}$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{Q}^n$ и укажите какой-нибудь базис, в котором матрица Грама этой формы диагональна, для следующих квадратичных многочленов $f \in \mathbb{Q}[x]$:

а) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3$

б) $2x_1x_2 - x_3x_4 + 4x_1x_3 + 6x_2x_4$.

[2] В первый многочлен вместо x подставили оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ и применили полученный дифференциальный оператор ко второму многочлену.