

## Пространства со скалярным произведением

- ГЛ1♦1.** Какими могут быть ранг и сигнатура ограничения невырожденной вещественной квадратичной формы сигнатуры  $(p, q)$  на гиперплоскость<sup>1</sup>?
- ГЛ1♦2.** Убедитесь, что функция  $A \mapsto \det A$  является квадратичной формой на пространстве  $\text{Mat}_2(\mathbb{k})$ , и опишите такое линейное преобразование  $Y \mapsto Y^?$  пространства  $\text{Mat}_2(\mathbb{k})$ , что поляризация формы  $\det$  имеет вид  $2 \widetilde{\det}(X, Y) = \text{tr}(X \cdot Y^?)$ . Найдите сигнатуру формы  $\det$  над  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ . Гиперболична ли эта форма над  $\mathbb{k} = \mathbb{F}_p$ ?
- ГЛ1♦3.** Для  $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  пусть  $\det(tE - X) = t^n - \sigma_1(X)t^{n-1} + \sigma_2(X)t^{n-2} - \dots$ . Покажите, что  $\sigma_2(X)$  является квадратичной формой на пространстве  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ , и вычислите её ранг и сигнатуру. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для  $n = 2, 3, 4$ .
- ГЛ1♦4.** Найдите сигнатуру квадратичной формы  $\text{tr}(A^2)$  на пространстве  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ . Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для  $n = 2, 3, 4$ .
- ГЛ1♦5.** Рассмотрим кольцо  $K = \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x + 1)$  как трёхмерное векторное пространство над полем  $\mathbb{F}_3$  с симметричной билинейной формой<sup>2</sup>  $\text{tr}(ab)$ . Напишите её матрицу Грама в базисе  $1, [x], [x^2]$  и выясните, есть ли в  $K$  гиперболическая плоскость.
- ГЛ1♦6.** Покажите, что гиперболичность пространства  $W$  с невырожденной квадратичной формой равносильна каждому из условий: **а)**  $\dim W = 2k$  и в  $W$  есть  $k$ -мерное изотропное подпространство, **б)**  $W = U_1 \oplus U_2$ , где  $U_1$  и  $U_2$  изотропны.
- ГЛ1♦7.** Перечислите все анизотропные формы над полем  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ .
- ГЛ1♦8.** Покажите, что симплектическая группа транзитивно действует на симплектических и на изотропных подпространствах любой фиксированной размерности.
- ГЛ1♦9\***. Приведите пример пространства  $V$  с вырожденной билинейной формой  $\beta$  и дополнительного к ядру левой корреляции  $\beta: V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto \beta(v, *)$ , подпространства  $U \subset V$  таких, что ограничение формы  $\beta$  на  $U$  вырождено.
- ГЛ1♦10\***. Пусть билинейная форма  $\beta$  на пространстве  $V$  ограничивается в невырожденную форму на конечномерном подпространстве  $U \subset V$ . Постройте сохраняющий скалярное произведение<sup>3</sup> линейный изоморфизм между пространствами

$${}^{\perp}U \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(v, u) = 0\} \quad \text{и} \quad U^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(u, v) = 0\}.$$

<sup>1</sup>Т. е. на векторное подпространство коразмерности 1.

<sup>2</sup>След умножения на  $ab: K \rightarrow K, x \mapsto abx$ .

<sup>3</sup>Т. е. такой изоморфизм  $f: {}^{\perp}U \xrightarrow{\sim} U^{\perp}$ , что  $\beta(f(v), f(w)) = \beta(v, w)$  для всех  $v, w \in {}^{\perp}U$ .

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9			
10			