

Проективные квадрики

- ГЛЗ♦1.** Одной линейкой постройте касательную к гладкой конике C в заданной точке $p \in C$.
- ГЛЗ♦2.** Треугольники $\Delta a_1 b_1 c_1$ и $\Delta a_2 b_2 c_2$ на \mathbb{P}_2 вписаны в одну и ту же гладкую конику. Перспективен¹ ли треугольник со сторонами $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$ треугольнику с вершинами $(a_1 b_1) \cap (a_2 b_2)$, $(b_1 c_1) \cap (b_2 c_2)$, $(c_1 a_1) \cap (c_2 a_2)$?
- ГЛЗ♦3.** Покажите, что два треугольника на \mathbb{P}_2 перспективны если и только если они полярны друг другу относительно некоторой гладкой коники.
- ГЛЗ♦4.** Покажите, что две инволюции на гладкой конике C коммутируют друг с другом если и только если пары их неподвижных точек гармоничны на C .
- ГЛЗ♦5*.** Покажите, что три инволюции на гладкой конике C тогда и только тогда составляют вместе с тождественным преобразованием Id_C группу $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, когда прямые, соединяющие пары их неподвижных точек, образуют автополярный относительно C треугольник.
- ГЛЗ♦6*.** Одной линейкой постройте описанный около данной гладкой коники треугольник с вершинами на трёх заданных прямых. Сколько решений может иметь эта задача в принципе и сколько — при достаточно общем расположении прямых и коники?
- ГЛЗ♦7.** Из скольких точек состоят над полем² $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$
- а) коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ на \mathbb{P}_2
 - б) квадрака $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ в \mathbb{P}_3 ?
- ГЛЗ♦8.** Покажите, что проекция гладкой квадраки $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $\Gamma \not\ni p$ задаёт бирациональную биекцию³ между дополнением $Q \setminus T_p Q$ и аффинным пространством⁴ $\Gamma \setminus T_p Q \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.
- ГЛЗ♦9.** Квадрика Сегре $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End } U)$ состоит из рассматриваемых с точностью до пропорциональности линейных операторов ранга 1 на двумерном векторном пространстве U . Покажите, что касательное пространство к S в точке $v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \xi(u)$, где $u \in U$, $\xi \in U^*$, является проективизацией векторного пространства $\{f : U \rightarrow U \mid f(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v\}$.
- ГЛЗ♦10.** В условиях предыдущей задачи покажите, что гомография $\bar{f} \in \text{PGL}(U) = \mathbb{P}(\text{End } U) \setminus S$, $\bar{f} : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(U)$, переводит точку a в точку b если и только если плоскость, проходящая в $\mathbb{P}(\text{End } U)$ через точку \bar{f} и лежащую на S прямую $\mathbb{P}(U) \otimes a^\times$, где $a^\times \in \mathbb{P}(U^*)$, $a^\times(v) = \det(v, a)$, пересекает квадраку S по объединению прямых $\mathbb{P}(U) \otimes a^\times$ и $b \otimes \mathbb{P}(U^*)$.
- ГЛЗ♦11.** Даны четыре попарно не пересекающиеся прямые в а) $\mathbb{P}(C^4)$ б) $\mathbb{A}(C^4)$ в) $\mathbb{P}(R^4)$. Сколько прямых пересекает их все? Укажите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.
- ГЛЗ♦12*.** В пространстве \mathbb{P}_3 над бесконечным полем заданы шесть точек p_{ij} , занумерованных парами цифр $1 \leq i < j \leq 4$, причём никакие четыре из этих точек не компланарны. Покажите, что плоскости⁵ $(p_{12} p_{13} p_{14})$, $(p_{12} p_{23} p_{24})$, $(p_{13} p_{23} p_{34})$, $(p_{14} p_{24} p_{34})$ пересекаются в одной точке если и только если плоскости⁶ $(p_{12} p_{23} p_{13})$, $(p_{12} p_{24} p_{14})$, $(p_{13} p_{14} p_{34})$, $(p_{23} p_{24} p_{34})$ пересекаются в одной точке.

¹См. зад. ГЛ2♦6

²Другими словами, поле \mathbb{F}_9 состоит из чисел вида $a + b\sqrt{-1}$, где $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$ и $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{Z}/(3)$.

³Соответствие между проективными многообразиями называется *бirationальным*, если однородные координаты соответствующих друг другу точек являются рациональными функциями друг друга.

⁴Заодно убедитесь, что это дополнение действительно является аффинным пространством размерности $n - 1$.

⁵Натянутые на тройки точек с имеющими одну общую цифру парами индексов.

⁶Натянутые на тройки точек с не содержащими некоторую цифру парами индексов.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8			
9			
10			
11			
12			