Правильные многогранники (по Кокстеру).

Терминология и обозначения. Конечная группа G ортогональных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется *группой Кокстера*, если она порождается отражениями в гиперплоскостях. Замыкания связных компонент дополнения к объединению зеркал всех отражений из группы G называются *камерами Вейля*. Векторы единичной длины, перпендикулярные зеркалам отражений из группы G, называется *корнями* группы G. Корни, перпендикулярные стенкам некоторой фиксированной камеры Вейля и направленные внутрь от этой камеры, называются *простыми*. *Граф Кокстера* группы G имеет в качестве вершин стенки некоторой фиксированной камеры Вейля, при этом стенки, образованные зеркалами H_i и H_j, соединяются $m_{ij}-2$ рёбрами, где m_{ij} — число всех проходящих через $H_i \cap H_j$ зеркал отражений из группы G. Под *симметрией* фигуры $F \subset \mathbb{R}^n$ понимается биекция $F \xrightarrow{\sim} \Phi$, задаваемая ортогональным линейным преобразованием пространства $\mathbb{R}^n$. Группа симметрий фигуры F обозначается O_F. Всюду далее $P \subset \mathbb{R}^n$ по умолчанию означает правильный многогранник с центром в нуле.

ГЛ5⅔◇1. Покажите, что каждая симметрия $g \in \mathrm{O}_\Gamma$ любой грани Γ правильного многогранника P продолжается до симметрии $\widetilde{g} \in \mathrm{O}_P$ всего многогранника, причём всякое отражение[1] $g \in \mathrm{O}_\Gamma$ продолжается до отражения $\widetilde{g} \in \mathrm{O}_P$.

ГЛ5⅔◇2. Зафиксируем вершину F_0 правильного многогранника P, примыкающее к ней ребро F_1, примыкающую к нему двумерную грань F_2, и т. д. вплоть до самого многогранника $F_n = P$. Докажите, что группа O_P порождается следующими n отражениями: отражением σ_1, продолжающим отражение ребра F_1 относительно его середины, отражением σ_2, продолжающим отражение двумерной грани F_2 относительно оси, проходящей через вершину F_0, отражением σ_3, продолжающим отражение трёхмерной грани F_3 в плоскости, проходящей через ребро F_1, и т. д. вплоть до отражения σ_n всего многогранника P в гиперплоскости, проходящей через грань[2] $F_{n-2} \subset P$.

ГЛ5⅔◇3. Для произвольного флага $\varnothing = F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n = P$ и каждого $k = 1, \dots, n-1$ обозначим через ν_k количество k-мерных граней многогранника P, содержащихся в грани F_{k+1} и содержащих грань F_{k-2}. Далее, для каждого $i = 1, \dots, n$ обозначим через H_i гиперплоскость, проходящую через центры всех граней F_ν с $\nu \neq i-1$, а через a_i — единичный нормальный вектор этой гиперплоскости, направленный в полупространство, содержащее центр грани F_{i-1}. Отражение в гиперплоскости H_i обозначим через $\sigma_i = \sigma_{a_i}$. Покажите, что: **а)** последовательность $\boldsymbol{\nu}(P) = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1})$ является символом Шлефли[3] многогранника P **б)** векторы a_i составляют систему простых корней группы O_P **в)** отражения σ_i удовлетворяют соотношениям $\sigma_i^2 = \mathrm{Id} = \left(\sigma_i\sigma_{i+1}\right)^{\nu_i}$ **г*)** группа O_P является фактором свободной группы с образующими $\sigma_1, \dots \sigma_n$ по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей слова σ_i^2 и $\left(\sigma_i\sigma_{i+1}\right)^{\nu_i}$ **д)** стабилизатор грани F_k в группе O_P порождается отражениями σ_i с $i \neq k+1$.

ГЛ5⅔◇4*. Покажите, что граф Кокстера группы O_P **а)** *линеен*[4] **б)** является одним из графов[5] A_n, B_n, H_3, H_4, F_4, $I_2(m)$ **в)** с точностью до подобия отвечает одному самодвойственному или двум двойственным друг другу в смысле задачи Г5½◇5 многогранникам P. Получите отсюда второе решение задачи Г5½◇7.

ГЛ5⅔◇5*. Сколько движений в группах 4-мерных правильных многогранников с символами $(3,4,3)$, $(3,3,5)$ и $(5,3,3)$? Попытайтесь явно перечислить все эти движения.

ГЛ5⅔◇6*. Покажите, что группы симметрий многогранников с графами из зад. ГЛ5⅔◇4 (б) имеют соответственно порядки $(n+1)!$, $2^n n!$, 120, 14400, 1152, $2m$.

---

[1] В гиперплоскости, лежащей внутри наименьшего аффинного подпространства, содержащего грань Γ.

[2] Эта грань имеет коразмерность 2.

[3] См. задачу Г5½◇2.

[4] Т. е. не содержит вершин, соединённых более чем с двумя другими различными вешинами.

[5] Эти графы нарисованы на стр. 126 в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_07.pdf.

Персональный табель ____. **Листок № 5$\frac{2}{3}$ (необязательный)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
д			
4а			
б			
в			
5			
6			