§11. Выпуклая геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные векторные пространства V над полем $\mathbb{R}$.

11.1. Напоминания из аффинной геометрии и топологии. Для любого набора точек

$$p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$$

и произвольных весов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ с ненулевой суммой $\mu = \sum \mu_i \neq 0$ существует единственная такая точка $c \in \mathbb{A}^n$, что

$$\mu_1 \overrightarrow{cp}_1 + \mu_2 \overrightarrow{cp}_2 + \dots + \mu_m \overrightarrow{cp}_m = 0\,. \tag{11-1}$$

В самом деле, сумма в левой части формулы (11-1), посчитанная для другой точки s в роли c, отличается от суммы из (11-1) на вектор

$$\sum \mu_i \overrightarrow{sp}_i - \sum \mu_i \overrightarrow{cp}_i = \sum \mu_i (\overrightarrow{sp}_i - \overrightarrow{cp}_i) = \mu\, \overrightarrow{sc}\,.$$

Поэтому при фиксированной начальной точке $s \in \mathbb{A}^n$ соотношение (11-1) выполняется для единственной точки c с радиус вектором

$$\overrightarrow{sc} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{sp}_i\,. \tag{11-2}$$

Эта точка называется *центром тяжести* или *барицентром* точек p_i с весами μ_i. Термин пришёл из механики: если поместить евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ в качестве «горизонтальной» гиперплоскости Γ и приложить к каждой точке p_i силу μ_i, направленную вниз, если $\mu_i > 0$, и вверх, если $\mu_i < 0$, как на рис. 11◇1, то равенство (11-1) выражает обнуление суммарного момента этих сил относительно точки c: если оно выполняется, гиперплоскость Γ, удерживаемая ровно за одну точку c, будет находится в равновесии.

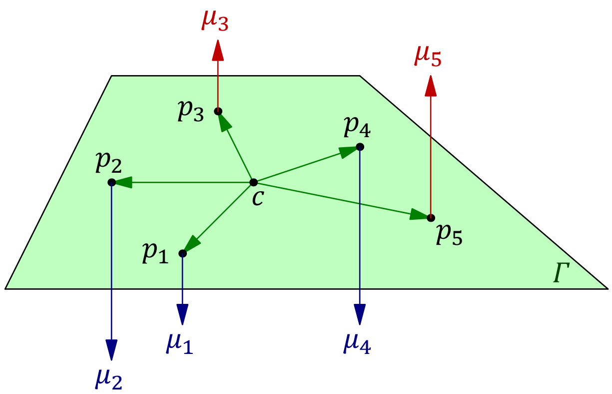

Рис. 11◇1. Моменты сил.

Из единственности центра тяжести вытекает, что для любого набора точек $p_1, p_2, \dots, p_m$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ с суммой $\sum x_i = 1$, точка $c = s + \sum x_i \cdot \overrightarrow{sp}_i$ не зависит от выбора начальной точки s. Эта точка обозначается

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m \stackrel{\text{def}}{=} s + \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \overrightarrow{sp}_i \tag{11-3}$$

и называется *барицентрической комбинацией* точек p_i с весами x_i.

Пример 11.1 (барицентрические координаты)
Если никакие n из $n+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ не лежат в одной гиперплоскости, то помещая пространство $\mathbb{A}(V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $e + V$ в векторное пространство $W = \mathbb{R}\, e \oplus V$, мы можем взять $n+1$ радиус векторов, ведущих из нуля пространства W в точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ в качестве базиса в W. В координатах $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ относительно этого базиса аффинное пространство $e+V \subset W$ задаётся уравнением $x_0+x_1+\dots+x_n = 1$ и отождествляется с аффинной картой $U = U_{x_0+x_1+\dots+x_n}$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$. Точка с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ видна в карте U если и только если $\sum x_i \neq 0$, и в этом случае её изображением в карте U является в точности центр тяжести точек p_i, взятых с весами x_i. Таким образом, каждая точка $z \in \mathbb{A}^n$ единственным образом представляется в виде барицентрической комбинации точек p_i, и коэффициенты x_i этой комбинации совпадают с однородными координатами точки $z \in U$ относительно базиса $p_0, p_1, \dots, p_n$ в проективном пространстве $\mathbb{P}(W)$. Они называются *барицентрическими координатами* точки z относительно точек $p_0, p_1, \dots, p_n$.

Упражнение 11.1 (группирование масс). Пусть набор точек p_i с весами μ_i и набор точек q_j с весами ν_j имеют центры тяжести в точках p и q, причём обе суммы весов: $\mu = \sum \mu_i$ и $\nu = \sum \nu_j$, а также их сумма $\mu+\nu$ ненулевые. Убедитесь, что центр тяжести объединения всех точек[1] p_i и q_j совпадает с центром тяжести точек p и q, взятых с весами μ и ν. Убедитесь также, что любая барицентрическая комбинация $\sum_i y_i p_i$ точек p_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, каждая из которых в свою очередь является барицентрической комбинацией $p_i = \sum_j x_{ij} q_{ij}$ каких-то ещё точек q_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, тоже представляется в виде барицентрической комбинации $\sum_{ij} z_{ij} q_{ij}$ упомянутых точек q_{ij}, причём если все $y_i \geqslant 0$ и все $x_{ij} \geqslant 0$, то и все $z_{ij} \geqslant 0$.

11.1.1. Выпуклость. Барицентрическая комбинация $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m$ точек $p_i \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ называется *выпуклой*, если все её коэффициенты $x_i \geqslant 0$. Фигура $\Phi \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации любых своих точек. Из упр. 11.1 вытекает, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вмести с любыми двумя своими точками a, b она содержала и соединяющий их *отрезок*

$$[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{\lambda a + \mu b \mid \lambda + \mu = 1,\ \lambda, \mu > 0\}\,.$$

Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру Φ, называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\operatorname{conv} \Phi$. Иначе $\operatorname{conv} \Phi$ можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ: это множество выпукло по упр. 11.1 и содержится в любом выпуклом множестве, содержащем фигуру Φ.

11.1.2. Стандартная топология[2]. Для произвольного вещественного $\varepsilon > 0$ мы называем *ε-окрестностью* точки $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ правильный куб с центром в p и направленными вдоль стандартных координатных осей рёбрами длины 2ε:

$$B_\varepsilon(p) \overset{\text{def}}{=} \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \forall\, i\ |x_i - p_i| \leq \varepsilon\}\,. \tag{11-4}$$

[1] Если какая-то из точек p_i совпадает с некоторой точкой q_j, то их «объединение» заключается в сложении весов.

[2] Все необходимые нам сведения из курса топологии имеются в лекции:
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_08.pdf.

Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ *открыто*, если вместе с каждой точкой $p \in U$ в U лежит и какая-нибудь её ε-окрестность $B_\varepsilon(p)$. Кубы (11-4) являются шарами радиуса ε относительно sup-*нормы*

$$||(x_1, x_2, \dots, x_n)||_{\sup} = \max_i |x_i| .$$

Рассматриваемая нами топология является *метрической топологией*, определяемой при помощи этой нормы. Поскольку все нормы на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ задают одну и ту же топологию, данное выше определение отрытого множества не зависит от выбора системы координат, использованной для определения ε-окрестностей.

Упражнение 11.2. Докажите это непосредственно, без ссылок на курс топологии.

Напомню, что точка p называется *внутренней* точкой фигуры Φ, если она лежит в Φ вместе с некоторою своею ε-окрестностью. Множество внутренних точек фигуры Φ обозначатся $\operatorname{int}\Phi$. Внутренние точки дополнения $\mathbb{A}^n \smallsetminus \Phi$ называются *внешними* точками фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$. Точки, не являющиеся ни внешними, ни внутренними, называются *граничными*. Множество граничных точек фигуры Φ обозначатся $\partial\Phi$. Объединение $\overline{\Phi} = \Phi \cup \partial\Phi$ называется *замыканием* фигуры Φ.

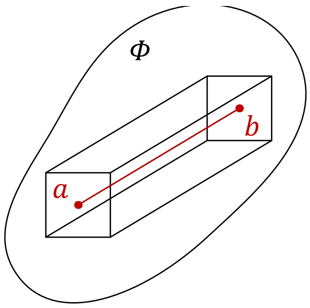

Рис. 11◇2. Выпуклоость внутренности.

Упражнение 11.3. Покажите, что $p \in \partial\Phi$ если и только если в любой ε-окрестности точки p имеются как точки фигуры Φ, так и точки не лежащие в Φ, и докажите, что замыкание $\overline{\Phi}$ является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим Φ.

Предложение 11.1

Внутренность и замыкание любой выпуклой фигуры выпуклы.

Доказательство. Первое вытекает из того, что если точки a и b содержатся в выпуклом множестве Φ вместе с некоторыми ε-кубами $B_\varepsilon(a), B_\varepsilon(b) \subset \Phi$, то все точки отрезка $[ab]$ содержатся в Φ вместе с такими же ε-кубами, см. рис. 11◇2. Второе — из того, что если $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ и $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, то при любых фиксированных λ и μ предел $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \lim\limits_{k\to\infty} a_k + \mu \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lambda a + \mu b$. В частности, каждая точка отрезка $[a, b]$ является пределом последовательности точек фигуры Φ, если таковыми являются концы a, b этого отрезка. □

Упражнение 11.4. Докажите, что замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью является замыканием множества своих внутренних точек, и приведите пример невыпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью, которое не является замыканием множества своих внутренних точек.

Пример 11.2 (симплексы)

Выпуклая оболочка $n+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n$, не лежащих в $(n-1)$-мерной плоскости, называется *n-мерным симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} x_i p_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\,,\ x_i \geqslant 0 \right\}. \tag{11-5}$$

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно. В порождённом вершинами симплекса пространстве $\mathbb{A}^n$, в аффинных координатах $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно репера с началом в p_0 и базисными векторами $e_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, симплекс (11-5) задаётся системой из $(n+1)$ линейных неоднородных неравенств

$$x_1 \geqslant 0\,,\ \dots\,,\ x_n \geqslant 0\,,\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant 1\,. \tag{11-6}$$

Поскольку в точке с координатами $\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}\right)$ все эти неравенства выполнены строго, она принадлежит симплексу вместе с некоторым ε-кубом, т. е. каждый симплекс имеет непустую внутренность. В частности, выпуклая оболочка любых $(n+1)$ не лежащих в одной гиперплоскости точек пространства $\mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность.

Упражнение 11.5. Проверьте, что граница симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, \dots, p_{\nu_m}]$, где $m < n$ и $\nu_i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

11.1.3. Аффинные функционалы и полупространства. Мы называем *аффинными функционалами* на $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ аффинные отображения $a : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$. Если произвольно фиксировать начальную точку $c \in \mathbb{A}^n$, то действие такого функционала на точку $p \in \mathbb{A}^n$ задаётся формулой

$$a(p) = a(c) + \alpha(\overrightarrow{cp})\,,$$

которую мы будем коротко записывать в виде $a = a_c + \alpha$, где $a_c = a(c) \in \mathbb{R}$, а дифференциал $\alpha = D_a \in V^*$ не зависит от c. Ограничение аффинного функционала $a : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$ на любой отрезок $[p, q] \subset \mathbb{A}^n$ представляет собою «школьную линейную функцию» $a(x) = \alpha x + \beta$ на этом отрезке, и для неё имеются следующие исключающие друг друга возможности: она либо тождественно нулевая, либо нигде не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак, либо зануляется ровно в одной точке $z \in [p, q]$. В последнем случае имеется дальнейшая альтернатива: либо точка z является одним из концов отрезка, и функционал a имеет постоянный знак на полуинтервале $[p, q] \smallsetminus z$, либо $z \in (a, b)$, а a имеет постоянные и противоположные друг другу знаки на полуинтервалах $[p, z)$ и $(z, b]$. Таким образом, каждый непостоянный аффинный функционал $a : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$ задаёт разбиение аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости $H_a = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) = 0\}$ и двух выпуклых открытых полупространств $\operatorname{int} H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) > 0\}$ и $\operatorname{int} H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) < 0\}$, которые являются внутренностями двух замкнутых полупространств $H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \geqslant 0\}$ и $H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \leqslant 0\}$ с общей границей $\partial H_a^+ = \partial H_a^- = H_a$. Каждый отрезок $[p, q]$ с $p \in \operatorname{int} H^+$ и $q \in \operatorname{int} H_a^-$ пересекает гиперплоскость H_a в единственной точке, и она является внутренней точкой отрезка $[p, q]$.

11.2. Опорные полупространства. Гиперплоскость $H_a \subset \mathbb{A}^n$ называется *опорной гиперплоскостью* фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$, если $H_a \cap \partial\Phi \neq \varnothing$ и $\Phi \subset H_a^+$. В этой ситуации замкнутое полупространство H_a^+ называется *опорным полупространством*, а аффинный функционал a — *опорным функционалом* фигуры Φ.

Лемма 11.1

Для любого открытого выпуклого множества U в аффинном пространстве размерности $n \geqslant 2$ через каждую точку $p \notin U$ можно провести не пересекающую U прямую.

Доказательство. Обозначим через C объединение всех открытых лучей

$$]\,p, u) \stackrel{\text{def}}{=} \{p + t \cdot \overrightarrow{pu} \mid u \in U,\ t > 0\}\,,$$

начинающихся в p и проходящих через всевозможные точки $u \in U$. Из рис. 11⋄3 и рис. 11⋄4 очевидно, что C является открытой выпуклой фигурой, и $p \in \partial C$. Так как $U \subset C$, достаточно провести через p прямую, не пересекающую C. Из выпуклости C следует, что любая проходящая через p прямая ℓ либо не пересекает C, либо пересекает C по одному из лучей $]p, u)$, все точки которого являются внутренними точками C, а все остальные отличные от p точки прямой ℓ являются для C внешними, см. рис. 11⋄3. В частности, внешние для C точки существуют. Пусть q — одна из них. Поскольку объемлющее аффинное пространство по крайней мере двумерно, через q можно провести пересекающую C прямую, отличную от прямой (qp). На ней имеется отличная от p граничная точка r конуса C. Тем самым, прямая (pr) не пересекает C. □

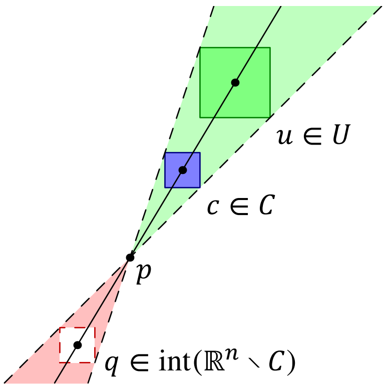

Рис. 11⋄3. Открытость C и непустота $\operatorname{int}(\mathbb{A}^n \smallsetminus C)$.

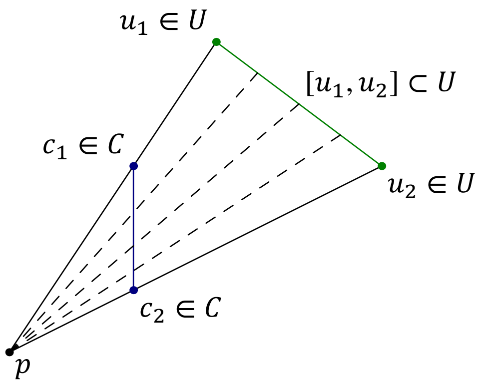

Рис. 11⋄4. Выпуклость C.

Теорема 11.1
Для любых открытого выпуклого множества U и не пересекающегося с ним аффинного подпространства Π в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ существует аффинная гиперплоскость, содержащая Π и не пересекающая U.

Доказательство. Поместим начало координат внутрь Π и отождествим Π с векторным подпространством $W \subset V$ (возможно нулевым). Обозначим через $H \subset V$ какое-нибудь максимальное по включению векторное подпространство, содержащее W и не пересекающее U, а через $H' \subset V$-любое дополнительное к H векторное подпространство. Проекция пространства $V = H \oplus H'$ на H' вдоль H переводит отрезки из $\mathbb{A}(V)$ в отрезки или точки из $\mathbb{A}(H')$, а кубы из $\mathbb{A}(V)$ со сторонами, направленными вдоль базисных векторов любого базиса в V, согласованного с разбиением $V = H \oplus H'$, — в аналогичные кубы в $\mathbb{A}(H')$. Поэтому множество U спроектируется в открытое выпуклое множество $U' \subset \mathbb{A}(H')$, не содержащее нуля, поскольку ядро проекции H не пересекается с U. Если $\dim H' > 1$, то по лем. 11.1 в H' найдётся одномерное подпространство L, не пересекающее U'. Но тогда подпространство $H \oplus L \subset V$ не пересекает U и строго больше, чем H, вопреки выбору H. Поэтому $\dim H' = 1$ и H является искомой гиперплоскостью. □

Теорема 11.2
Через каждую граничную точку p любой выпуклой фигуры Φ можно провести опорную гиперплоскость (возможно, не единственную).

Доказательство. Если фигура $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ целиком лежит в какой-нибудь гиперплоскости, то эта гиперплоскость и будет опорной. Если же в Φ есть $n + 1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то $\operatorname{int} \Phi \neq \varnothing$ согласно прим. 11.2 на стр. 137. Проведём через p гиперплоскость H_a, не пересекающую $\operatorname{int} \Phi$. Функционал α имеет на $\operatorname{int} \Phi$ постоянный знак, так как в противном случае, соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из $H_\alpha \cap \operatorname{int} \Phi$. Меняя, если нужно, знак у α, мы можем считать, что $\operatorname{int} \Phi \subset \operatorname{int} H_\alpha^+$. Поскольку Φ лежит в замыкании своеё внутренности $\operatorname{int} \Phi$, которое в свою очередь содержится в замкнутом полупространстве H_α^+, мы заключаем, что $\Phi \subset H_\alpha^+$. □

Теорема 11.3
Всякое замкнутое выпуклое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ является пересечением своих опорных полупространств.

Доказательство. Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего Z, мы можем считать, что Z не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка $q \notin Z$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества Z. Для этого соединим q отрезком $[q, p]$ с какой-нибудь внутренней точкой $p \in \operatorname{int} Z$ и проведём опорное полупространство H_α^+ к Z в граничной точке $r \in [q, p] \cap \partial Z$. Поскольку r лежит строго внутри $[q, p]$, из $\alpha(p) > 0$ и $\alpha(r) = 0$ следует, что $\alpha(q) < 0$, т. е. $q \notin H_\alpha^+$. □

11.2.1. Грани и крайние точки. Пересечение замкнутой выпуклой фигуры Φ с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры Φ. Каждая грань фигуры Φ тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ строго меньше n. Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются *вершинами*. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с *произвольными* выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры на рис. 11◇5, где пара отрезков гладко сопрягается с овалами, есть две одномерных грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры Φ может не быть гранью самой фигуры Φ.

Точка $p \in \Phi$ называется *крайней точкой* замкнутой выпуклой фигуры Φ, если она не является внутренней точкой никакого отрезка $[a, b] \subset \Phi$. Крайняя точка не может быть внутренней точкой никакой замкнутой выпуклой фигуры, отличной от точки. Если же точка q является внутренней точкой какого-либо отрезка $[a, b] \subset \Phi$, то она может оказаться в грани фигуры Φ только если весь отрезок $[a, b]$ лежит в этой грани, поскольку в противном случае высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным. Таким образом, крайние точки суть нульмерные грани, возникающие из всевозможных цепочек вида: фигура Φ, грань фигуры Φ, грань грани фигуры Φ, грань грани грани фигуры Φ, и т. д.. В частности, все вершины фигуры Φ являются её крайними точками. Обратите внимание, что крайние точки всех граней замкнутой выпуклой фигуры Φ являются крайними и для Φ, хотя при этом они могут не быть вершинами фигуры Φ.

Рис. 11◇5.

Теорема 11.4
Каждая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Доказательство. Индукция по размерности фигуры. Любая внутренняя точка фигуры является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого из фигуры произвольной проходящей через точку прямой. Эти концы лежат на гранях фигуры и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. Последние являются крайними точками и для самой фигуры. □

11.2.2. Цилиндры. Замкнутая выпуклая фигура вида $\Phi = \mathbb{A}(U) \times B \subset \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$, где $\dim U > 0$, а $B \subset \mathbb{A}(W)$ — непустая замкнутая выпуклая фигура, не содержащая аффинных подпространств положительной размерности, называется *цилиндром* с *основанием* B и *образующей* $\mathbb{A}(U)$. Если основание B состоит из одной точки, цилиндр совпадает со своей образующей $\mathbb{A}(U)$ и является аффинным пространством.

Предложение 11.2
Через каждую точку p любой замкнутой выпуклой фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$ проходит единственное максимальное по включению аффинное подпространство, целиком содержащееся в Φ. Все такие подпространства имеют одно и то же направляющее векторное пространство $U \subset V$. Если $U \neq 0$, то для любого дополнительного[1] векторного подпространства $U' \subset V$ замкнутая выпуклая фигура $\Phi' = \Phi \cap (p + U')$ не содержит аффинных пространств положительной размерности, и $\Phi = \mathbb{A}(U) \times \Phi'$ является цилиндром с основанием Φ' с образующей $\mathbb{A}(U)$.

Доказательство. Если аффинные подпространства $p + W_1$ и $p + W_2$ содержатся в Φ, то Φ содержит и аффинное подпространство $p + (W_1 + W_2)$, т. к. для любых $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$ точка $p + w_1 + w_2$ является серединой отрезка с концами в точках $p + 2w_1$ и $p + 2w_2$. Поэтому аффинное пространство $p + U$, где $U \subset V$ это сумма всех таких подпространств $W \subset V$, что $p + W \subset \Phi$, содержит все лежащие в Φ аффинные подпространства, проходящие через p. Если $q + W$ это максимальное содержащееся в Φ аффинное подпространство, проходящее через точку $q \notin p + U$, то $U \subset W$, так как для любого вектора $u \in U$ точка $r = q + u$ является концом содержащегося в Φ интервала $[p, r[= \{(1-t)p + tr \mid 0 \leqslant t < 1\}$ (см. рис. 11◇6), ибо

$$(1-t)p + t(q+u) = (1-t)\left(p + \frac{t}{1-t}u\right) + tq \in \Phi\,.$$

По той же причине $W \subset U$. Это доказывает первые два утверждения и первую половину третьего. Прямое разложение $V = U \oplus U'$ задаёт разложение $\mathbb{A}(V) = (p + U) \times (p + U')$, в котором $p + U \subset \Phi$. Для любой точки $q = p + u + u' \in \Phi$ точка $p + u' = q - u \in q + U$ лежит в $(p + U') \cap \Phi = \Phi'$. Наоборот, для любой точки $p + u' \in \Phi' \subset \Phi$ всё аффинное пространство $p + u' + U \subset \Phi$. Поэтому $\Phi \subset (p + U) \times \Phi'$. □

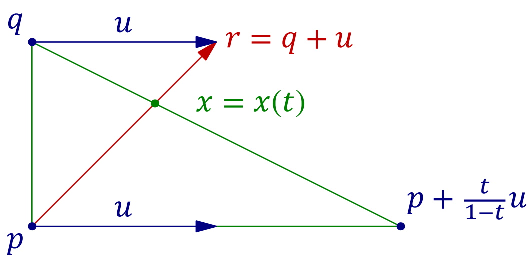

Рис. 11◇6. $\overrightarrow{px} : \overrightarrow{xr} = t : (1-t)$.

Следствие 11.1
Следующие свойства непустой замкнутой выпуклой фигуры Φ эквивалентны друг другу:

1) Φ является цилиндром

[1] Т. е. такого, что $U \oplus U' = V$.

2) Φ не имеет крайних точек

3) Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2). Если Φ цилиндр, то через любую точку $p \in \Phi$ проходит содержащееся в Φ аффинное пространство положительной размерности. Поэтому никакая точка $p \in \Phi$ не может быть крайней.

Импликация (2) ⇒ (3). Если фигура Φ не совпадает с наименьшим аффинным подпространством, в котором она содержится, то в этом подпространстве у Φ есть опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем $\dim \Phi$. Заменяя Φ на эту грань и повторяя рассуждение, мы построим цепочку вида: фигура Φ, грань фигуры Φ, грань грани фигуры Φ, и т. д., последний элемент в которой совпадает с наименьшим содержащим его аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то она крайняя. Если нет, то Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Импликация (2) ⇒ (3) вытекает из предл. 11.2. □

11.3. Выпуклые многогранники. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств

$$M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \ldots \cap H_{a_m}^+ \,, \tag{11-7}$$

задаваемых в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ набором непостоянных аффинных функционалов

$$a_1, a_2, \ldots, a_m : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{R}\,, \tag{11-8}$$

называется *выпуклым многогранником*. В частности, каждая аффинная гиперплоскость $H_a = H_a^+ \cap H_a^- = H_a^+ \cap H_{-a}^+$ является выпуклым многогранником. Пересечение конечного множества выпуклых многогранников является многогранником. В частности, все аффинные подпространства, включая точку, а также пустое множество и сечения любого выпуклого многогранника любыми аффинными подпространствами являются выпуклыми многогранниками. Удобно считать, что и всё объемлющее пространство $\mathbb{A}(V)$ является выпуклым многогранником, который мы будем называть *несобственным* в отличие от многогранников (11-7), которые будем называть *собственными*.

Каждый собственный непустой выпуклый многогранник M имеет грани, и все они являются непустыми выпуклыми многогранниками. Сам многогранник M является своей гранью если и только если он содержится в некоторой гиперплоскости. В этом случае мы будем называть совпадающую с M грань *несобственной*, а все остальные грани $\Gamma \subsetneq M$ — *собственными*.

Под *размерностью* выпуклого многогранника мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится. В частности, размерность каждой собственной грани строго меньше размерности многогранника. Грани $\Gamma \subset M$ размерности $\dim \Gamma = \dim M - 1$ называются *гипергранями*.

Для многогранника (11-7) и каждого непустого подмножества

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$$

мы полагаем $H_I = \bigcap_{i \in I} H_{a_i}$. Это аффинное подпространство в $\mathbb{A}(V)$, возможно пустое.

Теорема 11.5 (перечисление граней)
Для каждого I пересечение $\Gamma_I \overset{\text{def}}{=} M \cap H_I$ либо пусто, либо является гранью M, и все грани многогранника M получаются таким образом. Для каждой грани Γ_I аффинное подпространство H_I

является наименьшим содержащим грань Γ_I аффинным пространством. Точка $p \in \Gamma_I$ является внутренней[1] точкой грани Γ_I если и только если $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I$.

Доказательство. Если многогранник $\Gamma_I = M \cap H_I$ не пуст, то сумма $a_I = \sum_{i \in I} a_i$ является опорным функционалом[2] для M и $\Gamma_I = M \cap H_{\alpha_I}$. Поэтому все непустые многогранники Γ_I являются гранями многогранника M. Покажем, что для каждой такой грани Γ_I справедливы два последних утверждения теоремы. Пусть точка $p \in \Gamma_I = H_I \cap M$ такова, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I$. Так как эти строгие неравенства выполняются и на некоторой кубической окрестности точки p в аффинном пространстве H_I, точка p входит в Γ_I вместе с этой кубической окрестностью. Это означает, что подпространство H_I является наименьшим аффинным пространством, содержащим грань Γ_I, а точка p является внутренней точкой грани Γ_I. Наоборот, если хоть один функционал a_k зануляется в точке p, лежащей в произвольной[3] грани $\Gamma' \subseteq M$, но при этом положителен в некоторой другой точке q той же грани, то точка p не может быть внутренней точкой грани Γ', ибо в противном случае, немного продлив отрезок $[q, p]$ за точку p, мы получим в грани Γ' точку, где функционал a_k строго отрицателен.

Рассмотрим теперь произвольную грань $\Gamma = H_b \cap M$, где b — какой-либо опорный функционал многогранника M. Обозначим через $I = I(\Gamma) \subset \{1, 2, \dots, m\}$ множество номеров всех тех из задающих M функционалов a_i, для которых $\Gamma \subset H_{a_i}$. Поскольку для каждого $j \notin I$ найдётся такая точка $q_j \in \Gamma$, что $a_j(q_j) > 0$, все функционалы a_j с $j \notin I$ строго положительны в барицентре q_Γ всех точек q_j. Если $I = \varnothing$, то вообще все функционалы a_i строго положительны в точке q_Γ, а значит, и на некотором кубе с центром в q_Γ. Тем самым, q_Γ является внутренней[4] точкой многогранника M и не лежит ни в какой грани. Мы заключаем, что для любой грани $\Gamma \subseteq M$ множество $I = I(\Gamma)$ непусто и $\Gamma \subseteq H_I \cap M = \Gamma_I$. В частности, и грань $\Gamma_I = H_I \cap M$, и аффинное подпространство H_I тоже непусты, а точка q_Γ является, по уже доказанному, внутренней точкой грани Γ_I. Поэтому для любой точки $p \in \Gamma_I$ отрезок $[p, q_\Gamma]$ можно немного продлить за точку q_Γ так, чтобы его новый конец r всё ещё лежал в Γ_I. Из соотношений $b(p) \geqslant 0$, $b(q_\Gamma) = 0$, $b(r) \geqslant 0$ вытекает, что $b(r) = b(p) = 0$. Следовательно, каждая точка $p \in \Gamma_I$ лежит в грани Γ, откуда $\Gamma = \Gamma_I$. □

Следствие 11.2
Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, и каждая грань любой грани является гранью самого многогранника. □

Следствие 11.3
Крайними точками любого выпуклого многогранника являются его вершины и только они. □

Следствие 11.4
Каждый ограниченный выпуклый многогранник имеет конечное множество вершин и совпадает с их выпуклой оболочкой. □

Следствие 11.5
Непустой выпуклый многогранник M тогда и только тогда является цилиндром[5], когда он не имеет вершин. □

---
[1] В топологии аффинного пространства H_I.
[2] См. n° 11.2 на стр. 138.
[3] Возможно даже не имеющей вида $\Gamma_I = M \cap H_I$.
[4] В топологии объемлющего пространства $\mathbb{A}(V)$.
[5] См. n° 11.2.2 на стр. 141. Являющиеся цилиндрами многогранники также называют *призмами*.

11.4. Выпуклые многогранные конусы. Каждое непустое конечное множество R векторов из V задаёт в $\mathbb{A}(V)$ фигуру

$$\sigma_R = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geqslant 0},\, w_i \in R \subset V\}, \tag{11-9}$$

состоящую из всех неотрицательных линейных комбинаций векторов из множества R и именуемую *выпуклым многогранным конусом*. Векторы $w \in R$ называются *образующими* конуса σ_R.

Упражнение 11.6. Убедитесь, что σ_R является замкнутой выпуклой фигурой в $\mathbb{A}(V)$.

Каждый конус (11-9) не пуст, поскольку содержит нулевой вектор $0 \in V$. Вместе с каждым ненулевым вектором $v \in \sigma_R$ в конусе $\sigma_{\mathbb{R}}$ лежат и все неотрицательные кратные этого вектора, т. е. замкнутый луч $[0, v) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\, v$. Поэтому любая опорная гиперплоскость H_a конуса σ проходит через нуль: в противном случае из неравенства $a(0) > 0$ и равенства $a(v) = 0$, которое должно выполняться в некоторой точке $v \in H_a \cap \sigma_R \neq \varnothing$, вытекало бы, что $a(w) < 0$ для всех $w \in [0, v) \smallsetminus [0, v]$. Таким образом, все опорные гиперплоскости любого конуса являются *векторными* подпространствами в V и имеют вид H_α для некоторого *линейного* функционала $\alpha \in V^*$. Будучи замкнутой выпуклой фигурой, каждый конус σ_R является пересечением своих опорных полупространств $H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geqslant 0\}$, по всем таким $\alpha \in V^*$, что $\alpha(w) \geqslant 0$ для всех $w \in \sigma_R$ и $H_\alpha \cap \sigma_R \neq \varnothing$. Поэтому для любого вектора $u \notin \sigma_R$ найдётся такой ковектор $\alpha \in V^*$, что $\alpha(u) < 0$, но $\alpha(w) \geqslant 0$ для всех $w \in \sigma_R$. Это наблюдение известно как *лемма Фаркаша*.

Теорема 11.6 (теорема Фаркаша – Минковского – Вейля)
Подмножество $\sigma \subset V$ тогда и только тогда является выпуклым многогранным конусом, когда оно является пересечением конечного числа векторных полупространств

$$H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geqslant 0\}, \quad \text{где} \quad \alpha \in V^*. \tag{11-10}$$

В частности, каждый выпуклый многогранный конус является выпуклым многогранником.

Доказательство. Пусть подмножество $\sigma \subset V$ является пересечением конечного числа векторных полупространств (11-10). Тогда σ является выпуклым многогранником в $\mathbb{A}(V)$, содержит нуль $0 \in V$, и вместе с каждой точкой $p \neq 0$ содержит весь замкнутый луч $[0, p)$. Пересечение многогранника σ со стандартным единичным кубом $B_1(0) \subset \mathbb{A}(V)$ с центром в нуле является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 11.4 совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин, которые образуют конечное множество $R \subset \sigma$. Так как для каждого $v \in \sigma$ существует такое $\lambda \geqslant 0$, что $\lambda v \in \sigma \cap B_1(0)$ является выпуклой комбинацией векторов из R, сам вектор v является неотрицательной линейной комбинацией векторов из R, т. е. $\sigma = \sigma_R$.

Наоборот, любой многогранный конус $\sigma_R \subset V$, как мы видели, является пересечением опорных полупространств вида (11-10). Для того, чтобы неравенство $\alpha(w) \geqslant 0$ выполнялось для всех $w \in \sigma_R$, достаточно, чтобы оно выполнялось для всех $w \in R$. Поэтому множество всех таких ковекторов $\alpha \in V^*$, что $\sigma_R \subset H_\alpha^+$ представляет собою пересечение конечного числа векторных полупространств $H_w^+ = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(w) \geqslant 0\}$, задаваемых векторами $w \in R$, рассматриваемыми как линейные функционалы на V^*. По уже доказанному, такое пересечение является выпуклым многогранным конусом $\sigma_{R^\vee} \subset V^*$, порождённым конечным множеством ковекторов $R^\vee \subset V^*$. Так как каждый ковектор $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$ является неотрицательной линейной комбинацией ковекторов $\psi \in R^\vee$, все неравенства $\alpha(v) \geqslant 0$, где $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$, следуют из конечного набора неравенств $\psi(v) \geqslant 0$, где $\psi \in R^\vee$, т. е. $\sigma = \bigcap_{\psi \in R^\vee} H_\psi^+$. □

11.4.1. Двойственность. Множество линейных функционалов $\alpha \in V^*$, принимающих неотрицательные значения на выпуклом многогранном конусе $\sigma_R \subset V$, является пересечением конечного числа векторных полупространств $H_w^+ \subset V^*$, задаваемых образующими $w \in R$ конуса σ_R, рассматриваемыми как линейные функционалы на V^*, и по теор. 11.6 представляет собою выпуклый многогранный конус

$$\sigma_R^\vee \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in V^* \mid \forall v \in \sigma_R \; \alpha(v) \geqslant 0\} = \bigcap_{w \in R} H_w^+ \subset V^*,$$

порождённый конечным набором ковекторов, который мы обозначим через $R^\vee \subset V^*$. Конус $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ называется *двойственным* к конусу $\sigma_R \subset V$. По лемме Фаркаша исходный конус

$$\sigma_R = \{v \in V \mid \forall \alpha \in \sigma_{R^\vee} \; \alpha(v) \geqslant 0\} = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} \alpha^+ \subset V$$

двойствен к своему двойственному конусу. Таким образом, для любого выпуклого многогранного конуса σ выполняется равенство $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$.

11.4.2. Грани конусов. Условимся, что помимо собственных граней, высекаемых из конуса его опорными гиперплоскостями H_α, где $\alpha \in V^*$, у каждого конуса $\sigma \subset V$ имеется также и *несобственная* грань $\sigma = H_0 = V \cap \sigma$ размерности $\dim \sigma$, высекаемая нулевым ковектором $0 \in V^*$. Для каждой грани $\Gamma \subset \sigma_R$ обозначим через $\langle \Gamma \rangle \subset V$ её линейную оболочку, через $R_\Gamma = R \cap \Gamma$ — множество лежащих в этой грани образующих конуса, а через $R_\Gamma^\vee = R^\vee \cap \operatorname{Ann}\langle \Gamma \rangle$ — множество аннулирующих грань Γ образующих двойственного конуса.

Предложение 11.3
Каждая грань Γ конуса σ_R является конусом, порождённым множеством $R_\Gamma = R \cap \Gamma$ лежащих в ней образующими конуса σ_R, причём множество R_Γ линейно порождает линейную оболочку $\langle \Gamma \rangle$ грани Γ.

Доказательство. Согласно теор. 11.5 на стр. 142, каждая грань Γ высекается из конуса σ_R векторным подпространством $\operatorname{Ann} R_\Gamma^\vee \subset V$, которое совпадает с линейной оболочкой $\langle \Gamma \rangle$ грани Γ. Поэтому включение $\sigma_{R_\Gamma} \subset \Gamma$ очевидно. Для доказательства обратного включения и последнего утверждения леммы достаточно убедиться, что в представлении произвольного вектора $v \in \Gamma$ в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из R ненулевые коэффициенты могут иметь лишь образующие $w \in R_\Gamma$. Для каждой образующей $w' \in R \smallsetminus R_\Gamma$ найдётся такой функционал $\alpha \in R_\Gamma^\vee$, что $\alpha(w') > 0$. Если бы образующая w' входила в разложение вектора $v \in \Gamma$ с положительным коэффициентом, то значение $\alpha(v)$ было бы строго положительным, а не нулевым, как это должно быть для ковектора $\alpha \in R_\Gamma^\vee \subset \operatorname{Ann}\langle \Gamma \rangle$. □

Упражнение 11.7. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество $I \subset R$ порождает конус, являющийся гранью конуса σ_R.

Следствие 11.6 (двойственность между гранями двойственных конусов)
Для лежащих в n-мерных векторных пространствах двойственных конусов σ_R и $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$ при каждом $k = 0, 1, \dots, \dim \sigma_R$ имеется оборачивающая включения биекция между k-мерными гранями конуса σ_R и $(n-k)$-мерными гранями конуса $\sigma_R^\vee$. Она переводит грань $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$ конуса σ_R в грань $\Gamma^\vee \overset{\text{def}}{=} \sigma_{R_\Gamma^\vee}$, высекаемую из двойственного конуса $\sigma_R^\vee$ аннулятором грани Γ. В частности, одномерные рёбра каждого из конусов являются уравнениями $(n-1)$-мерных граней двойственного конуса и наоборот.

Доказательство. Все образующие $w \in R_\Gamma$ грани $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} \subset \sigma_R$ являются опорными функционалами двойственного конуса $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$. Поэтому подпространство $\operatorname{Ann}\Gamma = \operatorname{Ann}R_\Gamma \subset V^*$ высекает из двойственного конуса $\sigma_R^\vee$ некоторую грань. Обозначим её $\Gamma^\vee$. По предл. 11.3 эта грань представляет собою конус $\sigma_{R_\Gamma^\vee} \subset \sigma_{R^\vee}$, порождённый множеством $R_\Gamma^\vee \subset R^\vee$ всех аннулирующих грань Γ образующих конуса $\sigma_R^\vee$, причём множество $R_\Gamma^\vee$ линейно порождает линейную оболочку $\langle\Gamma^\vee\rangle$ грани $\Gamma^\vee$. Так как $\operatorname{Ann}\Gamma^\vee = \operatorname{Ann}R_\Gamma^\vee$ и $\sigma_R \cap \operatorname{Ann}R_\Gamma^\vee = \Gamma$ по теор. 11.5, отображение $\Gamma \mapsto \Gamma^\vee$ переводит грань $\Gamma^\vee$ в грань $\Gamma^{\vee\vee} = \Gamma$, т. е. инволютивно, а значит, биективно. □

Замечание 11.1. В сл. 11.6 *не предполагается* равенства $\dim\sigma_R = \dim V$. Например, одномерный конус $\sigma_v = \{tv \mid t \geqslant 0\}$ представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении вектора v и имеет две грани — нульмерную грань 0 и одномерную грань, совпадающую с самим этим лучом. Двойственный ему конус $\sigma_v^\vee = H_v^+ \subset V^*$ является векторным полупространством и тоже имеет две грани: n-мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \operatorname{Ann}0 = H_v^+ \cap V^* = H_v^+$ и $(n-1)$-мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \operatorname{Ann}v = H_v$.

Упражнение 11.8. Покажите, что для каждой грани $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$ конуса σ_R выполняется равенство $\sigma_{R_\Gamma} = \sigma \cap -\sigma_{R_\Gamma^\vee}^\vee$, где $-\sigma \overset{\text{def}}{=} \{v \mid -v \in \sigma\}$ обозначает конус, центрально симметричный конусу σ относительно начала координат.

11.5. Проективный и асимптотический конусы выпуклого многогранника. Вложим V в векторное пространство $W = \mathbb{R}\,e_0 \oplus V$ в качестве аффинной гиперплоскости $U = e_0 + V$ и обозначим через $x_0 \in W^*$ базисный ковектор одномерного подпространства $\operatorname{Ann}V \subset W^*$, принимающий на векторе e_0 значение 1. Таким образом, аффинное подпространство $U \subset W$ задаётся уравнением $x_0 = 1$. Векторное пространство аффинных функционалов $a : U \to \mathbb{R}$ естественно отождествляется с пространством W^* линейных функционалов $\xi : W \to \mathbb{R}$ так, что аффинному функционалу $a = a_0 + \alpha$, где $a_0 = a(0) \in \mathbb{R}$ и $\alpha = D_a \in V^*$, который действует на вектор $e_0 v \in U$ по правилу $a(e_0 + v) = a_0 + \alpha(v)$, сопоставляется линейный функционал $\overline{a} : W \to \mathbb{R}$, $\lambda e_0 + v \mapsto \lambda a_0 + \alpha(v)$, который мы будем обозначать через $a_0 x_0 + \alpha$, рассматривая $\alpha \in V^*$ как аннулирующий вектор e_0 линейный функционал на векторном пространстве $W = \mathbb{R}\,e_0 \oplus V$. Каждый выпуклый многогранник $M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \ldots \cap H_{a_m}^+$, задаваемый в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V) = U$ аффинными функционалами $a_i = a_{i0} + \alpha_i$, является пересечением аффинной гиперплоскости $U \subset W$ с выпуклым многогранным конусом $\overline{M} = H_{\overline{a}_1}^+ \cap H_{\overline{a}_2}^+ \cap \ldots \cap H_{\overline{a}_m}^+ \subset W$, который задаётся в векторном пространстве $W = \mathbb{R}\,e_0 \oplus V$ ковекторами $\overline{a}_i = a_{i0}x_0 + \alpha_i \in W^*$. Конус $\overline{M}$ называется *проективным конусом* многогранника M, а его пересечение $M_\infty = \overline{M} \cap V$ с параллельным аффинной гиперплоскости U векторным подпространством $\operatorname{Ann}x_0 = V \subset W$, называется *асимптотическим конусом* или *конусом рецессии* многогранника M, см. рис. 11◇7. Таким образом, проективный конус $\overline{M}$ задаётся однородными неравенствами

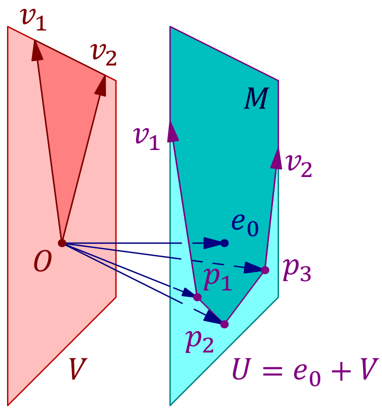

Рис. 11◇7. Конус $\overline{M}$.

$$a_{i0}x_0 + \alpha_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \tag{11-11}$$

на координаты $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ вектора $w = x_0 e_0 + v$ в любом таком базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$ пространства W, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ составляют базис в V. Ограничение неравенств (11-11) на аффинную гиперплоскость $x_0 = 1$ задаёт в ней аффинный многогранник M, а асимптотический конус M_∞ описывается в векторном пространстве $V \subset W$ однородными неравенствами

$$\alpha_i(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0\,,$$

в которые превращаются (11-11) при $x_0 = 0$. Обратите внимание, что асимптотический конус $M_\infty = \sigma^\vee_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ двойствен конусу $\sigma^\vee_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} \subset V^*$, порождённому дифференциалами $\alpha_i = D_{a_i}$ аффинных функционалов a_i, задающих многогранник M. С геометрической точки зрения, проективный конус $\overline{M}$ непустого многогранника M является замыканием объединения всех лучей $[0, w)$, где $w \in M$, а асимптотический конус M_∞ образован пределами $[0, v) = \lim\limits_{t\to+\infty}[0, w_t)$ таких лучей, проходящих через переменную точку $w_t = w + tv \in M$, которая стартует при $t = 0$ из некоторой точки $w \in M$ и уходит при $t \to +\infty$ на бесконечность в направлении вектора $v \in V$, оставаясь всё время внутри M, см. рис. 11⋄8.

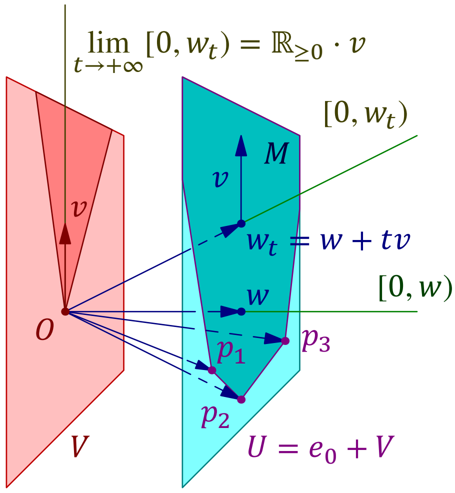

Рис. 11⋄8. Конус M_∞.

Упражнение 11.9. Убедитесь в этом и покажите, что асимптотический конус M_∞ непустого многогранника M состоит из всех векторов $v \in V$, обладающих такими эквивалентными свойствами[1]: (1) для любой точки $p \in M$ точка $p + v$ тоже лежит в M (2) для любой точки $p \in M$ луч $\{p + tv \mid t \geqslant 0\}$ содержится в M (3) в M содержится какой-нибудь луч $[p, q)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{pq} = v$.

Теорема 11.7 (теорема Минковского – Вейля)
Выпуклая оболочка любого конечного набора точек является ограниченным выпуклым многогранником. Наоборот, всякий компактный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного множества точек, а именно — своих вершин.

Доказательство. Последнее утверждение уже было установлено нами в сл. 11.4 на стр. 143. Докажем первое. Вложим $\mathbb{A}(V)$ в векторное пространство $W = \mathbb{R}\, e_0 \oplus V$ в качестве аффинной гиперплоскости $U = e_0 + V$, как было объяснено выше. Выпуклая оболочка любого конечного множества $P \subset U$ ограничена, так как содержится в любом содержащем P кубе в U, и высекается из аффинной гиперплоскости U конусом $\sigma_P \subset W$, поскольку каждая выпуклая барицентрическая комбинация $\sum x_i p_i$ точек $p_i \in P$ лежит в конусе σ_P, и наоборот, для любого ненулевого вектора $w = \sum \lambda_i p_i \in \sigma_P$ пересечение луча $[0, w)$ с аффинной гиперплоскостью U, задаваемой уравнением $x_0 = 1$, происходит в точке $w/x_0(w) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^{-1} \sum \lambda_i p_i$, которая является выпуклой комбинацией точек p_i, поскольку все $\lambda_i \geqslant 0$. По теор. 11.6 конус σ_P является выпуклым многогранником. Поэтому $M = \sigma_P \cap U$ тоже является выпуклым многогранником. □

Теорема 11.8 (разложение Моцкина)
Всякий выпуклый многогранник M раскладывается в сумму

$$M = \operatorname{conv} P + M_\infty = \{p + v \mid p \in \operatorname{conv} P,\ v \in M_\infty\}\,,$$

[1] Направления таких векторов v называют *асимптотическими* или *направлениями рецессии*.

где $P \subset M$ — некоторое конечное подмножество, а $M_\infty = \sigma^\vee_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} \subset V$ — асимптотический конус многогранника M. Иначе говоря, каждый выпуклый многогранник является объединением семейства своих асимптотических конусов, отложенных от точек некоторого компактного выпуклого многогранника (возможно, пустого).

Доказательство. Как и выше, отождествим $\mathbb{A}(V)$ с аффинной гиперплоскостью $U = e + V$ в векторном пространстве $W = \mathbb{R}\,e_0 \oplus V$. По теор. 11.6 на стр. 144 проективный конус $\overline{M} = \sigma_S$ порождается некоторым конечным множеством векторов $S \subset W$. По предл. 11.3 на стр. 145 высекаемая векторным подпространством $V \subset W$ грань $M_\infty = V \cap \overline{M} = \sigma_R$ порождается подмножеством $R = S \cap V$. Умножая не лежащие в R образующие проективного конуса $\overline{M}$ на положительные константы, мы можем и будем считать, что $P \overset{\text{def}}{=} S \smallsetminus R \subset M \subset U$. Тогда $\overline{M} = \sigma_{P\sqcup R} = \{p + r, \mid p \in \sigma_P, r \in \sigma_R\}$. Луч $[0, p + r)$, где $p \in \sigma_P$, $r \in \sigma_R$, пересекает аффинную гиперплоскость U если и только если $p \neq 0$, и в этом случае точка пересечения $(p + r)\,/\,x_0(p + r) = (p + r)\,/\,x_0(p)$ является суммой точки $p\,/\,x_0(p) \in \operatorname{conv} P$ и вектора $r\,/\,x_0(p) \in \sigma_R = M_\infty$. □

Следствие 11.7
Следующие свойства непустого многогранника $M = H^+_{a_1} \cap H^+_{a_2} \cap \ldots \cap H^+_{a_m}$, задаваемого аффинными функционалами $a_i = a_{i0} + \alpha_i$ эквивалентны:

$$M \text{ ограничен} \iff \text{конус } M_\infty = 0 \iff \text{конус } \sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m} = V^*.$$

□

Пример 11.3 (двойственные многогранники)
Многогранники $M \subset U$ и $M^\vee \subset U^\vee$, лежащие в аффинных подпространствах $U = e_0 + V$ и $U^\vee = x_0 + V^*$ двойственных векторных пространств $W = \mathbb{R}\,e_0 \oplus V$ и $W^* = \mathbb{R}\,x_0 \oplus V^*$, которые спариваются по правилу $\langle\, \mu x_0 + \alpha\,,\, \lambda e_0 + v \,\rangle = \lambda\mu + \alpha(v)$, называются *двойственными* относительно точек $e_0 \in U$ и $x_0 \in U^\vee$, если они имеют двойственные проективные конусы $\overline{M}^\vee = \overline{M^\vee}$.

Если точка e_0 внутренняя для многогранника $M = H^+_{a_1} \cap H^+_{a_2} \cap \ldots \cap H^+_{a_m}$, то все задающие M аффинные функционалы $a_i = a_{i0} + \alpha_i$ имеют $a_{i0} = a_i(e) > 0$. Умножив каждый функционал a_i на подходящую положительную константу[1], мы можем считать, что его свободный член $a_{i0} = 1$. Таким образом, при $e_0 \in \operatorname{int} M$ проективный конус $\overline{M}$ многогранника M является пересечением векторных полупространств $H^\pm_{\overline{a}_i} \subset W$, задаваемых ковекторами $\overline{a}_i = x_0 + \alpha_i$, где $\alpha_i = D_{a_i} \in V^*$, а двойственный ему конус $\overline{M}^\vee = \overline{M^\vee} = \sigma_{\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_m}$ этими ковекторами порождается и пересекает аффинную гиперплоскость $U^\vee = x_0 + V^*$ по выпуклой оболочке точек $x_0 + \alpha_i$. В частности, если $e_0 \in \operatorname{int} M$, то двойственный многогранник $M^\vee$ компактен.

Например, *стандартный куб* $B_1(0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall\, i\ |x_i| \leqslant 1\}$ в $\mathbb{R}^n$ задаётся неравенствами $1 + x_i \geqslant 0$ и $1 - x_i \geqslant 0$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Двойственный к нему относительно нулей в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n*}$ многогранник представляет собою выпуклую оболочку стандартных базисных векторов $\pm e_i^* \in \mathbb{R}^{n*}$ и называется *стандартным кокубом*.

[1] Это не поменяет ни полупространства H^+_a, ни многогранника M.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. II.1. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$(\mu+\nu)^{-1}(\mu p+\nu q)=(\mu+\nu)^{-1}\Big(\sum_i \mu_i p_i+\sum_j \mu_j q_j\Big).$$

Второе — выкладкой

$$\sum_{i=1}^m y_i p_i=\sum_{i=1}^m y_i\sum_{j=1}^{k_j} x_{ij}q_{ij}=\sum_{ij} z_{ij}q_{ij},$$

где $z_{ij}=y_i x_{ij}$ и

$$\sum_{ij} z_{ij}=\sum_{i=1}^m y_i\sum_{j=1}^{k_j} x_{ij}=\sum_{i=1}^m y_i=1.$$

Упр. II.7. Четырёхгранный конус в $\mathbb{R}^3$, порождённый векторами

$$v_1=e_1+e_2+e_3,\quad v_2=e_1+e_2-e_3,\quad v_3=e_1-e_2-e_3,\quad v_4=e_1-e_2+e_3,$$

не имеет двумерной грани, порождённой векторами v_1 и v_3.

Упр. II.8. Конус $-\sigma^\vee_{R^\vee_\Gamma}=\{v\in V\mid\forall\psi\in\sigma_{R^\vee_\Gamma}\ \langle\,\psi\,,\,v\,\rangle\leqslant 0\}$. Для любых $v\in\sigma_R$ и $\psi\in\sigma^\vee_R$ неравенство $\langle\,\psi\,,\,v\,\rangle\leqslant 0$ равносильно равенству $\langle\,\psi\,,\,v\,\rangle=0$. Поэтому $\sigma\cap-\sigma^\vee_{R^\vee_\Gamma}=\sigma\cap H_\Gamma=\Gamma$.

Упр. II.9. Если $w=e_0+v\in M$, то $\overline{a}_i(w)=a_i(e_0)+\alpha_i(v)\geqslant 0$ при всех i, поэтому $w\in\overline{M}$, а с ним и $[0,w)\subset\overline{M}$. Наоборот, если $w=\lambda e_0 v\in\overline{M}$, то при $\lambda\neq 0$ из неравенств $\overline{a}_i(w)=\lambda a_i(e_0)+\alpha_i(v)\geqslant 0$ вытекает, что точка $[0,w)\cap U_\xi=\lambda^{-1}w=e_0+\lambda^{-1}v\in M$, а при $\lambda=0$ луч $[0,v)\subset V$ является пределом при $s\to+\infty$ пересекающих многогранник M лучей $[0,w_s)$, где $w_s=w+sv$, поскольку при всех $s\geqslant 0$ точка $w_s=w+sv\in M$, коль скоро $w\in M$ и $\alpha_i(v)\geqslant 0$ при всех i, а луч $[0,w_s]$ имеет при каждом $s>0$ ненулевой направляющий вектор $v_s=s^{-1}w+v$, стремящийся к v при $s\to\infty$. Для доказательства эквивалентности свойств (1) – (3) заметим, что если $\alpha_i(v)<0$ хотя бы для одного функционала α_i, то для всех $p\in\mathbb{A}(V)$ при всех $\lambda\gg 0$ выполняется неравенство $a_i(p+\lambda v)=a_i(p)+\lambda\alpha_i(v)<0$, и ни одно из свойств (1) – (3) не имеет места. Напротив, если $\alpha_i(v)\geqslant 0$ для всех i, то для любой точки $p\in M$ при всех $\lambda\geqslant 0$ выполняются неравенства $a_i(p+\lambda v)=a_i(p)+\lambda\alpha_i(v)\geqslant a_i(p)\geqslant 0$, а с ними и каждое из свойств (1) – (3).