

## §14. Эллиптическая геометрия

**14.1. Эллиптическое пространство.** Рассмотрим векторное пространство  $V \simeq \mathbb{R}^{n+1}$  с евклидовым скалярным произведением  $(u, w)$ . Его проективизация  $\mathbb{E}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V)$  называется *эллиптическим пространством*. Пространство  $V$  можно воспринимать как множество вещественных векторов комплексного векторного пространства  $V_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus iV \simeq \mathbb{C}^{n+1}$  с симметричной комплексно билинейной формой  $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , продолжающей евклидово скалярное произведение  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  по правилу  $(u_1 + iw_1, u_2 + iw_2) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1, u_2) - (w_1, w_2) + i((u_1, w_2) + (w_1, u_2)) \in \mathbb{C}$ . Его проективизацию обозначим через  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ . Вещественное проективное пространство  $\mathbb{E}_n$  вложено в  $\mathbb{P}_n$  как множество точек, инвариантных относительно комплексного сопряжения  $p \mapsto \bar{p}$ . Изотропные векторы скалярного произведения образуют в комплексном пространстве  $\mathbb{P}_n$  гладкую проективную квадрику

$$G_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} \mid (p, p) = 0\}, \quad (14-1)$$

которая называется *абсолютом* и не имеет вещественных точек.

**14.1.1. Эллиптическое расстояние.** Вещественные проективные прямые  $\ell = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{E}_n$  называются *геодезическими*. Каждая геодезическая пересекает абсолют (14-1) по двум невещественным комплексно сопряжённым точкам. Если обозначить их через  $a_1, a_2$ , то скалярное произведение векторов  $u, w \in U$ , имеющих столбцы координат  $x, y \in \mathbb{C}^2$  в каком-либо базисе двумерного пространства  $U$  запишется как<sup>1</sup>

$$(u, w) = \frac{c}{2} (\det(x, a_1) \det(y, a_2) + \det(y, a_1) \det(x, a_2))$$

где  $c \in \mathbb{C}$  — некая константа. Для любых двух вещественных точек  $p_1, p_2 \in \ell$  отношение

$$\begin{aligned} \frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} &= \frac{1}{4} \frac{(\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2) + \det(p_2, a_1) \det(p_1, a_2))^2}{\det(p_1, a_1) \det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1) \det(p_2, a_2)} = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)}{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)} + 2 + \frac{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)}{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} ([p_1, p_2, a_1, a_2] + 2 + [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1}) = \\ &= \left( \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2} \right)^2, \quad \text{где } \vartheta = \frac{1}{2} \ln [p_1, p_2, a_1, a_2] \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (14-2)$$

не меняется при замене векторов, представляющих точки  $p_1, p_2$  на пропорциональные, а также при умножении скалярного произведения в  $V$  на любую ненулевую константу. Кроме того, число  $\vartheta$  в самой нижней строке формулы (15-3) чисто мнимо и имеет вид  $\vartheta = it$ , где  $t \in [0, \pi/2]$ . В самом деле, двойное отношение  $[p_1, p_2, a_1, a_2] \in \mathbb{C}$  сопряжено своему обратному:

$$\overline{[p_1, p_2, a_1, a_2]} = [p_1, p_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2] = [p_1, p_2, a_2, a_1] = [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1},$$

и, стало быть, лежит на единичной окружности  $|z| = 1$  в  $\mathbb{C}$ . Тем самым, либо само это двойное отношение, либо обратное к нему имеет вид  $e^{i\varphi}$ , где  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , и является квадратом числа  $e^{it}$ , где  $t = \varphi/2$ . Таким образом, квадрат в последней строке формулы (15-3) является квадратом

<sup>1</sup>Ср. с упр. 6.5 на стр. 70.

косинуса вещественного числа  $t = \frac{1}{2} |\operatorname{Arg}[p_1, p_2, a_1, a_2]| \in [0, \pi/2]$ . Это число называется *эллиптическим расстоянием* между точками  $p_1, p_2 \in \mathbb{E}_n$  и обозначается  $|p_1, p_2|$ . Его можно вычислять по любой из формул

$$\begin{aligned} \cos |p_1, p_2| &= \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}}, \\ |p_1, p_2| &= \left| \frac{\ln[p_1, p_2, a_1, a_2]}{2i} \right| = \frac{|\operatorname{Arg}[p_1, p_2, a_1, a_2]|}{2}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Если точки  $p_1, p_2$  представлены векторами  $v_1, v_2 \in V$  единичной евклидовой длины, то первая из этих формул упрощается до

$$\cos |p_1, p_2| = |(v_1, v_2)|.$$

На геометрическом языке, эллиптическое расстояние  $|p_1, p_2|$  между точками проективной прямой  $\ell = \mathbb{P}(U)$  равно длине кратчайшей из дуг, отсекаемых прямыми  $p_1, p_2 \subset U$  на единичной окружности  $S^1 = \{u \in U \mid (u, u) = 1\}$  в  $U$ , см. рис. 14◊1.

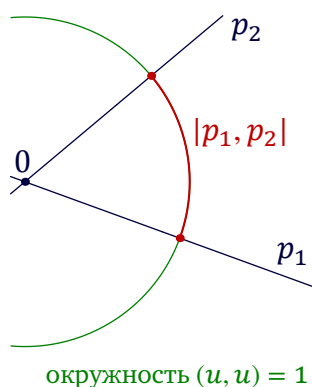


Рис. 14◊1. Эллиптическое расстояние.

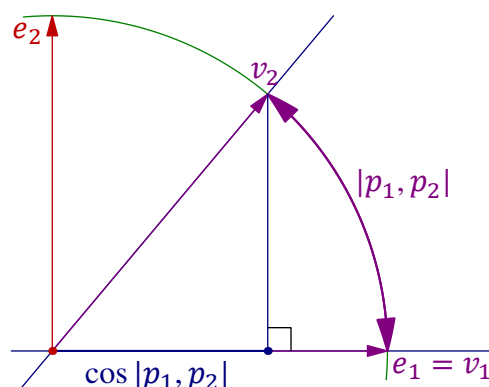


Рис. 14◊2.  $\cos |p_1, p_2| = |(v_1, v_2)|$ .

В самом деле, меняя, если надо, номера точек  $p_1, p_2$  и направления представляющих эти точки единичных векторов  $v_1, v_2$ , мы можем выбрать в  $U$  ортонормальный базис  $e_1, e_2$  так, чтобы  $v_1 = e_1$ , а вектор  $v_2$  лежал в первом координатном квадранте, как на рис. 14◊2, где косинус дуги  $[v_1, v_2]$  как раз и равен  $(v_1, v_2)$ .

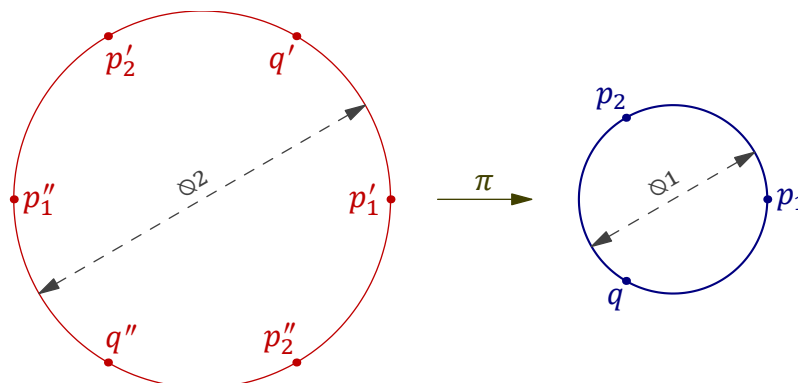


Рис. 14◊3. Факторизация единичной окружности до эллиптической геодезической.

Окружность  $S^1$  является метрическим пространством с расстоянием между точками, равным длине кратчайшей из двух соединяющих эти точки дуг. Проективная прямая  $(p_1 p_2) \subset \mathbb{E}_2$  является образом окружности  $S^1$  при отображении факторизации  $\pi : S^1 \rightarrow (p_1 p_2)$ , склеивающем противоположные векторы в одну точку, как на рис. 14◊3. Это отображение является локальной изометрией в том смысле, что любая дуга длины не более  $\pi/2$  на  $S^1$  отображается на отрезок прямой  $(p_1 p_2)$  так, что расстояние между точками на  $S^1$  равно эллиптическому расстоянию между их образами на  $(p_1 p_2)$ . Ограничение  $\pi$  на любую полуокружность в  $S^1$  сюръективно отображает эту полуокружность на геодезическую  $(p_1 p_2)$ . Покрывая полуокружность двумя дугами длины  $\pi/2$ , мы заключаем, что каждая геодезическая на эллиптической плоскости изометрически гомеоморфна окружности длины  $\pi$ , и эллиптическое расстояние между точками  $p_1, p_2$  на окружности  $(p_1 p_2)$  равно длине кратчайшей из двух дуг, на которые окружность  $(p_1 p_2)$  разбивается точками  $p_1, p_2$ . Сама эта кратчайшая дуга характеризуется как ГМТ  $p \in (p_1 p_2)$ , удовлетворяющих соотношению  $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ , см. рис. 14◊4. Она обозначается  $[p_1, p_2]$  и называется геодезическим отрезком с концами  $p_1, p_2$ . Обратите внимание, что при  $|p_1, p_2| < \pi/2$  геодезический отрезок единствен, а при  $|p_1, p_2| = \pi/2$  имеются два различных геодезических отрезка  $[p_1, p_2]$ , см. рис. 14◊5.

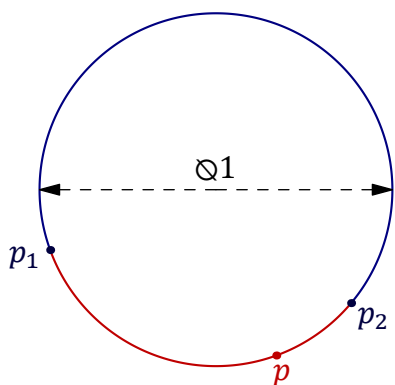


Рис. 14◊4. ГМТ  $p$ :  
 $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ .

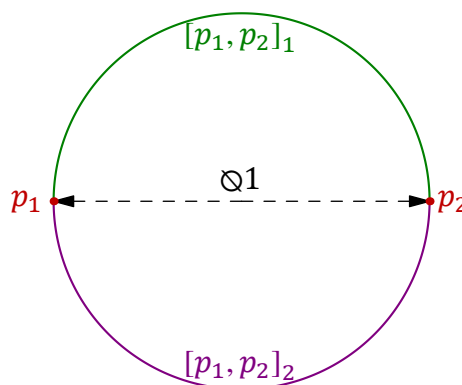


Рис. 14◊5. Два геодезических отрезка  $[p_1, p_2]$  при  $|p_1, p_2| = \pi/2$ .

ТЕОРЕМА 14.1

Геодезическое расстояние (14-3) задаёт на эллиптическом пространстве  $\mathbb{E}_n$  метрику. Геодезические отрезки  $[p_1, p_2] \subset \mathbb{E}_n$  суть ГМТ  $p \in \mathbb{E}_n$ , для которых  $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ .

Доказательство. Положительность и симметричность расстояния (14-3) очевидны. Неравенство треугольника вытекает из того, что определитель Грама, составленный из евклидовых скалярных произведений ненулевых векторов  $p_1, p_2, p_3$  единичной длины неотрицателен и обращается в нуль если и только если эти векторы линейно зависимы, т. е. лежат на одной геодезической. В самом деле, полагая  $g_{ij} = (p_i, p_j)$ , мы получаем неравенство

$$\det \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 \geq 0. \tag{14-4}$$

В силу монотонного убывания функции  $\cos x$  на  $[0, \pi]$ , неравенство треугольника

$$|p_1, p_2| + |p_2, p_3| \geq |p_1, p_3| \tag{14-5}$$

равносильно неравенству  $\cos(|p_1, p_2| + |p_2, p_3|) \leq \cos |p_1, p_3|$ , которое переписывается как

$$\cos |p_1, p_2| \cdot \cos |p_2, p_3| - \cos |p_1, p_3| \leq \sin |p_1, p_2| \cdot \sin |p_2, p_3|.$$

Поскольку правая часть неотрицательна, при отрицательной левой части неравенство треугольника выполняется строго. Если левая часть неотрицательна, обе части неравенства можно возвести в квадрат. Вспоминая, что  $\cos^2 |p_i, p_j| = (p_i, p_j)^2 = g_{ij}^2$ , получаем

$$g_{12}^2 g_{23}^2 + g_{13}^2 - 2g_{12} g_{23} g_{13} \leq (1 - g_{12}^2)(1 - g_{13}^2),$$

что превращается в (14-4) после раскрытия скобок и переноса левой части направо. Равенство в (14-5) влечёт равенство в (14-4), а значит, линейную зависимость точек  $p_i$ . Это доказывает неравенство треугольника, а также то, что равенство в нём возможно только при  $p_2 \in (p_1 p_3)$ . С другой стороны, мы уже видели выше, что ГМТ  $p \in (p_1 p_2)$ , удовлетворяющих соотношению  $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ , представляет собою геодезический отрезок  $[p_1, p_2]$ , см. рис. 14◊4. □

**14.1.2. Касательные векторы и углы.** Каждая точка  $p \in \mathbb{E}_n = \mathbb{P}(V)$  обладает канонической аффинной окрестностью. А именно, с каждым ненулевым вектором  $w \in p$  связан ковектор

$$w^* : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto (v, w)/(w, w), \tag{14-6}$$

сопоставляющий вектору  $v \in V$  координату его ортогональной проекции на одномерное анизотропное подпространство  $p \subset V$  в базисе  $w$  этого подпространства. Этот ковектор задаёт на  $\mathbb{P}(V)$  аффинную карту<sup>1</sup>  $U_{w^*} = \{v \in V \mid (v, w) = (w, w)\} = w + p^\perp$ , которая содержит точку  $p$  и представляет собою проходящее через конец вектора  $w$  аффинное пространство в  $A(V)$  с направляющим векторным пространством  $\text{Ann } w^* = p^\perp = \{v \in V \mid (v, p) = 0\}$ .

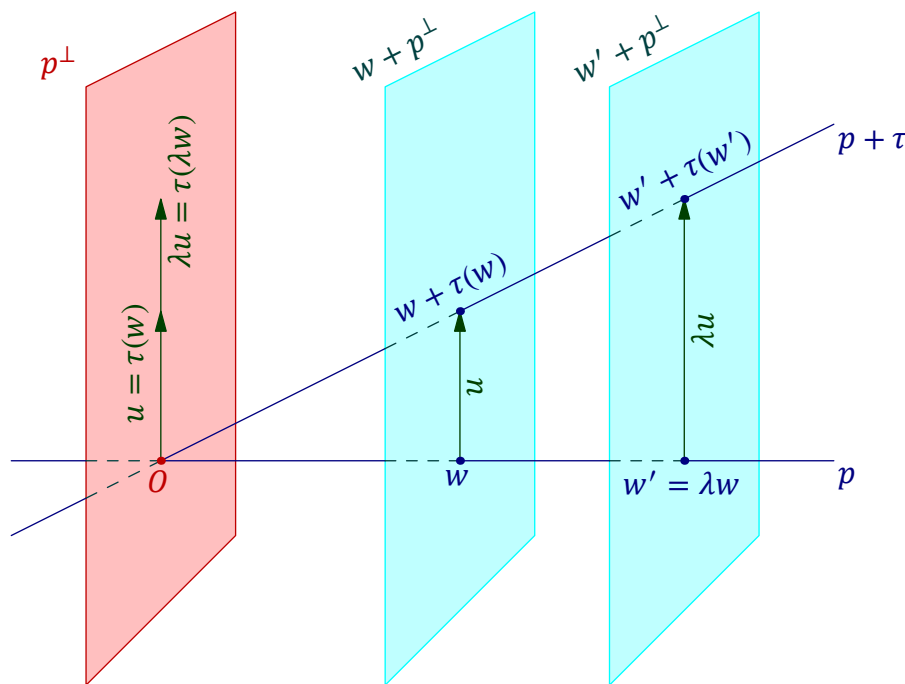


Рис. 14◊6. Сдвиг точки  $p \in \mathbb{P}(V)$  на касательный вектор  $\tau : p \rightarrow p^\perp$ .

<sup>1</sup>См. п.° 4.1 на стр. 37.

Все карты  $U_{w^*}$  с различными  $w \in p$  имеют одно и то же направляющее векторное пространство и покрывают одно и то же множество точек в  $\mathbb{P}_n$ . При сдвиге точки  $p$  в пределах этого множества, ко всем векторам  $w \in p$  добавляются коллинеарные друг другу векторы  $\tau(w) \in p^\perp$ , линейно зависящие от  $w \in p$  в том смысле, что  $\tau(\lambda w) = \lambda \tau(w)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ , см. рис. 14-6. Таким образом, одномерные подпространства  $p' \subset V$ , которые покрываются семейством параллельных друг другу карт  $U_{w^*}$ , представляют собою графики линейных отображений

$$\tau : p \rightarrow p^\perp \quad (14-7)$$

и образуют аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством  $\text{Hom}(p, p^\perp)$  всех линейных отображений (14-7). Это векторное пространство обозначается  $T_p \mathbb{E}_n$  и называется *касательным векторным пространством* к эллиптическому пространству  $\mathbb{E}_n$  в точке  $p$ . Сами линейные отображения (14-7) называются *касательными векторами* к  $\mathbb{E}_n$  в точке  $p$ .

Скалярное произведение на  $V$  задаёт на каждом касательном векторном пространстве  $T_p \mathbb{E}_n$  евклидово скалярное произведение по формуле

$$(\tau_1, \tau_2)_p = (\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w), \quad (14-8)$$

где  $\tau_1, \tau_2 : p \rightarrow p^\perp$  суть касательные векторы, а  $w \in p$  — произвольный ненулевой вектор.

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Убедитесь, что правая часть в (14-8) не зависит от выбора  $w \in p$ .

Если выбрать вектор  $w \in p$  так, чтобы  $(w, w) = 1$ , то касательные векторы  $\tau_1, \tau_2$  будут однозначно задаваться своими значениями  $u_i = \tau_i(w) \in w^\perp$ , а их скалярное произведение будет равно евклидову скалярному произведению  $(u_1, u_2)$ . Длина  $|\tau|$  касательного вектора  $\tau \in T_p \mathbb{E}_n$  и угол  $\sphericalangle(\tau_1, \tau_2)$  между касательными векторами  $\tau_1, \tau_2 \in T_p \mathbb{E}_n$  определяются по стандартным формулам

$$|\tau| = \sqrt{(\tau, \tau)} \quad \text{и} \quad \cos \sphericalangle(\tau_1, \tau_2) = \frac{(\tau_1, \tau_2)}{|\tau_1| \cdot |\tau_2|} \quad (14-9)$$

Через любую точку  $p \in \mathbb{E}_n$  в направлении любого касательного вектора  $\tau \in T_p \mathbb{E}_n$  выходит геодезическая  $\ell_\tau$  — проективизация двумерного векторного подпространства в  $V$ , порождённого одномерными подпространствами  $p$  и  $\tau(p) \subset p^\perp$ . Поскольку каждая проходящая через  $p$  прямая пересекает  $\mathbb{P}(p^\perp)$  в некоторой точке, отвечающей одномерному подпространству  $q \subset p^\perp$ , и существует единственный с точностью до пропорциональности изоморфизм одномерных подпространств  $\tau : p \simeq q$ , каждая проходящая через  $p$  геодезическая имеет вид  $\ell_\tau$  для некоторого вектора  $\tau \in T_p \mathbb{E}_n$ , который определяется геодезической однозначно с точностью до пропорциональности и называется *вектором скорости* геодезической. Угол между геодезическими определяется как евклидов угол между их векторами скорости, вычисленный по формуле (14-9).

Как и в евклидовом пространстве, через любые две различные точки эллиптического пространства проходит единственная прямая, и кратчайший путь из одной точки в другую идёт по геодезическому отрезку этой прямой. Однако геометрия взаимного расположения прямых в эллиптическом пространстве во многом отличается от евклидовой.

**14.1.3. Неевклидовы явления в эллиптической геометрии.** В отличие от евклидова пространства эллиптическое пространство компактно. На эллиптической плоскости нет параллельных прямых: любые две прямые пересекаются ровно в одной точке. При этом никакая прямая не разбивает эллиптическую плоскость на две компоненты: любые две точки не лежащие на прямой  $\ell$  можно соединить не пересекающим прямую  $\ell$  отрезком геодезической. Оси любого

ортогонального базиса в  $\mathbb{R}^3$  образуют на эллиптической плоскости  $\mathbb{E}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  правильный треугольник с тремя прямыми углами, как на рис. 14◊7.

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что прямые, соединяющие противоположные вершины икосаэдра с центром в нуле евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , образуют на эллиптической плоскости  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  конфигурацию из шести попарно равноудалённых друг от друга точек.

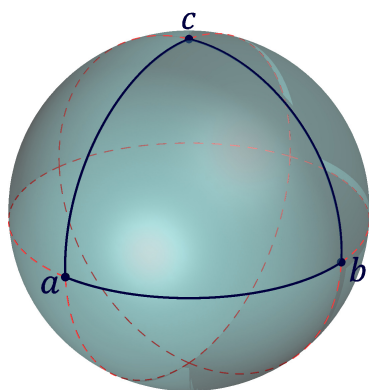


Рис. 14◊7. Правильный прямоугольный треугольник.

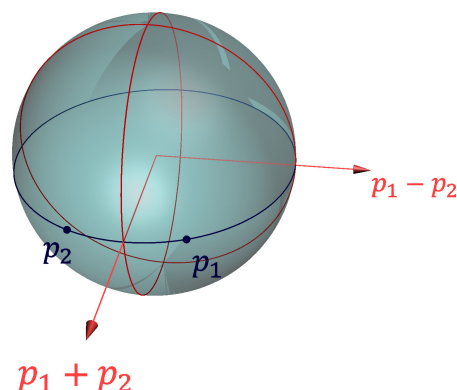


Рис. 14◊8. Медиаторы точек  $p_1$  и  $p_2$ .

#### ПРИМЕР 14.1 (МЕДИАТОРЫ)

Равноудалённость точки  $q$  от двух заданных различных точек  $p_1, p_2$ , где все три точки представлены векторами единичной длины, выражается равенством  $|(p_1, q_1)| = |(p_2, q_2)|$ , которое выполняется в двух случаях: когда  $(p_1 - p_2, q) = 0$  или когда  $(p_1 + p_2, q) = 0$ . Таким образом, ГМТ  $q \in \mathbb{P}_n$ , равноудалённых от двух заданных точек  $p_1 \neq p_2$ , является объединением двух гиперплоскостей, которые называются медиаторами точек  $p_1, p_2$  и ортогональны векторам  $p_1 - p_2$  и  $p_1 + p_2$  соответственно, см. рис. 14◊8. Обратите внимание, что если точки  $p_1, p_2$  представлены векторами одинаковой длины, то точка, представленная вектором  $p_1 + p_2$ , лежит на одном медиаторе, а вектором  $p_1 - p_2$  — на другом, и эти две точки различны.

УПРАЖНЕНИЕ 14.3. Покажите, что медиаторные гиперплоскости ортогональны друг другу и пересекаются по ГМТ  $q \in \mathbb{P}_n$  с  $|p_1, q| = |p_2, q| = \pi/2$ .

**14.2. Изометрии эллиптического пространства.** Для любого вектора  $e \in V$  с  $(e, e) = 1$  отражение<sup>1</sup>  $\sigma_e: V \rightarrow V, v \mapsto v - 2(v, e)e$ , в гиперплоскости  $e^\perp$  задаёт инволютивный линейный проективный автоморфизм, который мы по-прежнему будем называть *отражением в гиперплоскости*  $\mathbb{P}(e^\perp) \subset \mathbb{P}(V)$  и обозначать  $\sigma_e: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ . Он оставляет на месте каждую точку гиперплоскости  $\mathbb{P}(e^\perp)$  и её полюс  $e$  относительно абсолюта. Поскольку отражение сохраняет скалярное произведение на  $V$ , оно является изометрическим преобразованием эллиптического пространства. Для любых двух различных точек  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}(V)$  существуют ровно два отражения, переставляющие эти точки друг с другом, и эти отражения происходят в медиаторах точек  $p_1, p_2$ . В самом деле, если точка  $q$  принадлежит зеркалу такого отражения, то  $|p_1, q| = |p_2, q|$ , и значит, точка  $q$  принадлежит медиатору. С другой стороны, отражения  $\sigma_{(p_1 - p_2)^\perp}: V \rightarrow V$  и  $\sigma_{(p_1 + p_2)^\perp}: V \rightarrow V$  переводят вектор  $p_1 \in V$  в векторы  $p_2$  и  $-p_2$  соответственно.

<sup>1</sup>См. п.° 2.2 на стр. 18.

## ТЕОРЕМА 14.2

Всякое изометрическое преобразование  $g : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n$  эллиптического пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  является линейным проективным автоморфизмом, индуцированным некоторым ортогональным линейным преобразованием  $G : V \xrightarrow{\simeq} V$ , которое определяется по  $g$  однозначно с точностью до знака<sup>1</sup>. Иначе говоря, группа изометрических преобразований  $n$ -мерного эллиптического пространства изоморфна *проективной ортогональной группе*

$$\mathrm{PO}_{n+1}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PO}(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{O}(V) / \{\pm \mathrm{Id}_V\}.$$

**Доказательство.** Очевидно, что все преобразования из группы  $\mathrm{PO}(V)$  являются изометрическими, и что группа  $\mathrm{PO}(V)$  транзитивно действует на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Зафиксируем какой-либо вектор  $e \in V$  с  $(e, e) = 1$ . Беря композицию  $g$  с ортогональным преобразованием, переводящим  $g(e)$  в  $e$ , мы без ограничения общности можем и будем считать, что  $g(e) = e$ . Рассмотрим на  $\mathbb{P}_n$  аффинную карту  $U_e = \{v \in V \mid (v, e) = 1\}$ . Как аффинная гиперплоскость в  $\mathbb{A}(V)$  она параллельна векторной гиперплоскости  $e^\perp \subset V$  и проходит через конец вектора  $e$ . Дополнение  $\mathbb{P}_n \setminus U_e = \mathbb{P}(e^\perp)$  представляет собою ГМТ  $p \in \mathbb{P}_n$ , находящихся на расстоянии  $\pi/2$  от точки  $p$ . Поэтому преобразование  $g$  переводит и карту  $U$  и её бесконечно удалённую гиперплоскость  $e^\perp$  в себя. Поскольку преобразование  $g$  сохраняет расстояние между точками, оно, в силу [теор. 14.1](#), переводит отрезки геодезических в отрезки геодезических, а значит, проективные прямые — в проективные прямые. Поэтому ограничение  $g|_{U_e} : U_e \rightarrow U_e$  является аффинным преобразованием<sup>2</sup>. В доказательстве [предл. 9.2](#) на стр. 108 мы видели, что такое аффинное преобразование является ограничением на карту  $U_e$  единственного линейного проективного автоморфизма  $\bar{h} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n$ , причём задающий его линейный оператор  $h : V \rightarrow V$  однозначно с точностью до пропорциональности определяется преобразованием  $g$ . Поскольку оба преобразования  $g, \bar{h} : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$  непрерывны и совпадают на открытом всюду плотном подмножестве  $U_e$  компактного метрического пространства  $\mathbb{P}_n$ , они совпадают вообще всюду на  $\mathbb{P}_n$ , т. е.  $g = \bar{h}$ .

**Упражнение 14.4.** Докажите это.

Умножим оператор  $h$  на такую ненулевую константу, чтобы  $h(e) = e$ , и дополним вектор  $e$  до ортонормального базиса  $e, e_1, e_2, \dots, e_n$  пространства  $V$ . Поскольку оператор  $h$  сохраняет углы между одномерными подпространствами, векторы  $h(e_i)$  составляют вместе с вектором  $e$  ортогональный базис пространства  $V$ .

**Упражнение 14.5.** Убедитесь, что этот ортогональный базис на самом деле ортонормален, т. е. для каждого  $i$  выполняется равенство  $(h(e_i), h(e_i)) = 1$ .

Таким образом, преобразование  $h$  ортогонально. Остаётся заметить, что два ортогональных линейных преобразования евклидова векторного пространства пропорциональны тогда и только тогда, когда коэффициент пропорциональности между ними равен  $\pm 1$ .  $\square$

**Упражнение 14.6.** Убедитесь в справедливости последнего утверждения.

## СЛЕДСТВИЕ 14.1

Всякое изометрическое преобразование эллиптического пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  является композицией не более, чем  $(n+1)$  отражений в гиперплоскостях.

<sup>1</sup>Т. е. с точностью до композиции с центральной симметрией  $-\mathrm{Id}_V : v \mapsto -v$ .

<sup>2</sup>Всякое преобразование вещественного аффинного пространства размерности  $\geq 2$ , которое переводит в прямые, является аффинным преобразованием, см. раздел 2.5 на стр. 29 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_02.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_02.pdf).

Доказательство. Это вытекает из теор. 2.2 на стр. 18. □

**Предостережение 14.1.** В отличие от евклидовой геометрии, изометрия эллиптического пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  не определяется однозначно своим действием на произвольные  $(n + 1)$  точек, не лежащих в одной гиперплоскости. Например, если эти точки отвечают ортонормальному базису  $e_0, e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$ , то имеется ровно  $2^n$  различных преобразований из группы  $PO_{n+1}(\mathbb{R})$ , оставляющих каждую из точек на месте. Все они действуют на базис по правилу  $e_i \mapsto \pm e_i$  с точностью до общего для всех  $i$  знака. При  $n = 2$  эти четыре преобразования суть Id и три отражения  $\sigma_i = \sigma_{e_i}$  в сторонах правильного прямоугольного треугольника  $e_0e_1e_2$ , см. рис. 14◊9. Они транзитивно действуют на четырёх связных компонентах дополнения  $\mathbb{P}_2 \setminus \bigcup_{i \neq j} (e_i e_j)$  к трём координатным прямым  $(e_i e_j) \subset \mathbb{P}_2$  и оставляют на месте каждую из точек  $e_i \in \mathbb{P}_2$ .

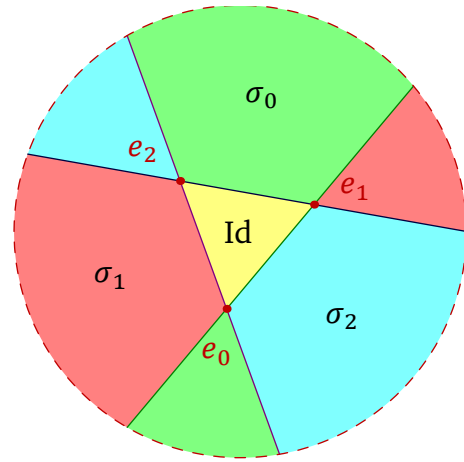


Рис. 14◊9. Образы правильного прямоугольного  $\Delta e_0e_1e_2$  при отражениях в его сторонах.

**Определение 14.1** (дифференциал эллиптической изометрии)

Ортогональный линейный оператор  $g : V \simeq V$  задаёт в каждой точке  $p \in \mathbb{P}(V)$  ортогональное линейное отображение касательных пространств

$$dg : T_p \mathbb{P}(V) \simeq T_{g(p)} \mathbb{P}(V), \quad \tau \mapsto g\tau g^{-1}, \tag{14-10}$$

переводящее касательный вектор  $\tau : p \mapsto p^\perp$  в касательный вектор

$$dg(\tau) : gp \mapsto gp^\perp, \quad gw \mapsto g\tau(w).$$

Ортогональный линейный оператор (14-10) называется *дифференциалом* изометрического преобразования  $\bar{g} : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$  в точке  $p \in \mathbb{P}(V)$ .

**14.3. Треугольники.** Фигура, образованная тремя геодезическими отрезками<sup>2</sup>

$$\Delta abc \stackrel{\text{def}}{=} [a, b] \cup [b, c] \cup [c, a]$$

пересекающихся в неколлинеарных точках  $a, b, c$  геодезических  $(ab), (bc), (ca)$  эллиптического пространства, называется *эллиптическим треугольником*. Всякий эллиптический треугольник лежит в эллиптической плоскости, порождённой его вершинами. Имеется два геометрически разных типа треугольников, представленные на рис. 14◊10 и рис. 14◊10 ниже. Образы лежащих на единичной сфере  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  сферических треугольников со сторонами не длиннее  $\pi/2$  при отображении факторизации  $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ , отождествляющем противоположные точки сферы, называются эллиптическими треугольниками *первого рода*. Граница такого треугольника разбивает эллиптическую плоскость на две связные компоненты, и её можно обойти по кругу

<sup>1</sup> Отражение  $\sigma_i : \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$  меняет знак у вектора  $e_i \in \mathbb{R}^3$  и тождественно действует на остальные два базисных вектора.

<sup>2</sup> См. ?? на стр. ??.



так, что треугольник всё время находится по левую руку. Кроме того её можно непрерывно стянуть внутри  $\mathbb{E}_2$  в точку.

УПРАЖНЕНИЕ 14.7. Постройте такое непрерывное отображение единичного квадрата в  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{P}_2, \quad (x, t) \mapsto h(x, t) \in \mathbb{P}_2,$$

что кривая  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_2, x \mapsto h(x, 0)$ , является параметризацией границы треугольника  $abc$  первого рода, а кривая  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_2, x \mapsto h(x, 1)$ , отображает весь отрезок  $[0, 1]$  в точку  $(a + b + c)/3 \in \mathbb{P}_2$ .

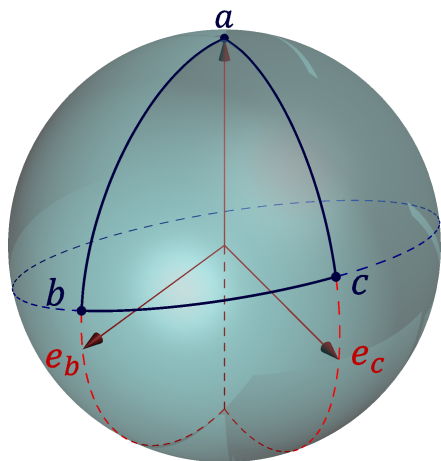


Рис. 14◊10. Треугольник первого рода.

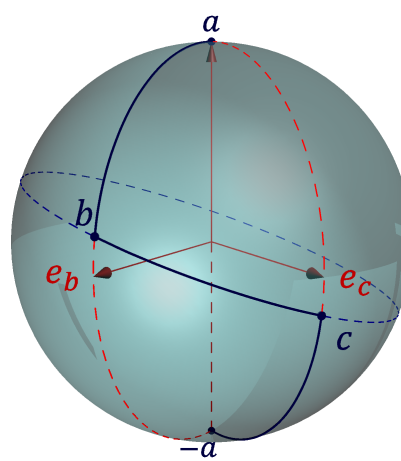


Рис. 14◊11. Треугольник второго рода.

Вершины треугольника первого рода представляются такими векторами  $a, b, c$  единичной длины, что  $b = \cos |a, b| \cdot a + \sin |a, b| \cdot e_b$  и  $c = \cos |a, c| \cdot a + \sin |a, c| \cdot e_c$ , где векторы  $e_b$  и  $e_c$  дополняют вектор  $a$  до ортонормальных базисов в плоскостях  $ab$  и  $ac$  соответственно, см. рис. 14◊10. Угол  $\sphericalangle(bac)$  при вершине  $a$  в сферическом  $\triangle abc$  равен евклидову углу между плоскостями  $ab$  и  $ac$  в  $\mathbb{R}^3$ . Он имеет  $\cos \sphericalangle(bac) = (e_b, e_c)$ . Вычисляя скалярное произведение  $(b, c) = \cos |b, c|$ , получаем для эллиптического  $\triangle abc$  первого рода *сферическую теорему косинусов*<sup>1</sup>

$$\cos |b, c| = \cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac). \quad (14-11)$$

Эллиптические треугольники, не являющиеся треугольниками первого рода, называются *треугольниками второго рода*. Граница треугольника второго рода поднимается на единичную сферу  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  в *незамкнутую* ломаную, соединяющую диаметрально противоположные точки сферы. Дополнение до границы треугольника второго рода связно: любые две не лежащие на границе точки можно соединить нигде не пересекающей границу треугольника ломаной, составленной из отрезков геодезических. Поскольку на  $\mathbb{P}_2$  имеются геодезические, трансверсально пересекающие границу треугольника второго рода ровно по одной точке, и такой характер пересечения устойчив к малым шевелениям как геодезической, так и треугольника, границу треугольника второго рода<sup>2</sup> нельзя непрерывно продеформировать внутри  $\mathbb{E}_2$  в точку.

УПРАЖНЕНИЕ 14.8. Докажите для треугольников второго рода формулу

$$-\cos |b, c| = \cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac), \quad (14-12)$$

<sup>1</sup>Также известную как *основная формула сферической тригонометрии*.

<sup>2</sup>Также как и любую геодезическую.

левая часть которой отличается от левой части (14-11) знаком.

Таким образом, величина  $\cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac)$  положительна для треугольников первого рода и отрицательна для треугольников второго рода.

**14.4. Сферическая форма объёма.** Если зафиксировать в пространстве  $V$  ортонормальный базис  $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ , то с каждым ненулевым вектором  $w \in V$  можно связать кососимметричную полилинейную форму  $\omega_w : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  от  $n = \dim V - 1$  аргументов, значение которой на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  определяется равенством

$$w \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n = \omega_w(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \quad (14-13)$$

и равно определителю  $\det C$  матрицы координат<sup>1</sup> векторов  $w, v_1, v_2, \dots, v_n$  в базисе  $e$ . При выборе другого ортонормального базиса в  $V$  форма  $\omega_w$  не изменится, если новый базис имеет ту же ориентацию, что и базис  $e$ , и умножится на  $-1$ , если ориентация у нового базиса противоположна. Квадрат значения формы  $\omega_w$  на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_n$

$$\omega^2(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det^2 C = \det(C^t E C) = \det G_{w, v_1, v_2, \dots, v_n}$$

равен определителю Грама векторов  $w, v_1, v_2, \dots, v_n$ . Если векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n \in w^\perp$ , то

$$\det G_{w, v_1, v_2, \dots, v_n} = (w, w) \cdot \det G_{v_1, v_2, \dots, v_n}.$$

Таким образом, абсолютная величина значения формы  $\omega_w$  на параллелепипеде из подпространства  $w^\perp \subset V$  равна  $n$ -мерному евклидову объёму этого параллелепипеда, умноженному на  $|w|$ , и не зависит от выбора ортонормального базиса в  $V$ . Когда вектор  $w$  лежит на единичной сфере

$$S^n = \{v \in V \mid (v, v) = 1\} \subset \mathbb{A}(V),$$

векторное подпространство  $w^\perp$  является направляющим векторным пространством аффинной касательной гиперплоскости  $T_w S^n = w + w^\perp \subset \mathbb{A}(V)$  к сфере  $S^n$  в точке  $w \in S^n$ , и ограничение на него формы  $|\omega_w|$  задаёт в этой гиперплоскости евклидов объём.

В дифференциальном исчислении гладко зависящую от точки  $x \in \mathbb{A}(V)$  кососимметричную полилинейную форму  $\alpha(x) : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  от  $n$  аргументов принято называть *дифференциальной  $n$ -формой* и записывать в виде

$$\alpha(x) = \sum_{v=0}^n a_{0 \dots \widehat{v} \dots n}(x) \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-14)$$

где крышка означает пропуск того, что под ней стоит, а каждый коэффициент  $a_{0 \dots \widehat{v} \dots n}$  представляет собою гладкую функцию  $a_{0 \dots \widehat{v} \dots n} : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ , значение которой в точке  $x \in \mathbb{A}(V)$  по определению равно значению кососимметричной формы  $\alpha(x)$  на наборе  $e_0, \dots, e_{v-1}, e_{v+1}, \dots, e_n$  базисных векторов пространства  $V$ . Форма (14-13)

$$\omega(x) : (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \omega_x(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (14-15)$$

записывается в виде (14-14) следующим образом:

$$\omega(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v x_v \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-16)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.9. Убедитесь в этом.

<sup>1</sup>Т. е. такой матрицы  $C$ , что  $(w, v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ .

**14.4.1. Объёмы фигур.** Пусть некоторая область  $\Phi \subset S^n$  единичной сферы  $S^n \subset \mathbb{A}(V)$  является образом области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  при биективном гладком отображении  $f: \Omega \rightarrow \Phi$ . Тогда в каждой точке  $z \in \Omega$  дифференциал  $df$  отображения  $f$  линейно отображает векторное пространство  $\mathbb{R}^n$ , воспринимаемое как касательное пространство к области  $\Omega$  в точке  $z$ , в направляющее векторное пространство  $f(z)^\perp \subset V$  аффинной касательной гиперплоскости к сфере  $S^n$  в точке  $f(z)$ . Дифференциал  $df$  переводит параллелепипеды  $P \subset \mathbb{R}^n$  в параллелепипеды  $df(P) \subset f(z)^\perp$  так, что отношение евклидова объёма параллелепипеда  $df(P)$  в касательном пространстве к  $S^n$  в точке  $f(z)$  к евклидову объёму параллелепипеда  $P$  в  $\mathbb{R}^n$  одинаково для всех  $P$  и равно  $\varrho(z) = |\omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))|$ , где  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — произвольный ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, функция  $\varrho(z)$  задаёт «коэффициент растяжения» евклидова объёма при линейном отображении касательных пространств  $df: T_z\Omega \rightarrow T_{f(z)}\Phi$  в каждой точке  $z \in \Omega$ . Интеграл от неё по области  $\Omega$  естественно называть *объёмом сферической области*  $\Phi = f(\Omega) \subset S^n$ :

$$\text{Vol}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \varrho(z) dz_1 \dots dz_n.$$

Возникающая при этом на области  $\Omega$  дифференциальная форма

$$\omega(z) : (u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto \omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))$$

называется *подъёмом* имеющейся на сфере  $S^n \subset \mathbb{A}(V)$  дифференциальной формы (14-15) относительно гладкого отображения  $f: \Omega \rightarrow S^n$  и обычно обозначается  $f^*\omega$ .

**ПРИМЕР 14.2 (ПЛОЩАДЬ ПОЛУСФЕРЫ)**

Полусфера  $\Pi$ , высекаемая из единичной сферы  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  полупространством  $x_0 \geq 0$ , является образом лежащего в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $(\varphi, \psi)$  квадрата  $\Omega = \{(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 \leq \psi, \varphi \leq \pi/2\}$  при отображении Эйлера  $f: \Omega \rightarrow \Pi, (\varphi, \psi) \mapsto (x_0, x_1, x_2)$ , где

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \psi \cos \varphi \\ x_1 &= \cos \psi \sin \varphi \\ x_2 &= \sin \psi, \end{aligned} \quad (14-17)$$

см. рис. 14◊12. Дифференцируя эти равенства по  $\varphi$  и  $\psi$ , получаем

$$\begin{aligned} dx_0 &= -\sin \psi \cos \varphi d\psi - \cos \psi \sin \varphi d\varphi & dx_1 \wedge dx_2 &= \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi \wedge d\psi \\ dx_1 &= -\sin \psi \sin \varphi d\psi + \cos \psi \cos \varphi d\varphi & dx_0 \wedge dx_2 &= -\cos^2 \psi \sin \varphi d\varphi \wedge d\psi \\ dx_2 &= \cos \psi d\psi, & dx_0 \wedge dx_1 &= \cos \psi \sin \psi d\varphi \wedge d\psi. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в дифференциальную форму

$$\omega(x) = x_0 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_0 \wedge dx_2 + x_2 dx_0 \wedge dx_1,$$

после многочисленных сокращений заключаем, что её подъём со сферы  $S^2$  на евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$  с декартовыми координатами  $(\varphi, \psi)$  имеет вид  $f^*\omega(\varphi, \psi) = \cos \psi d\varphi \wedge d\psi$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 14.10.** Убедитесь в этом!

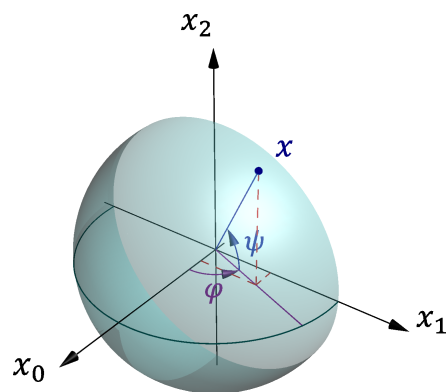


Рис. 14◊12. Эйлеровы углы.

Таким образом,  $\varrho(\varphi, \psi) = \cos \psi$  и площадь полусферы

$$S(\Pi) = \int_{\Omega} \varrho(\varphi, \psi) d\varphi d\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi = 2\pi.$$

ТЕОРЕМА 14.3

Площадь сферического треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  равна  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ . В частности, сумма углов сферического треугольника всегда строго больше  $\pi$ .

Доказательство. Площадь сферической луночки, заключённой между двумя проходящими через центр сферы плоскостями, пропорциональна углу  $\alpha$  между этими плоскостями и относится к площади полусферы как  $\alpha : \pi$ , см. рис. 14◊13. Поэтому площадь такой лунки равна  $2\alpha$ . Сферический треугольник на рис. 14◊14 высекается из полусферы двумя луночками с углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Дополнение к этим луночкам и треугольник вместе составляют две части сферической луночки с раствором  $\gamma$ . Поэтому сумма площадей трёх сферических лунок с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  отличается от площади полусферы тем, что интересующий нас треугольник учтён в ней трижды. Поэтому площадь  $S$  этого треугольника удовлетворяет равенству  $2S + 2\pi = 2(\alpha + \beta + \gamma)$ .  $\square$

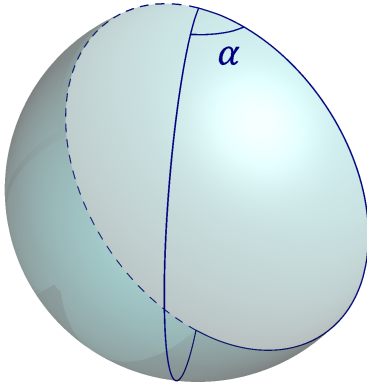


Рис. 14◊13. Площадь сферической лунки с углом  $\alpha$  равна  $2\alpha$ .

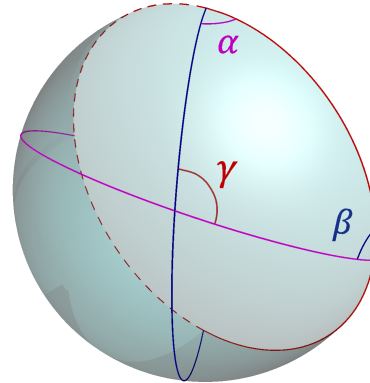


Рис. 14◊14. Лунки с углами  $\alpha$  и  $\beta$  и две части от лунки с углом  $\gamma$ .

**14.4.2. Инвариантная форма объёма на эллиптическом пространстве.** Сферическая форма объёма на касательных пространствах к единичной сфере в  $\mathbb{R}^{n+1}$  индуцирует форму объёма  $\text{Vol}_p$  на касательных пространствах  $T_p \mathbb{P}_n$  к эллиптическому пространству  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  во всех его точках  $p \in \mathbb{P}_n$  по правилу

$$\text{Vol}_p : \Lambda^n T_p \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mapsto \frac{|\omega_w(\tau_1(w), \tau_2(w), \dots, \tau_n(w))|}{|w|^{n+1}}. \quad (14-18)$$

Правая часть этой формулы не зависит от выбора ненулевого представителя  $w \in p$  и обладает тем свойством, что для любого ортогонального линейного отображения  $g : V \simeq V$  выполняется равенство  $\text{Vol}_{g(p)}(dg(\tau_1), \dots, dg(\tau_n)) = \text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ , где  $dg : T_p \mathbb{P}(V) \rightarrow T_{g(p)} \mathbb{P}(V)$  обозначает дифференциал<sup>1</sup> изометрического проективного преобразования  $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.11. Убедитесь в этом.

<sup>1</sup>См. опр. 14.1 на стр. 182.

При  $(w, w) = 1$  и  $\tau_i(w) = u_i$  формула (14-18) упрощается до

$$\text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \stackrel{\text{def}}{=} |\omega_w(u_1, u_2, \dots, u_n)| \quad (14-19)$$

и равна абсолютной величине формы объёма (14-16) на единичной сфере.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 14.3. Первое следует из того, что векторы  $p_1 + p_2$  и  $p_1 - p_2$ , ортогональные векторным подпространствам, проективизациями которых являются медиаторы, ортогональны (при условии, что  $(p_1, p_1) = (p_2, p_2) = 1$ ). Второе — из того, что одновременное выполнение равенств  $(p_1, q) = (p_2, q)$  и  $(p_1, q) = -(p_2, q)$  означает, что  $(p_1, q) = (p_2, q) = 0$ .

Упр. 14.4. Пусть  $p \notin U_e$ . Выберем последовательность Коши  $u : \mathbb{N} \rightarrow U_e$ , сходящуюся к  $p$ . Поскольку  $g$  сохраняет расстояния, последовательность  $g \circ u = \bar{h} \circ u$  также является последовательностью Коши и сходится в  $\mathbb{P}_n$ . В силу непрерывности отображений  $g$  и  $\bar{h}$  получаем  $g(p) = g(\lim u_n) = \lim g(u_n) = \lim \bar{h}(u_n) = \bar{h}(\lim u_n) = \bar{h}(p)$ .

Упр. 14.5. Пусть  $h(e_i) = \alpha f$ , где  $(f, f) = 1$ , и пусть  $p = e + e_i$ . Тогда  $h(p) = e + \alpha f$  и

$$\begin{aligned} \cos^2 |e, p| &= (e, p)^2 / (p, p) = 1/2 \\ \cos^2 |e, g(p)| &= (e, e + \alpha f)^2 / (e + \alpha f, e + \alpha f) = 1 / (1 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Поскольку преобразование  $g$  изометрическое,  $\alpha^2 = 1$ . Поэтому  $(h(e_i), h(e_i)) = \alpha^2 (f, f) = 1$ .

Упр. 14.6. Пусть  $g = \lambda f$ . Т. к.  $(v, v) = (gv, gv) = \lambda^2 (fv, fv) = \lambda^2 (v, v)$ , коэффициент  $\lambda = \pm 1$ .

Упр. 14.9. Согласно форм. (14-13) на стр. 184 для вектора  $w = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  значение

$$\omega_w(e_0, \dots, \hat{e}_v, \dots, e_n) = (-1)^v x_v.$$