Проективные пространства

ГЛ2◇1. Найдите порядки групп $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов.

ГЛ2◇2. Подмножество $\Phi \subset \mathbb{P}_n(\Bbbk)$ таково, что в каждой аффинной карте, с которой оно пересекается, его видно как k-мерное аффинное подпространство. Верно ли, что $\Phi = \mathbb{P}(W)$ для некоторого $(k+1)$-мерного векторного подпространства $W \subset \Bbbk^{n+1}$ **а)** если поле $\Bbbk \neq \mathbb{F}_2$ **б*)** если $\Bbbk = \mathbb{F}_2$? Всегда ли есть аффинная карта, где Φ вообще не видно?

ГЛ2◇3. Справедливы ли следующие соотношения между двойными отношениями на $\mathbb{P}_1$:

а) $[p_1, p_2, p_3, p_4][p_1, p_2, p_4, p_5][p_1, p_2, p_5, p_3] = 1$ для любых пяти различных точек p_i

б) $[p_1, p_2, q_3, q_4][p_2, p_3, q_1, q_4][p_3, p_1, q_2, q_4][q_1, q_2, p_3, p_4][q_2, q_3, p_1, p_4][q_3, q_1, p_2, p_4] = 1$ для любых восьми различных точек $p_1, \dots, p_4, q_1, \dots, q_4$?

ГЛ2◇4 (теорема Паппа). Пусть на $\mathbb{P}_2$ точки a_1, b_1, c_1 коллинеарны и точки a_2, b_2, c_2 коллинеарны. Докажите, что три точки пресечений прямых $(a_1b_2) \cap (a_2b_1)$, $(b_1c_2) \cap (b_2c_1)$, $(c_1a_2) \cap (c_2a_1)$ тоже коллинеарны.

ГЛ2◇5. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение к теореме Паппа.

ГЛ2◇6 (первая теорема Дезарга). Покажите, что три точки пересечения пар соответственных[1] сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на $\mathbb{P}_2$ коллинеарны если и только если три прямые, проходящие через пары соответственных вершин, пересекаются в одной точке[2].

ГЛ2◇7 (вторая теорема Дезарга). Три различные точки $p, q, r \in \mathbb{P}_2$ лежат на прямой ℓ, а три различные точки a, b, c — вне неё. Докажите, что инволюция $\sigma : \ell \xrightarrow{\sim} \ell$, переводящая точки p, q, r в точки пересечения прямой ℓ с прямыми (bc), (ca), (ab), существует если и только если прямые (ap), (bq), (cr) пересекаются в одной точке.

ГЛ2◇8. На доске указаны две точки. При помощи линейки, которая короче расстояния между ними, проведите через эти точки прямую.

ГЛ2◇9. На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB.

ГЛ2◇10* (нормальные рациональные кривые). Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, и $S^d \subset \Bbbk[t_0, t_1]$ обозначает векторное пространство однородных многочленов степени d. Будем записывать такие многочлены в виде $\sum_\nu a_\nu \cdot \binom{d}{\nu} t_0^\nu t_1^{d-\nu}$ и использовать коэффициенты $a_\nu \in \Bbbk$ как однородные координаты на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d)$. Для любых наборов различных точек $p_0, p_1, \dots, p_d$ на $\mathbb{P}_1$ и линейно независимых многочленов $f_0, f_1, \dots, f_d \in S^d$ покажите, что образ отображения $\mathbb{P}(S^1) \to \mathbb{P}(S^d)$, $\psi \mapsto \psi^d$, и образы двух отображений $\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_d$, посылающих точку $a = (a_0 : a_1) \in \mathbb{P}_1$ в точки $\big(f_0(a) : \dots : f_d(a)\big)$ и $\big(\det^{-1}(p_0, a) : \dots : \det^{-1}(p_d, a)\big)$, где $\det(b, a) \overset{\text{def}}{=} b_0a_1 - b_1a_0$ для $b = (b_0 : b_1) \in \mathbb{P}_1$, переводятся друг в друга подходящими проективными преобразованиями пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d)$.

ГЛ2◇11*. Фиксируем $d+3$ точки $p_1, p_2, \dots, p_d, a, b, c \in \mathbb{P}_d$ так, чтобы никакие $d+1$ из них не лежали в одной гиперплоскости. Обозначим через $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$ пучок гиперплоскостей, проходящих через все точки p_ν с $\nu \neq i$, а через $\psi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$ — гомографию, переводящую три проходящие через точки a, b, c гиперплоскости из пучка ℓ_j в аналогичные три гиперплоскости из пучка ℓ_i. Покажите что ГМТ $\bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \ldots \cap \psi_{n1}(H)$ это нормальная рациональная кривая. Если общий случай труден, рассмотрите $d = 2, 3$.

ГЛ2◇12*. Покажите, что через каждые $n+3$ точки в $\mathbb{P}_n$, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, можно провести единственную нормальную рациональную кривую. Если общий случай труден, рассмотрите $d = 2, 3$.

[1] Т. е. поименованных одинаковыми буквами.

[2] Треугольники, обладающие этими свойствами, называются *перспективными*.

Персональный табель ____. **Листок № 2 (29 января 2019)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3а			
б			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			