

§12. Группы Кокстера

12.1. Группы, порождённые отражениями. Конечная группа G линейных ортогональных преобразований евклидова пространства V называется *группой Кокстера*, если она порождается отражениями в гиперплоскостях. Гиперплоскости, относительно которых происходят имеющиеся в группе G отражения, называются *зеркалами*, а перпендикулярные зеркалам векторы единичной длины — *корнями* группы Кокстера G . Дополнение к объединению всех зеркал группы G является дизъюнктивным объединением открытых многогранных конусов. Замыкания этих конусов называются *камерами Вейля*. Если зафиксировать для каждого зеркала один из двух корней, задающих это зеркало, и обозначить выбранные корни через e_1, \dots, e_n , то внутренности камер Вейля можно описать как классы эквивалентности не принадлежащих зеркалам векторов из V по отношению, объявляющему векторы u и w эквивалентными, если знаки скалярных произведений (u, e_i) и (w, e_i) одинаковы при каждом i . Векторы u и w лежат в одной камере Вейля если и только если внутренность соединяющего их концы отрезка $[u, w]$ не пересекает зеркал.

ЛЕММА 12.1

Для любого ортогонального линейного оператора $F : V \rightarrow V$ и ненулевого вектора $u \in V$ выполняется равенство $F \circ \sigma_u \circ F^{-1} = \sigma_{Fu}$ или, что то же самое, $F \circ \sigma_u = \sigma_{F(u)} \circ F$, где σ_u обозначает отражение в гиперплоскости u^\perp .

Доказательство. Геометрически очевидно, что ортогональный оператор F переводит симметричные относительно гиперплоскости u^\perp векторы v, w в векторы $F(v), F(w)$, симметричные относительно гиперплоскости $F(u)^\perp$. На языке формул: применяя F к обеим частям равенства $w = v - 2u(v, u)/(u, u)$, получаем $F(w) = F(v) - 2F(u)(F(v), F(u))/(F(u), F(u))$. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.1

Каждое преобразование из группы Кокстера переводит зеркала в зеркала, а камеры Вейля — в камеры Вейля.

Доказательство. Пусть гиперплоскость e^\perp является зеркалом отражения σ_e из группы G . Для любого преобразования $g \in G$ гиперплоскость $g(e^\perp) = g(e)^\perp$ является зеркалом отражения $\sigma_{g(e)} = g\sigma_e g^{-1} \in G$. \square

ПРИМЕР 12.1 (группы диэдров)

В двумерном евклидовом пространстве всякая группа Кокстера G однозначно с точностью до изоморфизма определяется числом m имеющихся в ней отражений. Зеркала этих отражений разбивают плоскость на $2m$ углов, как на рис. 12♦1 на стр. 150. Выберем наименьший из них, пометим его буквой e и обозначим его стороны через ℓ_1, ℓ_2 , а отражения в них — через $\sigma_1 = \sigma_{\ell_1}$, $\sigma_2 = \sigma_{\ell_2}$. Так как отражения группы G переводят зеркала в зеркала, все m зеркал группы G получаются последовательными отражениями зеркал ℓ_1 и ℓ_2 друг относительно друга, а камеры Вейля представляют собою углы между соседними прямыми и тоже являются последовательными отражениями камеры e . Если отражать камеру e по часовой стрелке и надписывать каждую новую камеру тем преобразованием из группы G , которым она получилась из e , то в силу равенства $\sigma_{g(\ell_i)} = g\sigma_i g^{-1}$ выписанные по часовой стрелке камеры получают метки

$$\sigma_2, \quad \sigma_{\sigma_2(\ell_1)}\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1, \quad \sigma_{\sigma_2\sigma_1(\ell_2)}\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \quad \sigma_{\sigma_2\sigma_1\sigma_2(\ell_1)}\sigma_2\sigma_1\sigma_2(e) = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1, \dots$$

Если аналогичным образом последовательно отражать камеру e против часовой стрелки, то упорядоченные таким образом камеры помечаются элементами

$$\sigma_1, \sigma_{\sigma_1(\ell_2)}\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2, \sigma_{\sigma_1\sigma_2(\ell_1)}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1, \sigma_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\ell_2)}\sigma_1\sigma_2\sigma_1(e) = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \dots$$

В результате каждая камера Вейля надписывается словом вида $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \dots$ и словом вида $\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \dots$, которые отвечают двум обходам вокруг нуля, ведущим из камеры e в рассматриваемую камеру. Так как движение плоскости однозначно определяется своим действием на угол e , мы заключаем, что группа G порождается двумя отражениями σ_1 и σ_2 , и состоит из $2m$ различных элементов вида

$$\underbrace{\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \dots}_k = g = \underbrace{\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \dots}_{2m-k}, \quad (12-1)$$

где $k = 0, \dots, 2m$, и при $k = 0, 2m$ получается один и тот же элемент

$$e = (\sigma_1\sigma_2)^m = (\sigma_2\sigma_1)^m, \quad (12-2)$$

а все остальные элементы попарно различны и отличны от e . Соотношение (12-2) выражает тот факт, что композиции отражений σ_1 и σ_2 являются поворотами на угол $2\pi/m$.

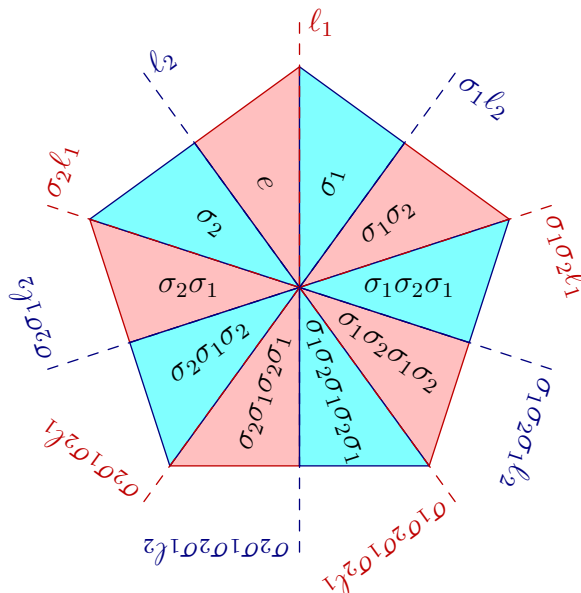


Рис. 12◊1. Группа диэдра.

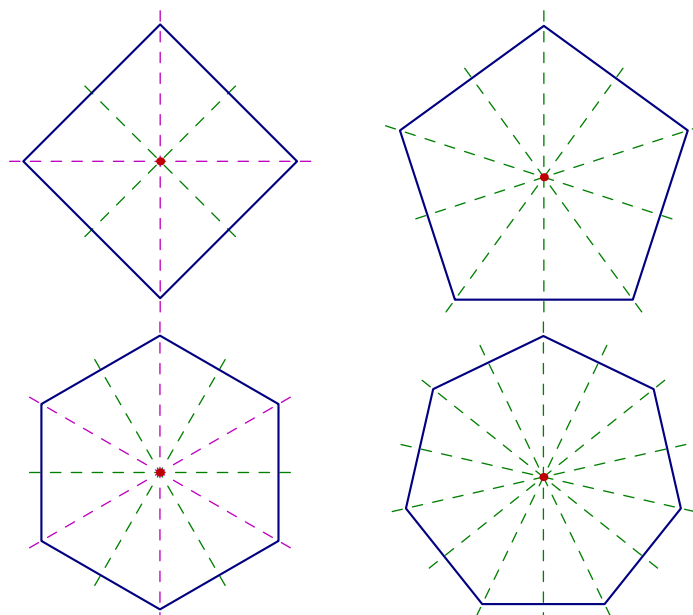


Рис. 12◊2. Оси правильных многоугольников.

Из рис. 12◊1 и рис. 12◊2 очевидно, что группа G совпадает с группой¹ правильного m -угольника и состоит из m отражений и m поворотов на углы $2\pi k/m$. Эту группу традиционно обозначают D_m и называют m -той диэдральной группой. Обратите внимание, что при нечётном m все зеркала составляют одну орбиту группы D_m , тогда как при чётном m орбиты прямых ℓ_1 и ℓ_2 различны и образуют два геометрически разных набора осей: одни проходят через противоположные вершины многоугольника, а другие — через середины противоположных рёбер, см. рис. 12◊2 на стр. 150.

12.2. Простые отражения. Зафиксируем какую-нибудь камеру Вейля C группы Кокстера G и обозначим зеркала, высекающие гиперграни этой камеры, через H_1, \dots, H_m , а перпендикулярные им и направленные внутрь камеры C корни — через u_1, \dots, u_n . Корни u_i , зеркала H_i и отражения $\sigma_i = \sigma_{u_i}$ называются простыми корнями, зеркалами и отражениями, задаваемыми камерой C . Обозначим через $m_{ij} \geq 2$ число всех зеркал из группы G , проходящих через пересечение $H_i \cap H_j$. Эти зеркала пересекают порождённую корнями e_i и e_j двумерную плоскость $\Pi_{ij} = (H_i \cap H_j)^\perp$ по m_{ij} прямым, образующим в этой плоскости конфигурацию зеркал группы правильного m_{ij} -угольника из прим. 12.1. Так как зеркала H_i и H_j являются гранями одной камеры, в образуемом ими двугранном угле нет других зеркал, проходящих через $H_i \cap H_j$, т. е. пересечения этих зеркал с плоскостью Π_{ij} являются соседними осями диэдра. Поэтому композиция $\sigma_j \sigma_i$ действует в плоскости Π_{ij} поворотом на угол $2\pi/m_{ij}$ и тождественна на пересечении $H_i \cap H_j$. Таким образом при всех $i \neq j$ между простыми отражениями выполняется соотношение $(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}} = \text{Id}$.

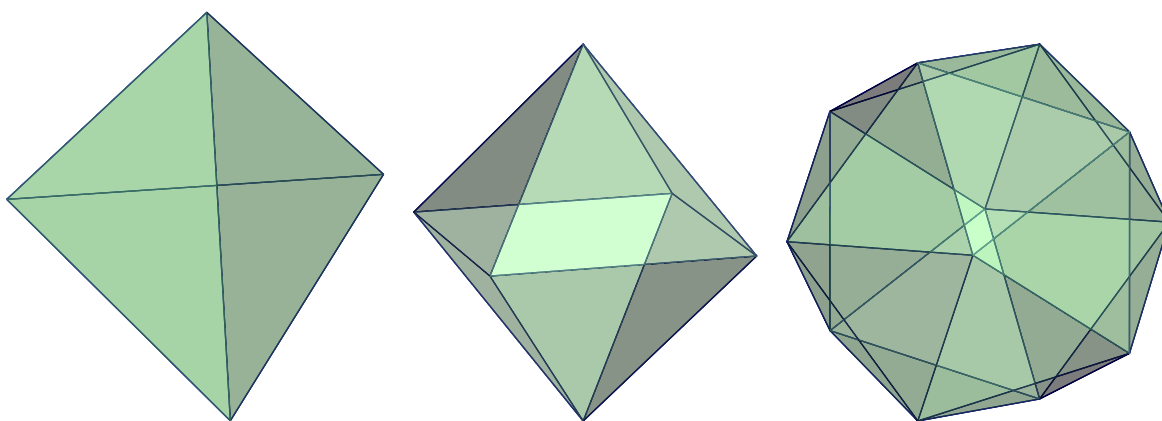


Рис. 12◊3. Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

Пример 12.2 (группы платоновых тел)

Из пяти правильных многогранников² в \mathbb{R}^3 октаэдр и куб, а также икосаэдр и додекаэдр двойственны друг другу в том смысле, что один из них является выпуклой оболочкой центров двумерных граней другого. Поэтому группа куба канонически изоморфна группе октаэдра, а груп-

¹Напомню, что (полной) группой фигуры Φ , лежащей в евклидовом пространстве V , называется группа O_Φ всех биективных преобразований $\Phi \simeq \Phi$, получающихся ограничением на фигуру Φ ортогональных линейных преобразований $V \simeq V$, переводящих фигуру Φ в себя. Подгруппа $SO_\Phi \subset O_\Phi$, состоящая из биекций $\Phi \simeq \Phi$, задаваемых собственными (сохраняющими ориентацию) ортогональными преобразованиями, называется собственной группой фигуры Φ . Если фигура лежит в гиперплоскости, то её собственная группа совпадает с полной.

²Правильные многогранники в \mathbb{R}^3 также называют платоновыми телами.

па додекаэдра — группе икосаэдра. Чтобы унифицировать аргументацию, мы рассмотрим вписанное в единичную сферу с центром в нуле платоново тело M с треугольными гранями, т. е. тетраэдр, октаэдр или икосаэдр, см. рис. 12◊3. Плоскости симметрии тела M задают *барицентрическое разбиение* каждой его двумерной грани на 6 треугольников с вершинами в какой-нибудь вершине тела M , в середине одного из примыкающих к этой вершине рёбер и в центре одной из двух граничащих по этому ребру граней. На рис. 12◊4 показано возникающее таким образом разбиение тетраэдра. Все треугольники разбиения конгруэнтны друг другу и сходятся по $2m_1 = 6$ штук в центрах граней тела M , по $2m_2 = 4$ штуки — в серединах рёбер тела M и по $2m_3$ штук — в вершинах многогранника M . Числа m_i , а также количество γ граней тела M и общее число треугольников $N = 6\gamma$ барицентрического разбиения тетраэдра, октаэдра и икосаэдра указаны в таблице¹

M	m_1	m_2	m_3	γ	$N = 6\gamma$
тетраэдр	3	2	3	4	24
октаэдр	3	2	4	8	48
икосаэдр	3	2	5	20	120

Обозначим через $G \subset O_M$ группу Кокстера, порождённую отражениями в плоскостях симметрии тела M . Её камеры Вейля представляют собою трёхгранные углы с общей вершиной в нуле, опирающиеся на N треугольников барицентрического разбиения граней. Пометим одну из камер единичным элементом e и обозначим высекающие её зеркала π_1, π_2, π_3 таким образом, чтобы для всех циклических перестановок i, j, k множества индексов 1, 2, 3 двугранный угол между плоскостями π_i и π_j равнялся π/m_k . Отражение в плоскости π_i обозначим через σ_i . Покажем, что $G = O_M \simeq F_3/N$ является фактором свободной группы F_3 с образующими x_1, x_2, x_3 по наименьшей нормальной подгруппе $N \triangleleft F_3$, содержащей шесть слов x_i^2 и $(x_i x_j)^{m_k}$, где i, j, k пробегает три циклические перестановки индексов 1, 2, 3.

Группа O_M транзитивно действует на камерах, и для каждой камеры C имеется ровно одно преобразование $g \in O_M$, переводящее камеру e в камеру C . Помечая камеру C таким преобразованием g , мы получаем биективное поименование камер Вейля элементами $g \in O_M$, при котором всякий элемент $h \in O_M$ переводит каждую камеру g в камеру hg . На рис. 12◊5 на стр. 153 изображена стереографическая проекция картинка, которую 24 камеры тетраэдра с рис. 12◊4 высекают на описанной около него сфере. Каждый сферический треугольник на этой картинке надписан такой композицией простых отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которая переводит в него начальный треугольник e . Чтобы написать такую композицию, преобразующую камеру e в произвольно заданную камеру g , выберем внутри этих камер векторы u, w единичной длины так, чтобы натянутая на них плоскость Π_{uw} не содержала линий пересечения зеркал, и пройдем из u в w по дуге

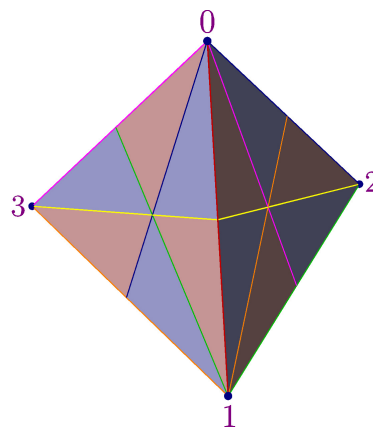


Рис. 12◊4. Барицентрическое разбиение тетраэдра плоскостями симметрии.

¹Обратите внимание, что помещённый в \mathbb{R}^3 правильный плоский n -угольник из прим. 12.1 тоже можно включить в эту таблицу со значениями $m_1 = n, m_2 = 2, m_3 = 2, \gamma = 2$ и $N = 4n$, если условиться, что такой диэдр имеет две двумерных грани — «верхнюю» и «нижнюю».

окружности, высекаемой плоскостью Π_{iW} на описанной около M сфере. Пусть мы при этом последовательно пройдём через камеры $e = g_1, g_2, g_3, \dots, g_m, g_{m+1} = g$ и при проходе из i -той камеры в $(i + 1)$ -ю пересечём плоскость $g_i(\pi_{v_i})$, где $v_i \in \{1, 2, 3\}$, которая является образом грани π_{v_i} камеры e при отображении g , переводящем камеру e в камеру g . Тогда

$$\begin{aligned}
 g_2 &= \sigma_{v_1} \\
 g_3 &= \sigma_{g_2(\pi_{v_2})} g_2 = (g_2 \sigma_{v_2} g_2^{-1}) g_2 = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \\
 g_4 &= \sigma_{g_3(\pi_{v_3})} g_3 = (g_3 \sigma_{v_3} g_3^{-1}) g_3 = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \sigma_{v_3} \\
 &\dots \\
 g &= g_{m+1} = \sigma_{g_m(\pi_{v_m})} g_m = (g_m \sigma_{v_m} g_m^{-1}) g_m = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_m}.
 \end{aligned}$$

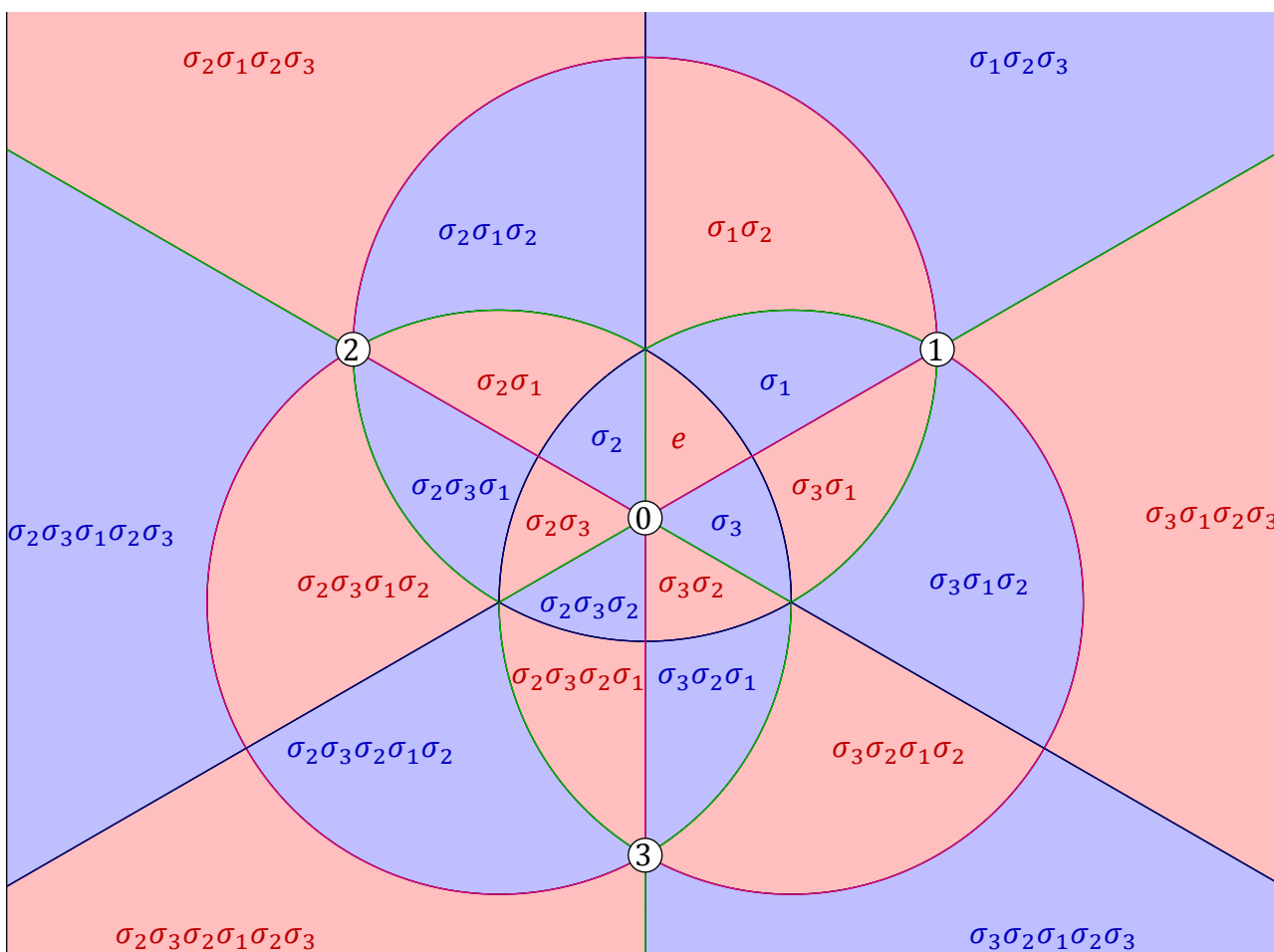


Рис. 12◊5. Триангуляция сферы плоскостями симметрии правильного тетраэдра $[0, 1, 2, 3]$ в стереографической проекции из диаметрально противоположной к вершине $[0]$ точки сферы на плоскость, параллельную грани $[1, 2, 3]$. Зеркала простых отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ изображены синим, зелёным и лиловым цветами соответственно.

Таким образом, если пометить стенки $g(\pi_1), g(\pi_2), g(\pi_3)$ каждой камеры g соответственно цифрами 1, 2, 3, то для каждого элемента $g \in O(M)$ будет выполнено равенство

$$g = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_m}, \tag{12-3}$$

где v_1, v_2, \dots, v_m суть выписанные слева направо по порядку цифры 1, 2, 3, стоящие на зеркалах, которые придётся последовательно пересечь при движении из камеры e в камеру g по дуге $[u, w]$. Мы заключаем, что $O_M = G$ является группой Кокстера и порождается простыми отражениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в стенках произвольно выбранной камеры Вейля. Так эти отражения удовлетворяют соотношениям $\sigma_i^2 = (\sigma_i \sigma_j)^{m_k} = e$, правило $x_i \mapsto \sigma_i$ задаёт сюръективный гомоморфизм $\varphi : F_3 / N \rightarrow O_M$. Покажем, что он инъективен, т. е. любые два слова w_1, w_2 из букв x_1, x_2, x_3 , переходящие в один и тот же элемент $g \in O_M$, эквивалентны по модулю вставки и удаления подслов вида x_i^2 и $(x_i x_j)^{m_k}$. Любое слово $\sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_k} = g$ задаёт последовательность сферических треугольников $g_0 = e, g_1 = \sigma_{v_1}, g_2 = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2}, \dots, g_k = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_k}$, в которой каждый треугольник $g_i = g_{i-1} \sigma_{v_i}$ является отражением предыдущего треугольника g_{i-1} относительно их общей стороны, высекаемой на сфере плоскостью $g_{i-1}(\pi_{v_i})$. Эти треугольники образуют ведущую из e в g ленту вроде нарисованных на рис. 12◊6:

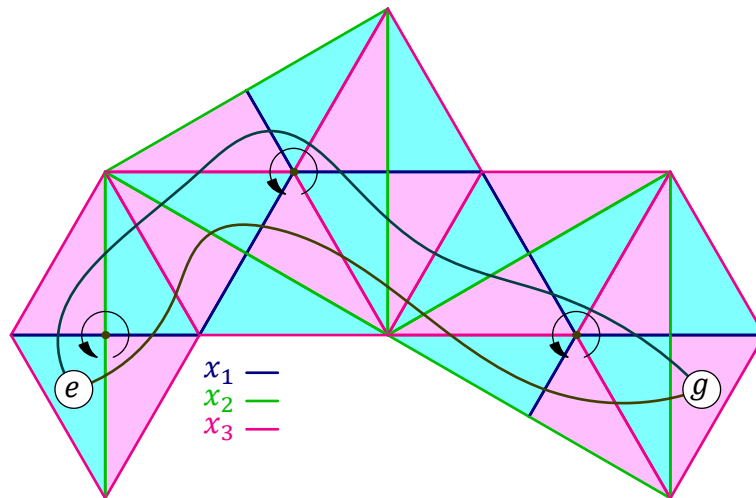


Рис. 12◊6. $x_1 x_2 x_3 x_2 x_3 x_1 x_3 x_1 x_2 x_3 x_2 x_1 x_3 x_1 x_2 = g = x_2 x_1 x_3 x_2 x_1 x_3 x_2 x_3 x_2 x_3 x_1 x_3 x_2$.

и последовательность номеров $v_1 v_2 \dots v_k$ простых отражений однозначно считывается с любой лежащей внутри этой ленты гладкой кривой, соединяющей какую-нибудь внутреннюю точку камеры e с какой-нибудь внутренней точкой камеры g и трансверсально пересекающей ровно по одному разу все встречающиеся по дороге из u в w внутри ленты зеркала. Две такие кривые, производящие слова w_1 и w_2 , можно непрерывно продеформировать одну в другую по поверхности сферы. При прохождении через вершину, в которой пересекаются помеченные номерами i и j стороны $2m_k$ треугольников, в задаваемом кривой слове некоторый фрагмент вида $x_i x_j x_i \dots$ длины ℓ заменятся равным ему в F_3 / N фрагментом вида $x_j x_i x_j \dots$ длины $2m - \ell$, дополняющим первый фрагмент до циклического соотношения $(x_i x_j)^{m_k} = e$. Например, переводимые гомоморфизмом φ в один и тот же элемент $g \in O_M$ слова

$$x_1 x_2 x_3 x_2 x_3 x_1 x_3 x_1 x_2 x_3 x_2 x_1 x_3 x_1 x_2 \quad \text{и} \quad x_2 x_1 x_3 x_2 x_1 x_3 x_2 x_3 x_2 x_3 x_1 x_3 x_2$$

отвечающие верхней и нижней траекториям на рис. 12◊6, преобразуются одно в другое применением циклических соотношений $x_1 x_2 = x_2 x_1$, $x_3 x_1 x_3 x_1 = x_1 x_3$ и $x_3 x_1 x_3 = x_1 x_3 x_1$ в трёх отмеченных на рис. 12◊6 вершинах. Тем самым, любые два слова, ведущие из e в g лежат в одном классе группы F_3 / N .

эквивалентным циклическим соотношениям $(\sigma_1\sigma_2)^2 = e$ и $(\sigma_1\sigma_3)^3 = e$ в диэдральных группах соответствующих вершин. Мы будем называть такие преобразования слов *допустимыми*.

Таким образом, приведённое слово w_{DC} представляет собою класс слов одинаковой длины, отличающихся друг от друга допустимыми преобразованиями.

ТЕОРЕМА 12.1

Каждая группа Кокстера G порождается отражениями $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ в гипергранях H_1, \dots, H_m произвольно выбранной камеры Вейля C и изоморфна фактору F_m/N свободной группы F_m с образующими x_1, \dots, x_m по наименьшей нормальной подгруппе $N \triangleleft F_m$, содержащей слова

$$x_i^2 \text{ и } (x_i x_j)^{m_{ij}}, \text{ где } 1 \leq i \neq j \leq m,$$

а $m_{ij} \in \mathbb{N}$ равно числу всех зеркал группы G , проходящих через пересечение $H_i \cap H_j$.

Доказательство. Поскольку простые отражения транзитивно действуют на камерах Вейля, каждое зеркало H группы G имеет вид $w_{DC}(H_j)$ для некоторого простого зеркала H_j и приведённого слова $w_{DC} = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$, преобразующего камеру C в камеру D , гранью которой служит зеркало H . Поэтому отражение $\sigma_H = \sigma_{w_{DC}(H_j)} = w_{DC}\sigma_j w_{DC}^{-1}$ является композицией простых отражений. Так как группа G порождается отражениями σ_H , она порождается простыми отражениями $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ в гипергранях камеры C . Покажем, что каждый элемент $g \in G$ равен приведённому слову камеры $D = gC$ относительно камеры C . Воспользуемся индукцией по длине ℓ самого короткого представления $g = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_\ell}$ в виде композиции простых отражений. При $\ell = 0, 1$ элемент g равен e или одному из простых отражений σ_i , а камера $D = gC$ либо совпадает с камерой C либо граничит с ней по гиперграню, высекаемой простым зеркалом H_i , и доказываемое утверждение очевидно. Пусть оно верно для всех элементов, которые являются композициями не более k простых отражений. Достаточно убедиться, что для любого такого элемента g и каждого простого отражения σ_j композиция $g\sigma_j$ равна приведённому слову w_{DC} камеры $D = g\sigma_j C$. Если камеры C и $E = gC$ находятся по одну сторону от зеркала gH_j , как на рис. 12◊8, выберем векторы $u \in \text{int } C$ и $w \in \text{int } E$ так, чтобы продолжение дуги $[u, w]$ за точку w уходило из камеры E в камеру D сквозь зеркало gH_j . По индукции, элемент g равен приведённому слову w_{EC} , считанному с дуги $[u, w]$. Поэтому, элемент $g\sigma_j = w_{EC}\sigma_j = w_{DC}$ тоже равен приведённому слову, считанному с продолжения дуги $[u, w]$ в камеру D сквозь стенку gH_j .

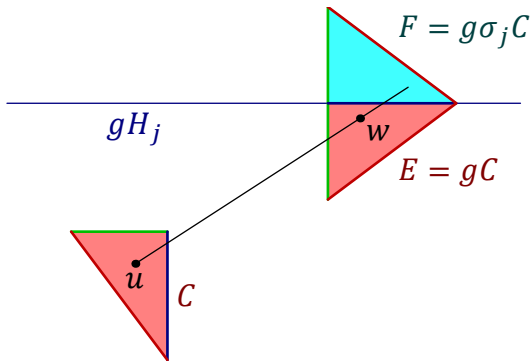


Рис. 12◊8. gH_j не разделяет C и gC .

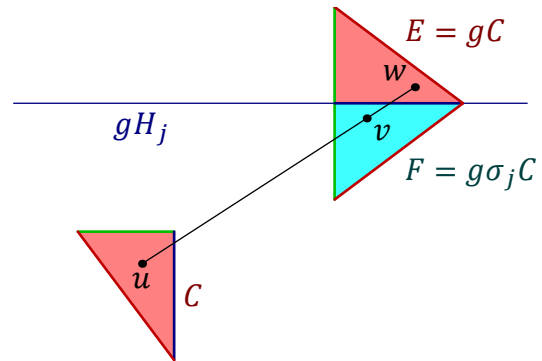


Рис. 12◊9. gH_j разделяет C и gC .

Если же камеры C и $E = gC$ расположены по разные стороны от зеркала gH_j , как на рис. 12◊9, мы выберем u и w так, чтобы дуга $[u, w]$ входила в камеру E сквозь зеркало gH_j , и обозначим через v любую точку этой дуги, лежащую в предыдущей камере $\sigma_{gH_j}E = g\sigma_j g^{-1}gC = g\sigma_j C = F$.

По индукции, g равен считанному с дуги $[u, w]$ приведённому слову w_{EC} , самой правой буквой которого является σ_j . Поэтому элемент $g\sigma_j = w_{EC}\sigma_j$ является композицией $k - 1$ простых отражений, и доказываемое утверждение верно для него по индукции.

Из сказанного вытекает, что элементы группы G находятся в биекции с камерами Вейля и выражаются через простые отражения точно также, как и в [прим. 12.2](#) выше. Это даёт сюръективный гомоморфизм $F_m / N \rightarrow G, x_i \mapsto \sigma_i$. Его инъективность проверяется дословно тем же рассуждением, что в [прим. 12.2](#). \square

Следствие 12.2

Камеры Вейля группы G можно биективно пометить элементами группы так, чтобы всякий элемент $h \in G$ переводил каждую камеру g в камеру¹ gh . При этом все приведённые слова w_{ge} камеры g относительно камеры e будут минимальными по длине выражениями элемента $g \in G$ через простые отражения.

Доказательство. Первое утверждение было установлено в доказательстве [теор. 12.1](#). Второе доказывается индукцией по длине минимального разложения элемента $g \in G$ в композицию простых отражений. Утверждение очевидно, когда эта длина 0 или 1. Пусть для каждого элемента $g \in G$, представимого в виде композиции не более k простых отражений, приведённые слова $w_{ge} = g$ являются минимальными по длине выражениями этого элемента через простые отражения. Достаточно убедиться, что то же самое справедливо для всех композиций $g\sigma_j$. Выберем внутри камер e и g единичные векторы u и $w \neq -u$ так, чтобы натянутая на них плоскость была трансверсальна попарным пересечениям зеркал и кратчайшая из двух высекаемых этой плоскостью на единичной сфере дуг либо входила в камеру g сквозь зеркало gH_j , либо продолжалась за точку w до пересечения с этим зеркалом. В первом случае считанное с дуги $[u, w]$ приведённое слово камеры g кончается на σ_j и имеет длину $\leq k$, а приведённое слово камеры $g\sigma_j$ короче, чем у камеры g . Поэтому элемент $g\sigma_j \in G$ является композицией менее k простых отражений и доказываемое утверждение справедливо для него по индукции. Во втором случае приведённое слово камеры $g\sigma_j$, считанное с продолжения дуги $[u, w]$ сквозь зеркало gH_j , равно $w_{ge}\sigma_j$ и имеет длину $k + 1$. Если элемент $g\sigma_j \in G$ является композицией $\leq k$ простых отражений, доказываемое утверждение снова выполняется для него по индукции. Если же $g\sigma_j$ не раскладывается в композицию $\leq k$ простых отражений, то каждое минимальное по длине выражение этого элемента через простые отражения имеет длину $k + 1$, и приведённое слово $w_{ge}\sigma_j$ является одним из таких минимальных выражений. \square

Пример 12.3 (образующие и соотношения симметрической группы)

Группа перестановок S_{n+1} изоморфна группе O_{Δ^n} правильного n -мерного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ вложенного в $(n + 1)$ -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^{n+1} с координатами (x_0, x_1, \dots, x_n) как выпуклая оболочка концов стандартных базисных векторов e_0, e_1, \dots, e_n . В самом деле, каждая перестановка базисных векторов однозначно задаёт ортогональное преобразование пространства \mathbb{R}^{n+1} , переводящее симплекс Δ^n в себя, и наоборот, каждое преобразование из группы симплекса как-то переставляет его вершины и, тем самым, однозначно продолжается до ортогонального преобразования пространства \mathbb{R}^{n+1} , получающегося из некоторой перестановки базисных векторов. Во избежание многоэтажных индексов мы будем обозначать вершину e_i

¹В этой ситуации говорят, что множество камер Вейля является главным однородным пространством группы G .

симплекса Δ^n символом $[i]$, а k -мерную грань, натянутую на вершины $[i_0], \dots, [i_k]$ симплекса Δ^n , — символом $[i_0 i_1 \dots i_k]$. Центр этой грани обозначим через $\langle i_0 i_1 \dots i_k \rangle \in [i_0 i_1 \dots i_k]$.

Отражение σ_{ij} в гиперплоскости $H_{ij} = (e_i - e_j)^\perp$, проходящей через середину ребра $[ij]$ и содержащей противоположную этому ребру $(n-2)$ -мерную грань, натянутую на остальные $n-1$ вершин, отличных от $[i], [j]$, переставляет между собою вершины $[i], [j]$, оставляя все остальные вершины на месте. В терминах S_{n+1} , отражение σ_{ij} осуществляет транспозицию элементов i и j .

УПРАЖНЕНИЕ 12.1. Убедитесь, что при $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$ зеркала H_{ij} и H_{km} ортогональны, а зеркала H_{ij} и H_{jk} с попарно различными i, j, k пересекаются под углом $\pi/3$.

Гиперплоскости H_{ij} осуществляют *барицентрическое разбиение* симплекса Δ^n на $n!$ меньших симплексов, каждый из которых имеет вершины в некоторой вершине $[i_0]$ симплекса Δ^n , в центре $\langle i_0 i_1 \rangle$ некоторого выходящего из этой вершины ребра $[i_0 i_1]$, в центре $\langle i_0 i_1 i_2 \rangle$ некоторой примыкающей к этому ребру двумерной грани $[i_0 i_1 i_2]$ и т. д. вплоть до вершины, расположенной в центре $[i_0 i_1 \dots i_n] = [01 \dots n]$ всего симплекса Δ^n . При $n=3$ мы получаем барицентрическое разбиение тетраэдра, изображённое на рис. 12♦4 на стр. 152 выше. Надпишем симплекс

$$[\langle 0 \rangle, \langle 01 \rangle, \langle 012 \rangle, \dots, \langle 0, 1, \dots, n-1 \rangle, \langle 0, 1, \dots, n \rangle], \quad (12-4)$$

единичным элементом $e \in S_{n+1}$. Каждая перестановка $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in S_{n+1}$ переводит симплекс e в симплекс

$$[\langle g_0 \rangle, \langle g_0, g_1 \rangle, \langle g_0, g_1, g_2 \rangle, \dots, \langle g_0 g_1 \dots g_{n-1} \rangle, \langle g_0 g_1 \dots g_n \rangle], \quad (12-5)$$

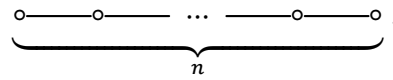
который мы пометим элементом g . В результате все $n!$ симплексов разбиения биективно пометятся элементами группы S_{n+1} , совершенно аналогично тому, как это было в прим. 12.2 на стр. 151. Те же самые аргументы, что и в прим. 12.2, показывают, что группа S_{n+1} является группой Кокстера и порождается n отражениями $\sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{i-1, i}$, где $1 \leq i \leq n$, в зеркалах $H_i \stackrel{\text{def}}{=} (e_i - e_{i-1})^\perp$, высекающих гиперграни симплекса e .

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Удостоверьтесь в истинности последнего высказывания.

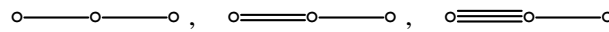
В силу теор. 12.1 на стр. 156 и предыдущего упр. 12.1 группа S_{n+1} изоморфна фактору F_n / N свободной группы F_n с образующими x_1, \dots, x_n по наименьшей нормальной подгруппе $N \triangleleft F_n$, содержащей слова x_i^2 с $1 \leq i \leq n$, слова $(x_i x_j)^2$ с $1 \leq i, j \leq n$ и $|i-j| \geq 2$, и слова $(x_k x_{k+1})^3$ с $1 \leq k \leq n-1$. Изоморфизм переводит образующую $x_i \in F_n$ в транспозицию s_i элементов $i-1$ и i . Соотношение $(\sigma_i \sigma_j)^2 = e$ означает, что $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ при $|i-j| \geq 2$, т. е. что транспозиции непересекающихся пар последовательных элементов коммутируют друг с другом. Соотношение $(\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k)^3 = e$ чаще записывают в виде $\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}$ и называют *уравнением треугольника*, поскольку простейшей его инкарнацией является соотношение между отражениями в медианах правильного треугольника.

12.4. Классификация групп Кокстера даётся в терминах *графов Кокстера*. По определению, вершинами графа Кокстера группы Кокстера G являются простые зеркала H_1, \dots, H_m , высекающие гиперграни произвольно зафиксированной камеры Вейля группы G . Вершина H_i соединяется с вершиной H_j неориентированными рёбрами, число которых равно $m_{ij} - 2$, где m_{ij} — количество зеркал группы G , проходящих через пересечение $H_i \cap H_j$. Таким образом, между перпендикулярными простыми зеркалами рёбер нет, пара простых зеркал, пересекающихся под

углом $\pi/3$, соединяется одним ребром, простые зеркала, составляющие угол $\pi/4$ — двумя рёбрами и т. д. Например, симметрическая группа S_n имеет граф Кокстера



Граф Кокстера диэдральной группы D_m из прим. 12.1 на стр. 149 состоит из двух вершин, соединённых $m - 2$ рёбрами. Графы Кокстера групп тетраэдра, октаэдра и икосаэдра из прим. 12.2 на стр. 151 имеют вид

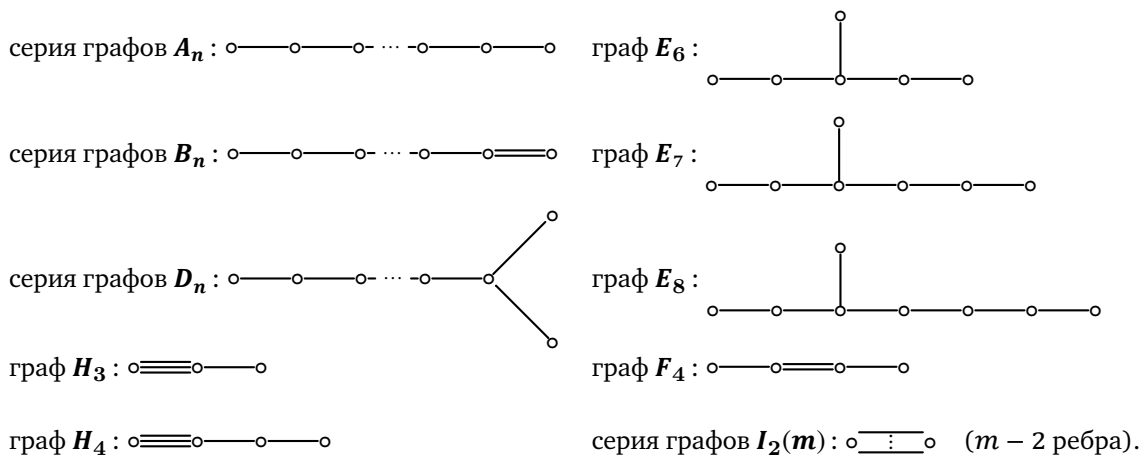


(число рёбер между вершинами i и j равно числу m_{ij} из таблицы со стр. 152).

Граф Кокстера несвязен если и только если объёмлющее евклидово пространство V раскладывается в ортогональную прямую сумму $V = \bigoplus V_i$ инвариантных относительно группы G подпространств $V_i \subset V$, а группа G — в прямое произведение $G = \prod G_i$ своих подгрупп Кокстера $G_i \subset G$, которые находятся в биекции с компонентами V_i и независимо действуют каждая на своей компоненте, оставляя все остальные компоненты неподвижными. При этом зеркала каждой подгруппы G_i высекаются из подпространства V_i теми зеркалами группы G , которые не содержат V_i , но содержат все остальные подпространства V_j с $j \neq i$, а графы Кокстера групп G_i являются связными компонентами графа Кокстера группы G .

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Убедитесь в этом.

Полный список связных графов Кокстера таков¹:



Доказательство² состоит в последовательном исключении невозможных конфигураций зеркал посредством простых геометрических соображений и явном построении примеров, реализующих перечисленные выше конфигурации. К сожалению, временные рамки данного курса не позволяют нам разобрать это доказательство.

¹Нижний индекс в обозначении графа всегда равен числу его вершин.
²См. мою лекцию http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_07.pdf или Дубнинскую брошюру: Е. Ю. Смирнов. «Группы отражений и правильные многогранники». М.: МЦНМО, 2009.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 12.1. При $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$ нормальные векторы $e_i - e_j$ и $e_k - e_m$ зеркал H_{ij} и H_{km} имеют нулевое скалярно произведение. Во втором случае нормальные векторы $e_i - e_j$, $e_j - e_k$, $e_k - e_i$ зеркал H_{ij} , H_{jk} , H_{ki} являются сторонами правильного треугольника на двумерной евклидовой аффинной плоскости, проходящей через концы векторов e_i , e_j , e_k .
- Упр. 12.2. Симплекс e описывается в пространстве \mathbb{R}^{n+1} уравнением $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$ и неравенствами $1 \geq x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$. Согласно теор. 11.5 на стр. 142, его гиперграни отсекаются гиперплоскостями $x_{i-1} = x_i$, где $1 \leq i \leq n$.