§4. Проективные пространства

4.1. Проективизация. С каждым $(n+1)$-мерным векторным пространством V над произвольным полем $\Bbbk$ помимо $(n+1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ связано n-мерное *проективное пространство* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точками которого по определению являются одномерные векторные подпространства в V или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы наблюдать их как «обычные точки», внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость. Каждая такая гиперплоскость однозначно задаётся неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^*$ — ненулевая линейная форма на V (см. рис. 4◇1), и называется *аффинной картой* U_ξ на $\mathbb{P}(V)$.

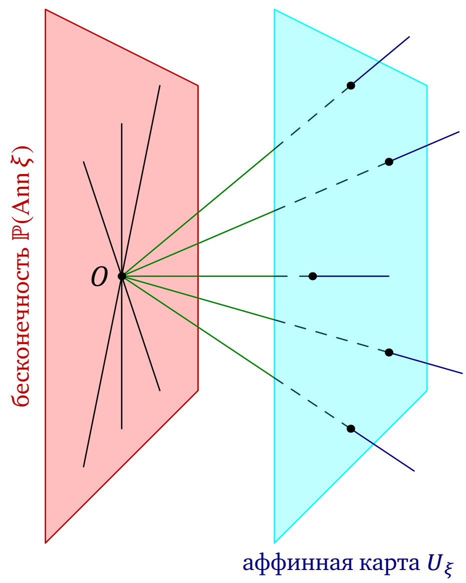

Рис. 4◇1. Проективный мир.

Упражнение 4.1. Убедитесь, что сопоставление

$$\xi \mapsto U_\xi$$

задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порождённые векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $\mathbb{P}_n \smallsetminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств, лежащих в параллельном экрану U_ξ векторном подпространстве $\mathrm{Ann}\,\xi \subset V$ размерности n. Таким образом, невидимые в карте U_ξ точки n-мерного проективного проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образуют $(n-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi)$. Оно называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ. Точки $\mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi)$ можно воспринимать как *направления* в аффинной карте U_ξ.

Из сказанного вытекает, что n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n$ разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств всех размерностей от 0 до n:

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \cdots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0,$$

где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ это одна точка.

Упражнение 4.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек в левой и правой части этого равенства над конечным полем из q элементов?

4.1.1. Глобальные однородные координаты. Зафиксируем в V координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ относительно какого-нибудь базиса $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Два ненулевых вектора

$$v = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$$

задают одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}_n$если и только если их координаты пропорциональны. Последнее равносильно равенству отношений[1] $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant n$.

[1]При этом равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$, в которых x и y либо одновременно отличны от нуля, либо одновременно нулевые, тоже допускаются и считаются истинными.

Иначе говоря, с точкой $p \in \mathbb{P}_n$ взаимно однозначно связаны не координаты ненулевого вектора, задающего эту точку, а только отношения $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки p в базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$.

4.1.2. Локальные аффинные координаты. Любой набор ковекторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in V^*$, дополняющий ковектор ξ до базиса в V^*, задаёт в аффинной карте U_ξ аффинную систему координат с началом в точке e_0 и базисными векторами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $e_0, e_1, \ldots, e_n$ это двойственный к ξ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ базис пространства V.

Упражнение 4.3. Убедитесь, что $e_0 \in U_\xi$, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ составляют базис в $\mathrm{Ann}\,\xi$.

Каждое наблюдаемое в карте U_ξ одномерное подпространство, порождённое ненулевым вектором $v \in V$, изображается в нём точкой $v/\xi(v) \in U_\xi$ с аффинными координатами

$$t_i = \xi_i\big(v/\xi(v)\big) = \xi_i(v)/\xi(v), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Обратите внимание, что локальные аффинные координаты точки $v \in \mathbb{P}(V)$ являются не линейными, а дробно линейными функциями от глобальных однородных координат этой точки.

Пример 4.1 (проективная прямая)
Проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\Bbbk) = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ целиком покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, которые представляют собою прямые $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$ в аффинном пространстве $\Bbbk^2$, см. рис. 4◇2.

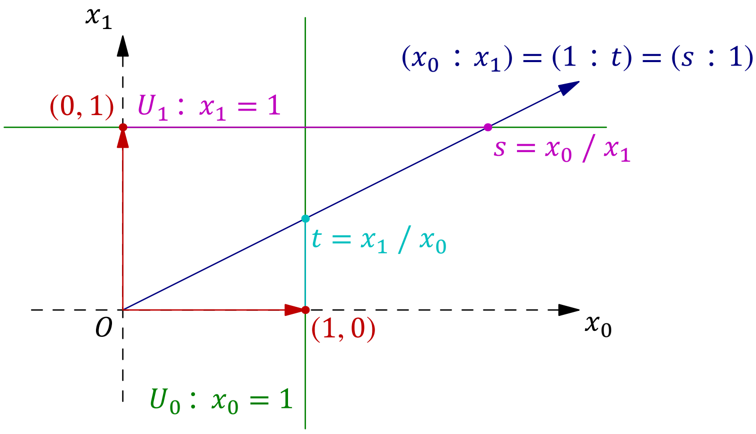

Рис. 4◇2. Стандартные карты на $\mathbb{P}_1$.

В карте U_0 видны все одномерные подпространства в $\Bbbk^2$ кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой этой карты. В качестве локальной аффинной координаты на U_0 годится функция $t = x_1/x_0$. В карте U_1 видны все точки $(x_0 : x_1) = \left(\frac{x_0}{x_1} : 1\right)$, у которых $x_1 \neq 0$, и в качестве локальной аффинной координаты в этой карте можно взять функцию $t = x_0/x_1$. Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты s и t одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$, видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $t = 1/s$.

Упражнение 4.4. Убедитесь в этом.

Таким образом, проективная прямая $\mathbb{P}_1(\Bbbk)$ является результатом склейки двух аффинных прямых $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$ с координатами s и t вдоль дополнения до начал координат по правилу: точка с координатой s на первой прямой отождествляется с точкой с координатой $t = 1/s$ на второй.

Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, результат такой склейки можно представлять себе как окружность диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных прямых, каждая из которых проектируется на окружность из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания, см. рис. 4◇3.

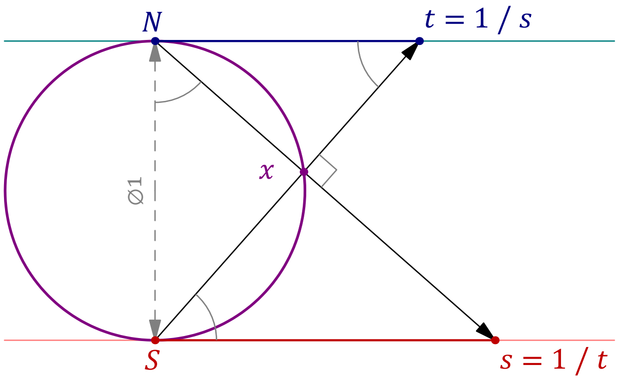

Рис. 4◇3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.

Из подобия прямоугольных треугольников NSs и tNS на рис. 4◇3 вытекает, что точка с координатой s на верхней касательной и точка с координатой t на нижней проектируются в одну и ту же точку x окружности если и только если $t = 1/s$. Получаемое таким образом отождествление «пополненной числовой прямой» $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \sqcup \infty$ с окружностью хорошо согласуется с принятыми в вещественном анализе представлениями о бесконечности: уходу координаты t на бесконечность по верхней числовой прямой отвечает стремление к нулю координаты $s = 1/t$ на нижней, и сжимающиеся ε-окрестности точки S на окружности выглядят на верхней числовой прямой как дополнения до неограниченно увеличивающихся отрезков $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$, используемые в анализе как «окрестности бесконечности».

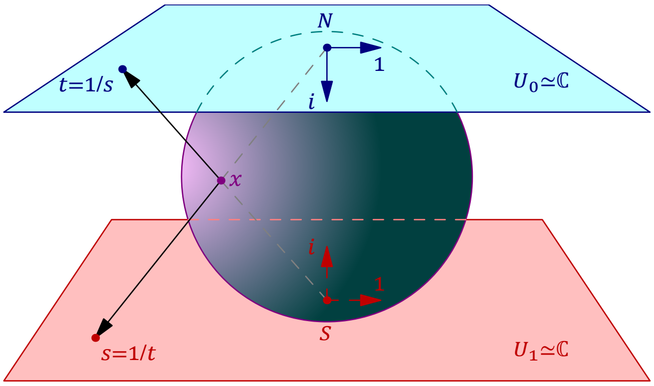

Рис. 4◇4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

При $\Bbbk = \mathbb{C}$ результат склейки двух аффинных прямых $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ вдоль дополнений до нуля по правилу $t \leftrightarrow 1/t$ можно воспринимать как сферу диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных плоскостей, каждая из которых стереографически проектируется на сферу из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания со сферой, см. рис. 4◇4. Если за начала отсчёта в каждой из плоскостей принять точку касания, а векторы

$1, i \in \mathbb{C}$ направить так[1], как на рис. 4◇4, то комплексные числа s и t из разных плоскостей проектируются в одну и ту же точку P сферы если и только если[2] $\operatorname{Arg} s = -\operatorname{Arg} t$ и $|s| = 1/|t|$, т. е. когда $s = 1/t$ в $\mathbb{C}$. По этой причине комплексную проективную прямую $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ часто называют *сферой Римана*, а также *пополненной комплексной плоскостью*.

Пример 4.2 (вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$)
Как топологическое пространство, вещественная проективная плоскость допускает следующее наглядное описание. Каждая проходящая через начало координат прямая в $\mathbb{R}^3$ пересекает единичную замкнутую полусферу $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_0 \geqslant 0$. При этом любая не лежащая в плоскости $x_0 = 0$ прямая пересекает полусферу ровно в одной внутренней точке, а каждая прямая из плоскости $x_0 = 0$ — в двух диаметрально противоположных точках границы. Таким образом, топологическое пространство $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ гомеоморфно[3] полусфере, у которой склеены диаметрально противоположные точки границы. Поскольку полусфера гомеоморфна квадрату, то же пространство получится при склейке противоположных сторон квадрата с обращением их ориентации, как на рис. 4◇5.

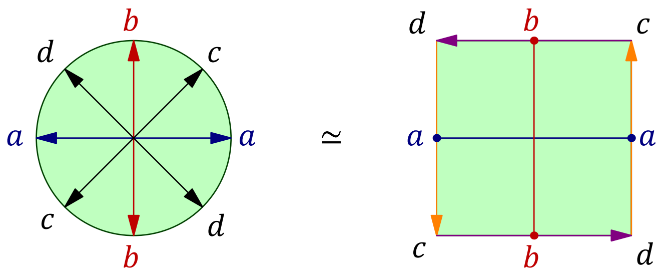

Рис. 4◇5. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это квадрат со склеенными противоположными точками границы.

Результат такой склейки иначе можно описать как лету Мёбиуса, к граничной окружности которой приклеен — по своей граничной окружности — диск, см. рис. 4◇6.

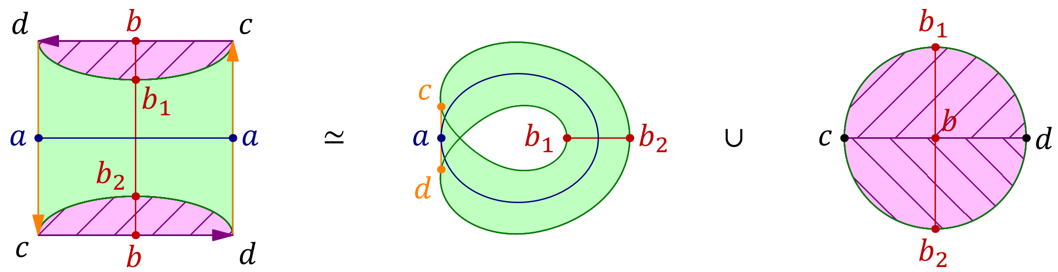

Рис. 4◇6. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей.

[1] Обратите внимание, что ориентации плоскостей при этом согласованы в том смысле, что одну из них можно непрерывным перекатыванием по поверхности сферы совместить с другой так, что ориентации будут одинаковыми.

[2] Первое очевидно из рис. 4◇4, второе — из рассмотрения сечения сферы плоскостью NxS, которое изображено на рис. 4◇3 выше.

[3] Биективное отображение между топологическими пространствами называется *гомеоморфизмом*, если и оно, и обратное к нему отображения оба непрерывны.

Обратите внимание, что красный вертикальный и синий горизонтальный отрезки квадрата превращаются при склейке в две петли[1] на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, которые пересекаются по одной точке, причём при малых шевелениях этих петель они по-прежнему будут пересекаться в одной точке. Это означает, что ни одну из них нельзя стянуть в точку непрерывной деформацией внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Упражнение 4.5. Убедитесь, что устойчивое к малым шевелениям количество точек пересечения непрерывно стягиваемой в точку петли с любой другой петлёй чётно.

При этом, если петлю a, т. е. экватор ленты Мёбиуса, пройти в одном направлении дважды, то возникающая таким образом «удвоенная петля» непрерывно деформируется в границу ленты Мёбиуса, а значит, может быть стянута внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ в точку по приклеенному к границе ленты Мёбиуса диску. Таким образом, на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ есть нестягиваемая петля, двойной обход которой стягиваем.

Пример 4.3 (вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$)
Каждая собственная линейная изометрия трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ является поворотом вокруг некоторой прямой. Изобразим поворот вокруг прямой с направляющим вектором e единичной длины на угол $\varphi \in [0, \pi]$, если смотреть вдоль вектора e, точкой[2] $\varphi \cdot e \in \mathbb{R}^3$. В результате все повороты на углы, меньшие π, изобразятся внутренними точками шара радиуса π с центром в нуле. Диаметрально противоположным точкам ограничивающей этот шар сферы отвечает одна и та же изометрия — поворот на угол π вокруг соединяющей эти точки прямой[3]. Таким образом собственная ортогональная группа $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ гомеоморфна трёхмерному шару со склеенными диаметрально противоположными точками ограничивающей этот шар сферы. С другой стороны, конструкция из предыдущего прим. 4.2, применённая к пространству $\mathbb{R}^4$, показывает, что вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ допускает точно такое же описание: каждая проходящая через начало координат прямая в $\mathbb{R}^4$ пересекает единичную замкнутую полусферу

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\,, \quad x_0 \geqslant 0\,,$$

и все не лежащие в гиперплоскости $x_0 = 0$ прямые пересекают её в единственной внутренней точке, а прямые из гиперплоскости $x_0 = 0$ — по двум диаметрально противоположным точкам граничной трёхмерной сферы $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$. Остаётся заметить, что полусфера в $\mathbb{R}^4$ гомеоморфна шару в $\mathbb{R}^3$.

Упражнение 4.6. Убедитесь, что семейство вращений вокруг фиксированной оси в фиксированном направлении на непрерывно меняющийся от 0 до 2π угол образует в пространстве $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ нестягиваемую петлю, двойной обход которой стягиваем.

Пример 4.4 (стандартные аффинные карты на $\mathbb{P}_n$)
Набор из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $x_\nu = 1$, называется *стандартным аффинным покрытием* проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$. Для каждого $\nu = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на карте U_ν берутся n линейных форм $t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = x_i \,/\, x_\nu$, где $0 \leqslant i \leqslant n$ и $i \neq \nu$. Таким образом, пространство $\mathbb{P}_n$

[1] Т. е. в замкнутые кривые, являющиеся непрерывными образами окружности.

[2] Т. е. концом вектора длины $\varphi \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$, отложенного в направлении единичного вектора e.

[3] Он виден как поворот на угол π независимо от того направления на оси, вдоль которого Вы его наблюдаете.

можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ описывается как множество всех таких $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на картах U_μ и U_ν это множество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$ если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1 / t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)} / t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

Пример 4.5 (аффинные коники)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C, заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$. В стандартной карте U_1, где $x_1 = 1$, в локальных координатах $t_0 = x_0 / x_1$ и $t_2 = x_2 / x_1$ это уравнение превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_0^2 = 1$. В стандартной карте U_2, где $x_2 = 1$, в локальных координатах $t_0 = x_0 / x_2$, $t_1 = x_1 / x_2$ — в уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. В нестандартной карте $U_{x_1+x_2}$, где $x_1 + x_2 = 1$, в локальных координатах $t = x_0/(x_1+x_2)$ и $s = (x_2-x_1)/(x_2+x_1)$ после переноса x_1^2 из левой части направо и деления обеих частей на $x_2 + x_1$ наше однородное уравнение превратится в уравнение параболы $t^2 = u$. Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ в различных аффинных картах. Вид кривой C в карте $U_\xi \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая $\xi(x) = 0$ этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C, касается C и пересекается с C в двух различных точках, см. рис. 4◇7.

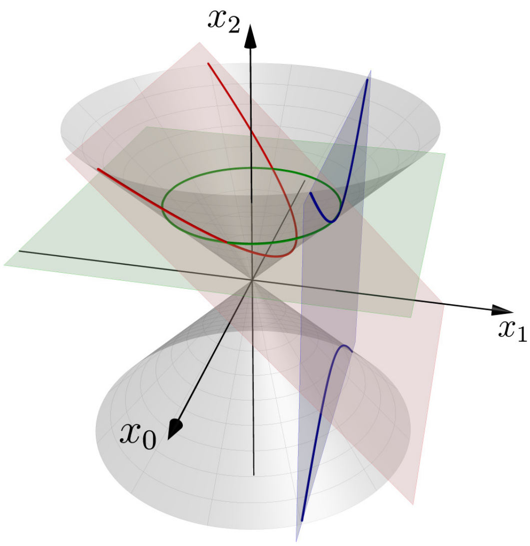

Рис. 4◇7. Аффинные изображения проективной коники.

4.2. Проективные подпространства. Проективизации $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ векторных подпространств $U \subset V$ называются *проективными подпространствами* в $\mathbb{P}(V)$. Через любые две различные точки $a, b \in \mathbb{P}(V)$ проходит единственная проективная прямая (ab). Она является проективизацией линейной оболочки непропорциональных векторов a, b и состоит из всевозможных ненулевых линейных комбинаций $\lambda a + \mu b$, рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов в разложения вектора $v = \lambda a + \mu b \in (ab)$ можно использовать в качестве внутренней однородной координаты точки v на проективной прямой (ab).

Упражнение 4.7. Убедитесь, что k-мерное проективное подпространство наблюдается в любой задевающей его аффинной карте как k-мерное аффинное подпространство.

Предложение 4.1

Для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство

$$\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n\,.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $L = \mathbb{P}(U)$, $\mathbb{P}(W)$, где $U, W \subset V$ — векторные подпространства. Тогда $K \cap L = \mathbb{P}(U \cap W)$ имеет размерность $\dim K \cap L = \dim(U \cap W) - 1 \geqslant \dim U + \dim W - \dim V - 1 = \dim K + 1 + \dim L + 1 - (n+1) - 1 = \dim K + \dim L - n$. □

Упражнение 4.8. Убедитесь, что любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются.

4.2.1. Проективная двойственность. Проективизации $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$ двойственных друг другу векторных пространств V и V^* называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: соотношение $\varphi(v) = 0$ на вектор $v \in V$ ковектор $\varphi \in V^*$ линейно как по v, так и по φ, и задаёт при фиксированном $\varphi \in \mathbb{P}_n^\times$ гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в $\mathbb{P}_n^\times$, состоящую из всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$. Так как две линейные формы задают одну и ту же гиперплоскость в векторном пространстве если и только если они пропорциональны, гиперплоскости в проективном пространстве биективно соответствуют точкам двойственного проективного пространства.

Напомню[1], что между векторными подпространствами дополнительных размерностей в V и V^* имеется каноническая биекция $U \leftrightarrows \operatorname{Ann}(U)$. На языке проективной геометрии это означает, что множество гиперплоскостей, содержащих заданное m-мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$, является проективным подпространством $K^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\operatorname{Ann} U) \subset \mathbb{P}_n^\times$ размерности $n - m - 1$, и при каждом $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ соответствие $K \leftrightarrows K^\times$ между m-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n - m - 1)$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$ взаимно однозначно и оборачивает включения. Это соответствие называется *проективной двойственностью*. Оно позволяет переговаривать геометрические утверждения в эквивалентные двойственные геометрические утверждения, подчас довольно сильно отличающиеся от исходных.

Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

Поскольку биекция $U \leftrightarrows \operatorname{Ann}(U)$ переводит пересечения векторных пространств в суммы и наоборот, соответствие $K \leftrightarrows K^\times$ переводит пересечение $K \cap L$ проективных подпространств в *линейное соединение*[2] $J(K^\times, L^\times)$ — объединение всех проективных прямых[3] $(\varphi\psi)$ с $\varphi \in K^\times$, $\psi \in L^\times$. Наоборот, линейное соединение $J(K, L)$ двойственно пересечению $K^\times \cap L^\times$.

Упражнение 4.9. Убедитесь, что $\mathbb{P}(U + W) = J\big(\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)\big)$ в $\mathbb{P}(V)$ для любых ненулевых векторных подпространств $U, W \subset V$.

4.2.2. Дополнительные подпространства и проекции. Подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если

$$K \cap L = \varnothing \quad \text{и} \quad \dim K + \dim L = n - 1\,.$$

Например, любые две непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ дополнительны. На языке линейной алгебры дополнительность проективных подпространств означает, что подлежащие им векторные подпространства $U, W \subset V$ трансверсальны, т. е. $U \cap V = \{0\}$, и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n+1) = \dim V\,,$$

[1] См. n° 6.1 на стр. 67.

[2] Обозначение J является сокращением от английского *join*.

[3] Здесь и далее удобно считать, что «прямая» (aa) это одна точка a.

откуда $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$. Если вектор v не лежит ни в U, ни в W, обе компоненты этого разложения отличны от нуля. Это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная проходящая через p прямая ℓ, пересекающая как K, так и L.

Упражнение 4.10. Убедитесь в этом.

Всякая пара дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ задаёт *проекцию из K на L*

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \smallsetminus K) \to L\,, \tag{4-1}$$

которая тождественно действует на L и переводит каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \smallsetminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения подпространства L с той единственной прямой, которая проходит через точку p и пересекает оба подпространства K и L. На языке линейной алгебры, проекция переводит каждый вектор $v = u + w$ с ненулевой компонентой $w \in W$ в эту компоненту. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ \dots\ : x_n)$, согласованных с разложением $V = U \oplus W$ так, что начальный кусок $(x_0 : x_1 : \ \dots\ : x_m)$ является координатами в K, а остаток $(x_{m+1} : x_{m+2} : \ \dots\ : x_n)$ — координатами в L, проекция π_L^K просто удаляет первые $(m+1)$ координат x_ν с $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

4.3. Квадрики. Одномерные изотропные подпространства ненулевой квадратичной формы q на векторном пространстве V образуют в $\mathbb{P}(V)$ геометрическую фигуру, которая называется *проективной квадрикой* и обозначается $V(q)$. Квадрика $V(q)$ называется *гладкой* (а также *невырожденной* или *неособой*), если квадратичная форма q невырождена[1]. В противном случае квадрика называется *особой* или *вырожденной*.

Пример 4.6 (квадрики на $\mathbb{P}_1$, геометрическая переформулировка прим. 2.1 на стр. 20)
Если $\dim V = 2$, уравнение $q(x) = 0$ в ортогональном базисе формы q преобразуется либо к виду $x_0^2 = 0$, либо к виду $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$, где $\alpha \neq 0$. В первом случае форма q вырождена, а квадрика $V(q)$ состоит из единственной точки $p = (0 : 1)$, представляющей одномерное ядро формы q. Гладкая квадрика $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух различных точек. Первое равносильно тому, что $-\alpha$ не является квадратом в $\Bbbk$, и над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ такого не бывает. Если же $-\alpha = \delta^2$, то форма $x_0^2 + \alpha x_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ зануляется ровно в двух различных точках $(\pm\delta : 1) \in \mathbb{P}_1$. Различить эти случаи можно при помощи определителя Грама формы q в произвольном базисе пространства V. В первом случае он нулевой, а в двух оставшихся сравним по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$ с коэффициентом α. Таким образом, квадрика $V(q)$ состоит из двух различных точек, пуста или является двойной точкой, когда её дискриминант[2] $D/4 = -\det q$ является, соответственно, ненулевым квадратом, ненулевым не квадратом или обращается в нуль.

Следствие 4.1
Квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ может пересекать прямую $\ell \subset \mathbb{P}_n$ ровно одним из следующих четырёх способов: либо $\ell \subset Q$, либо $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, либо $\ell \cap Q$ это две различные точки, либо $\ell \cap Q = \varnothing$, причём над алгебраически замкнутым полем последний случай невозможен. □

4.3.1. Касательные прямые и касательное пространство. Прямая, проходящая через точку p квадрики Q, называется *касательной* к Q в точке p, если она лежит на квадрике Q или пересекает Q по двойной точке p. Объединение всех прямых, касающихся квадрики Q в точке p, обозначается T_pQ и называется *касательным пространством* к Q в точке $p \in Q$.

[1] Т. е. её поляризация $\widetilde{q} : V \times V \to \Bbbk$ удовлетворяет условиям предл. 1.1 на стр. 6.
[2] См. прим. 2.1 на стр. 20.

Таким образом, прямая (ab) является касательной к квадрике $Q = V(q)$ если и только если ограничение квадратичной формы q на линейную оболочку векторов a, b вырождено, т. е.

$$\det\begin{pmatrix} q(a) & \widetilde{q}(a,b) \\ \widetilde{q}(a,b) & q(b)\end{pmatrix} = 0\,, \tag{4-2}$$

где $\widetilde{q}: V\times V \to \Bbbk$ это поляризация[1] формы q. Если $a \in Q$, равенство (4-2) равносильно ортогональности точек a и b:

$$b \in T_aQ \iff \widetilde{q}(a,b) = 0\,. \tag{4-3}$$

Если $b \notin Q$, то ограничение формы q на одномерное подпространство $b \subset V$ невырождено и $V = b \oplus b^\perp$. Формула (4-3) утверждает, что видимый из точки $b \notin Q$ контур квадрики Q, т. е. ГМТ пересечения с квадрикой Q всевозможных касательных, опущенных на неё из точки b, высекается из квадрики Q не проходящей через точку b гиперплоскостью

$$\mathbb{P}(b^\perp) = \{x \mid \widetilde{q}(x,b) = 0\}\,, \tag{4-4}$$

которая называется *полярой* точки b относительно квадрики Q. Из формулы (4-3) также следует, что касательное пространство

$$T_aQ = \mathbb{P}(a^\perp) = \{x \mid \widetilde{q}(x,b) = 0\} \tag{4-5}$$

либо является гиперплоскостью в $\mathbb{P}(V)$, либо совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$. В первом случае точка $a \in Q$ называется *гладкой* или *неособой*, а во втором — *особой*. Особость означает, что $\widetilde{q}(v,a) = 0$ для всех $v \in V$, т. е. что a лежит в ядре корреляции[2] $\widehat{q}: V \to V^*$, переводящей вектор $v \in V$ в линейную форму $w \mapsto \widetilde{q}(w,v)$ на пространстве V. Все ненулевые векторы из $\ker\widehat{q}$ изотропны и являются особыми точками квадрики Q. Проективное подпространство

$$\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker\widehat{q}) \subset Q$$

называется *пространством особых точек* или *вершинным пространством* квадрики Q.

Теорема 4.1

Пересечение особой квадрики Q с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ является гладкой (возможно пустой) квадрикой $Q' = L\cap Q$ в подпространстве L, и исходная квадрика Q является линейным соединением[3] Q' и $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Невырожденность ограничения формы q на подпространство L была доказана в предл. 1.5 на стр. 13. Каждая пересекающая $\operatorname{Sing} Q$ прямая, будучи касательной к квадрике Q, либо целиком лежит на квадрике Q, либо пересекает Q ровно в одной точке — точке своего пересечения с $\operatorname{Sing} Q$. Поэтому каждая прямая (a,b) с $a \in \operatorname{Sing} Q$, $b \in Q'$ целиком лежит на Q, т. е. $J(Q', \operatorname{Sing} Q) \subset Q$. По упр. 4.10 каждая не лежащая в L гладкая точка $c \in Q$ лежит на некоторой прямой, пересекающей и L, и $\operatorname{Sing} Q$. Поскольку эта прямая пересекает Q в точке $c \notin \operatorname{Sing} Q$, она целиком лежит на квадрике, а значит, пересекает L в точке, лежащей на квадрике Q'. Поэтому $Q \subset J(Q', \operatorname{Sing} Q)$. □

Упражнение 4.11. Покажите, что квадрика, имеющая хоть одну гладкую точку, не содержится в гиперплоскости.

[1] См. n° 2.3 на стр. 18.

[2] См. n° 1.2.2 на стр. 5.

[3] Т. е. объединением всех прямых вида (ab) с $a \in Q'$ и $b \in \operatorname{Sing} Q$, ср. с упр. 4.9 на стр. 41.

4.3.2. Коники. Квадрики на плоскости называются *кониками*. Примером гладкой коники является кривая из прим. 4.5. Вырожденная коника задаётся квадратичной формой q ранга 1 или 2. В первом случае q является квадратом линейной формы, поскольку в ортогональном базисе записывается в виде $q(x_0, x_1, x_2) = x_0^2$. Соответствующая коника $C = V(q)$ называется *двойной прямой*. Она выглядит как прямая $x_0 = 0$ и совпадает с $\operatorname{Sing} C$. В свете теор. 4.1 коника C является линейным соединением прямой $\operatorname{Sing} C$ и пустой квадрики[1]. Если $\operatorname{rk} q = 2$, пространство $\operatorname{Sing} q$ является точкой — проективизацией одномерного ядра формы Q. По теор. 4.1 пересечение такой коники C с любой не проходящей через особую точку прямой является гладкой квадрикой на этой прямой и, как мы видели прим. 4.6, либо пусто, либо состоит из двух разных точек, причём первый случай над алгебраически замкнутым полем невозможен. В первом случае коника C называется *двойной точкой* и совпадает со своей особой точкой. Например, над полем $\mathbb{R}$ уравнение $x_0^2 + x_1^2 = 0$ задаёт двойную точку $(0 : 0 : 1)$. Во втором случае коника C является объединением двух различных прямых, пересекающихся в её особой точке, и называется *распавшейся*. В ортогональном базисе уравнение коники ранга 2 приводится к тому же самому виду $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$, что и в прим. 4.6. Точка $(0 : 0 : 1)$ является особой, ограничение формы на дополнительную к ядру прямую $x_2 = 0$ анизотропно если $-\alpha$ не квадрат, и гиперболично если $-\alpha$ является квадратом. Во втором случае форма разлагается в произведение двух линейных множителей, задающих две прямые, на которые распадается коника C.

Невырожденная квадратичная форма q на трёхмерном пространстве либо анизотропна, либо является прямой ортогональной суммой двумерной гиперболической и одномерной анизотропной форм. В первом случае $V(q) = \varnothing$. Над полем $\mathbb{R}$ такая коника задаётся уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\,.$$

Над алгебраически замкнутым полем таких коник не бывает. Во втором случае квадратичная форма в подходящих координатах записывается уравнением

$$x_1^2 = x_0 x_2\,. \tag{4-6}$$

Поскольку любые значения $x_0 = t_0$, $x_1 = t_1$ однозначно дополняются до тройки

$$(t_0 : t_1 : t_1^2/t_0) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)\,,$$

удовлетворяющей уравнению (4-6), коника (4-7) является образом вложения

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2\,, \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)\,. \tag{4-7}$$

Когда точка $(t_0 : t_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1$, точка $(x_0 : x_1 : x_2) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$ ровно по одному разу пробегает все изотропные подпространства квадратичной формы $x_1^2 - x_0 x_2$.

Итак, над любым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ имеется единственная с точностью до линейной замены координат непустая невырожденная коника. В подходящих координатах она задаётся уравнением (4-6) и допускает рациональную параметризацию (4-7).

[1] Дополнительным подпространством к прямой на плоскости является точка — проективизация какого-нибудь одномерного подпространства в V, а невырожденная форма на одномерном пространстве автоматически анизотропна.

Пример 4.7 (проекция коники на прямую)
Получить рациональную параметризацию непустой невырожденной коники $C = V(q)$ можно без приведения её уравнения к виду $x_1^2 = x_0x_2$, если явно известна хотя бы одна точка $p \in C$. Для этого надо спроектировать из точки p на конику C любую не проходящую через p прямую ℓ, как на рис. 4◇8. По сл. 4.1, каждая не касающаяся коники C в точке p прямая (pr) с $r \in \ell$ пересекает конику C ещё ровно в одной, отличной от p точке $x = x(r) \in C$. Для точки $r = T_pC \cap \ell$ положим $x(r) = p$. Полученную биекцию легко описать явными формулами. Если $r \in \ell \cap C$, то $x(r) = r$. Если точка r анизотропна, то отражение[1] изотропного вектора p в гиперплоскости $r^\perp$

$$\sigma_r(p) = p - 2\frac{\widetilde{q}(p,r)}{\widetilde{q}(r,r)}r \tag{4-8}$$

тоже является изотропным вектором и лежит на прямой (pr). Эта точка совпадает с точкой p если и только если $p \in r^\perp$, т. е. когда прямая (rp) касается[2] коники C в точке p. Таким образом, формула (4-8) задаёт биекцию между точками $r \in \ell \smallsetminus C$ и точками $x \in C \smallsetminus \ell$. Соответствующие друг другу точки связаны соотношением

$$q(r) \cdot (p - x) = 2\widetilde{q}(p,r) \cdot r\,. \tag{4-9}$$

Если выбрать на прямой ℓ базис a, b и использовать p, a, b в качестве базиса на $\mathbb{P}_2$, то однородные координаты $(x_p : x_a : x_b)$ точки $x \in C$, удовлетворяющей (4-9), и однородные координаты $(t_a : t_b)$ точки $r = t_aa + t_bb \in \ell$ выразятся друг через друга так:

$$\begin{gathered}(x_p : x_a : x_b) = \big(q(t_aa+t_bb) : -2t_a\widetilde{q}(p, t_aa+t_bb) : -2t_b\widetilde{q}(p, t_aa+t_bb)\big)\\ (t_a : t_b) = (x_a : x_b)\,.\end{gathered} \tag{4-10}$$

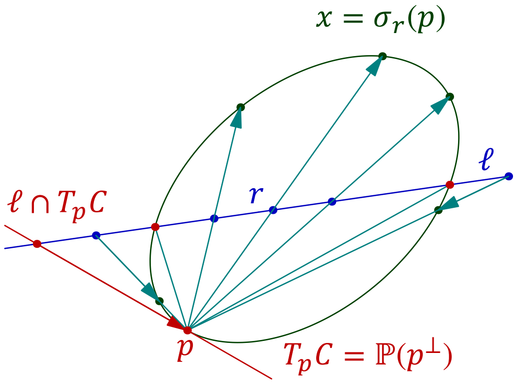

Рис. 4◇8. Проекция коники на прямую.

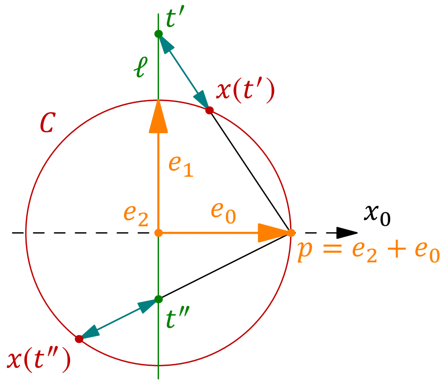

Рис. 4◇9. Параметризация окружности.

Пример 4.8 (рациональная параметризация окружности и пифагоровы тройки)
Окружность $x_0^2 + x_1^2 = 1$ является изображением гладкой проективной коники $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ из прим. 4.5 в стандартной аффинной карте U_2, где $x_2 = 1$. Построим рациональную параметризацию этой коники при помощи проекции из точки $p = e_0 + e_2 = (1 : 0 : 1)$ на задаваемую уравнением $x_0 = 0$ прямую $\ell = (e_1e_2)$, см. рис. 4◇9. Беря $r = t_1e_1 + t_2e_2 = (0 : t_1 : t_2)$, получаем $\widetilde{q}(p,r) = -t_2$, $q(r) = t_1^2 - t_2^2$, и по формуле (4-10),

$$x = (pr) \cap C = (t_1^2 - t_2^2)(e_0 + e_2) + 2t_2^2\,e_2 + 2t_1t_2\,e_1 = (t_1^2 - t_2^2)\,e_0 + 2t_1t_2\,e_1 + (t_1^2 + t_2^2)\,e_2$$

[1] См. n° 2.2 на стр. 16.
[2] См. формулу (4-3) на стр. 43.

В стандартном базисе e_0, e_1, e_2 эта точка имеет однородные координаты

$$(x_0 : x_1 : x_2) = ((t_1^2 - t_2^2) : 2\,t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2)). \tag{4-11}$$

Альтернативный способ получения рациональной параметризации заключается в приведении квадратичной формы $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ к виду $a_1^2 = a_0 a_2$ и использовании параметризации

$$(a_0 : a_1 : a_2) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$$

из форм. (4-7) на стр. 44. Это делается при помощи линейной замены переменных

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_0 = (a_0 + a_2)/2\,, \end{cases}$$

превращающей (4-7) в (4-11). Обратите внимание, что подставляя в правую часть формулы (4-11) всевозможные $(t_0, t_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, мы получим слева все возможные пифагоровы тройки[1] с точностью до пропорциональности.

4.4. Проективные многообразия. Если ковекторы $x_0, x_1, \dots, x_n$ образуют базис векторного пространства V^*, то алгебра многочленов $\Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ от этих ковекторов обозначается SV^* и называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V^*. Как векторное пространство над $\Bbbk$, она раскладывается в прямую сумму векторных подпространств:

$$SV^* = \bigoplus_{k \geqslant 0} S^k V^*\,,$$

где $S^k V^*$ — пространство однородных многочленов степени k от $x_0, x_1, \dots, x_n$. Как и для грассмановых многочленов[2], использование не привязанных к выбору базиса названий и обозначений мотивировано тем, что пространство $S^1 V^*$ однородных линейных многочленов канонически отождествляется с векторным пространством V^*, а каждое $S^k V^*$ — с линейной оболочкой всевозможных произведений $\varphi_1 \varphi_2 \,\dots\, \varphi_k$, составленных из произвольных k ковекторов $\varphi_i \in V^*$. Пространство констант $S^0 V^* = \Bbbk \cdot 1$ тоже от выбора базиса не зависит.

Более того, гомоморфизм алгебры многочленов в алгебру функций $V \to \Bbbk$

$$\Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk^V\,,$$

который сопоставляет многочлену $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ функцию, принимающую на векторе $v = \sum \lambda_i e_i$ значение $f(v) \overset{\text{def}}{=} f(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $e_0, e_1, \dots, e_n$ — двойственный к $x_0, x_1, \dots, x_n$ базис в V, тоже не зависит от выбора базиса, поскольку отображает каждое произведение ковекторов $\varphi_1 \varphi_2 \,\dots\, \varphi_k$ в функцию $v \mapsto \prod \varphi_i(v)$, ничего ни про какие базисы не ведающую.

Замечание 4.1. (симметрическая алгебра векторного пространства) Симметрическая алгебра SV имеется у любого векторного пространства V и, по определению, представляет собою алгебру многочленов $\Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_m]$ от базисных векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$ произвольного базиса в V. Она является прямой суммой векторных пространств $S^k V$, порождённых всевозможными произведениями $v_1 v_2 \,\dots\, v_k$ векторов $v_i \in V$ и называемых k-тыми *симметрическими степенями* векторного пространства V.

[1] Т. е. целочисленные решения уравнения Пифагора $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$.

[2] См. n° 3.3 на стр. 29.

4.4.1. Однородные уравнения. Важное отличие проективной геометрии от аффинной состоит в том, что отличный от константы многочлен $f \in SV^*$ *не является* функцией на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$, поскольку его значения $f(v)$ и $f(\lambda v)$ на пропорциональных векторах обычно отличаются друг от друга. Тем не менее, множество нулей однородного многочлена

$$V(f) \overset{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid f(v) = 0 \,\}\,, \quad \text{где} \quad f \in S^k V^*\,,$$

является геометрической фигурой в $\mathbb{P}(V)$, так как равенства $f(v) = 0$ и $f(\lambda v) = \lambda^k f(v) = 0$ эквиваленты для ненулевых $v \in V$ и $\lambda \in \Bbbk$. На геометрическом языке, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ представляет собою конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, а каждая такая прямая является точкой в проективном пространстве. Множество этих точек называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени $k = \deg f$. Пересечение проективных гиперповерхностей, т. е. множество рассматриваемых с точностью до пропорциональности ненулевых решений системы однородных полиномиальных уравнений, называются *проективным алгебраическим многообразием*.

Простейшими примерами проективных многообразий служат проективные подпространства $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$. Каждое такое подпространство задаётся системой однородных линейных уравнений $\varphi(v) = 0$, где φ пробегает $\operatorname{Ann} U \subset V^*$ или какую-нибудь систему линейных порождающих этого подпространства.

4.4.2. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности. Пусть аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в аффинном координатном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$ задаётся (неоднородным) многочленом степени d вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где каждый многочлен $f_k \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_k]$ однороден степени $\Bbbk$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в проективное координатное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ в качестве стандартной аффинной карты U_0 и образуем однородный многочлен

$$\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,$$

который получается из f умножением каждого монома на такую степень переменной x_0, которая делает степень всего монома равной d. Многочлен $\overline{f}$ превращается в f, если положить $x_0 = 1$. Таким образом, многочлены f и $\overline{f}$ однозначно определяются друг по другу. Проективная гиперповерхность $V(\overline{f}) \subset \mathbb{P}_n$ называется *проективным замыканием* аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$. Последняя является пересечением проективной гиперповерхности $V(\overline{f})$ со стандартной аффинной картой U_0. Дополнение $V(\overline{f}) \smallsetminus U_0 = V(\overline{f}) \cap \mathbb{P}(\operatorname{Ann} x_0)$, т. е. пересечение гиперповерхности $V(\overline{f})$ с бесконечно удалённой проективной гиперплоскостью аффинной карты U_0, задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$ на этой гиперплоскости однородным уравнением $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, т. е. старшей однородной компонентой многочлена f. Точки этой проективной гиперповерхности называются *асимптотическими направлениями* аффинной гиперповерхности $V(f)$.

Пример 4.9 (каспидальная кубика)

Проективным замыканием аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ является проективная кубическая кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, имеющая ровно одну бесконечно удалённую точку $(0 : 1 : 0)$. В покрывающей эту точку стандартной аффинной карте U_1, где $x_1 = 1$, эта кривая задаётся уравнением[1] $x_0^2 = x_2^3$ и имеет остриё в точке $(0 : 1 : 0)$.

[1] Аффинная кривая с таким уравнением называется *полукубической параболой*.

4.4.3. Пространство гиперповерхностей. Поскольку пропорциональные однородные многочлены задают одну и ту же гиперповерхность, каждая гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ степени d определяется не многочленом f, а задаваемой этим многочленом точкой проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, которое называется *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

Упражнение 4.12. Найдите размерность пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$.

Так как для произвольно зафиксированной точки $p \in \mathbb{P}(V)$ уравнение $f(p) = 0$ является *линейным* уравнением на $f \in S^d V^*$, гиперповерхности степени d, проходящие через заданную точку p, образуют гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Предложение 4.2

Через любые пять точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести конику. Если никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие три не коллинеарны, то она вдобавок ещё и гладкая.

Доказательство. Согласно упр. 4.12, коники на плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ являются точками пространства $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$. Поскольку любые пять гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, через любые пять точек в $\mathbb{P}_2$ проходит хотя бы одна коника. Если какие-то три из пяти точек коллинеарны, то проходящая через них прямая содержится в конике по сл. 4.1 на стр. 42. Стало быть, коника распадается. Если при этом никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, вторая компонента распавшейся коники однозначно фиксируется тем, что проходит через оставшиеся две точки. Если никакие три из пяти точек не коллинеарны, то проходящая через них коника не может быть особой в силу сказанного в n° 4.3.2 на стр. 44. Гладкая коника, проходящая через пять заданных точек автоматически единственна в силу следующего ниже предл. 4.3. □

Предложение 4.3

Гладкая коника и произвольная кривая степени d на $\mathbb{P}_2$ либо пересекаются не более, чем по $2d$ точкам, либо коника целиком содержится в кривой в качестве компоненты.

Доказательство. Согласно форм. (4-7) на стр. 44, гладкая коника на $\mathbb{P}_2$ состоит из точек вида $x = q(t)$, где $q : \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2$ — вложение, задаваемое однородными многочленами второй степени. Все значения t, при которых коника пересекает кривую с уравнением $f(x) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f\big(q(t)\big) = 0$, левая часть которого либо тождественно обращается в нуль, либо является однородным многочленом степени $2d$ от $t = (t_0, t_1)$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае многочлен имеет не более $2d$ различных корней[1] на $\mathbb{P}_1$. □

4.4.4. Линейные системы. Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями $V(f_1)$, $V(f_2)$, … , $V(f_m)$ задаётся уравнением вида $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Bbbk$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)$, которое называется *базисным множеством* линейной

[1] Ср. с форм. (4-12) на стр. 50 ниже.

системы. Поскольку базисное множество является пресечением *всех* гиперповерхностей системы, оно не зависит от выбора линейных образующих в этой системе.

По старинной традиции, одномерные, двумерные и трёхмерные линейные системы называются *пучками*, *связками* и *сетями* соответственно. Например, все прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_2$, образуют пучок, ибо составляют прямую[1] $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$. Точно также все двумерные плоскости, проходящие через заданную прямую $\ell \subset \mathbb{P}_3$, составляют прямую $\ell^\times \subset \mathbb{P}_3^\times$ и, стало быть, тоже образуют пучок.

Так как любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, в любом пучке гиперповерхностей[2] всегда имеется гиперповерхность, проходящая через любую наперёд заданную точку.

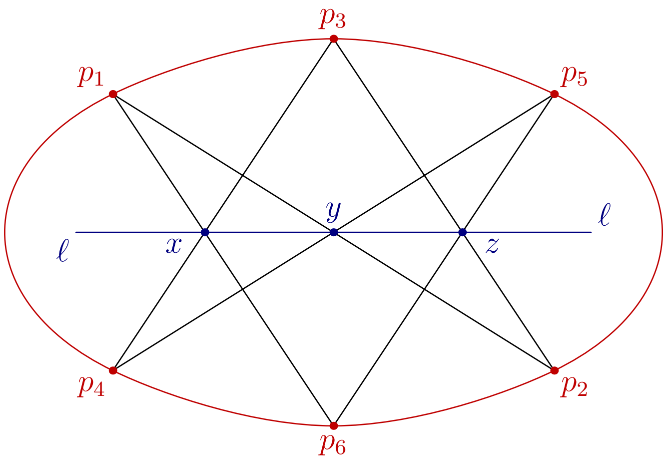

Рис. 4⋄10. Гексограмма Паскаля.

Пример 4.10 (теорема Паскаля)
Существует замечательный критерий того, когда через шесть точек $p_1, p_2, \dots, p_6$, никакие три из которых не коллинеарны, можно провести конику. Для этого необходимо и достаточно, чтобы три точки пересечений пар «противоположных сторон» шестиугольника $p_1, p_2, \dots, p_6$

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1), \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5), \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

лежали на одной прямой, см. рис. 4⋄10. Следующее простое соображение, принадлежащее Якоби, доказывает необходимость (для $\Bbbk = \mathbb{C}$). Пусть все шесть точек лежат на конике C, автоматически гладкой. Рассмотрим две распавшиеся кубические кривые $F = (p_1p_2) \cup (p_3p_4) \cup (p_5p_6)$ и $G = (p_2p_3) \cup (p_4p_5) \cup (p_6p_1)$ и выберем на конике C седьмую точку p_7, отличную от шести заданных. Все кубические кривые из пучка $(FG) = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1\}$ проходят через девять точек $\{p_1, \dots, p_6, x, y, z\} = F \cap G$, и хотя бы одна из этих кривых, назовём её Q, проходит через точку p_7, а значит, пересекает конику C по семи точкам. Согласно предл. 4.3, это означает, что коника C содержится в кубической кривой Q в качестве компоненты. Из теоремы Гильберта о нулях, которая доказывается в курсе коммутативной алгебры, следует, что уравнение кубики Q делится на уравнение коники C. Частное — однородный многочлен первой степени — задаёт прямую, проходящую через не лежащие на конике C базисные точки x, y, z пучка (FG).

В следующем §5 мы дадим два различных самодостаточных доказательства теоремы Паскаля, использующие свойства проективных преобразований.

[1] См. n° 4.2.1 на стр. 41.

[2] Любой степени и над любым полем.

4.4.5. Конфигурации точек на прямой. На двумерном векторном пространстве U имеется единственная с точностью до пропорциональности билинейная кососимметричная *форма площади* $\det : U \times U \to \Bbbk$, $(u, w) \mapsto \det(u, w)$, сопоставляющая паре векторов определитель матрицы их координат в каком-нибудь базисе. При замене базиса эта форма умножается на ненулевую константу — определитель матрицы перехода. Правая корреляция формы площади задаёт изоморфизм $\det^{\wedge} : U \xrightarrow{\sim} U^*$, переводящий вектор $w \in U$ в линейную форму $u \mapsto \det(u, w)$ и с точностью до пропорциональности не зависящий от выбора базиса. Переходя к проективизациям, мы получаем канонический изоморфизм $\overline{\det} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(U^*)$ между двойственными проективными прямыми $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}_1^{\times} = \mathbb{P}(U^*)$, переводящий точку $p = (p_0 : p_1) \in \mathbb{P}_1$ в точку $p^* = (p_1 : -p_0) \in \mathbb{P}_1^{\times}$, задаваемую однородным линейным многочленом

$$p^*(x_0, x_1) \overset{\text{def}}{=} \det(x, p) = p_1 x_0 - p_0 x_1 \in S^1 U^* ,$$

который однозначно с точностью до пропорциональности определяется тем, что $p = V(p^*)$. Таким образом, точки проективной прямой, т. е. гиперповерхности степени 1 в $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, взаимно однозначно соответствуют точкам пространства $\mathbb{P}(S^1 U^*) = \mathbb{P}_1^{\times}$ таких гиперповерхностей.

Любая конечная конфигурация из d неупорядоченных точек $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$, среди которых могут быть совпадающие, является алгебраической гиперповерхностью $V(f)$ степени d, задаваемой однородным многочленом

$$f(x_0, x_1) = p_1^* p_2^* \dots p_d^* = \prod_{i=1}^{d} \det(x, p_i) = \prod_{\nu=1}^{d} (p_{i,1} x_0 - p_{i,0} x_1) , \tag{4-12}$$

где $(p_{i,0} : p_{i,1})$ это однородная координата точки p_i. Точки $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$ называются *корнями* однородного многочлена (4-12). Разложение (4-12) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням, с той только разницей, что в формуле (4-12) и многочлен f, и числа $(p_{i,0} : p_{i,1})$ рассматриваются с точностью до пропорциональности, т. е. как точки проективных пространств $\mathbb{P}_d^{\times} = \mathbb{P}(S^d U^*)$ и $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(U)$. Однородный многочлен степени d от двух переменных имеет не более d различных корней на $\mathbb{P}_1$, а если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то таковых корней, с учётом кратностей[1], всегда существует ровно d. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ точки пространства $\mathbb{P}_d^{\times} = \mathbb{P}(S^d V^*)$ гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ находятся в биекции со всевозможными конфигурациями из d-неупорядоченных точек на $\mathbb{P}_1$.

4.4.6. Рациональные нормальные кривые. Двойственный способ думать про d-точечные конфигурации $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}(U)$ заключается в том, чтобы воспринимать их как точки проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$ однородных многочленов степени d от базисных векторов e_0, e_1 пространства U. При таком подходе конфигурации $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$ сопоставляется произведение $p_1 p_2 \dots p_d \in \mathbb{P}_d$.

Покажем, что над произвольным полем $\Bbbk$, характеристика которого не делит d, множество всех тех d-точечных конфигураций на $\mathbb{P}_1$, где все d точек совпадают друг с другом, образуют алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d$. Эта кривая называется *кривой Веронезе* или *рациональной нормальной кривой* степени d в $\mathbb{P}_d$. По определению, она является образом *вложения Веронезе*

$$\nu_d : \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}\left(S^d U\right) , \quad a \mapsto a^d , \tag{4-13}$$

[1]Кратностью корня p однородного многочлена $f(x_0, x_1)$ по-определению называется максимальная степень линейной формы $\det(x, p)$, на которую многочлен f делится в кольце $\Bbbk[x_0, x_1]$.

переводящего линейный двучлен $a = t_0e_0 + t_1e_1$ в однородный многочлен

$$\left(t_0e_0 + t_1e_1\right)^d = \sum_{i=0}^{d} t_0^{d-i}t_1^i \binom{d}{i} e_0^{d-1}e_1^i .$$

Если $\operatorname{char}\Bbbk \nmid d$, мономы $\binom{d}{i}e_0^{d-1}e_1^i$ образуют базис[1] векторного пространства S^dU, и в однородных координатах относительно этого базиса отображение Веронезе $\nu_d :\ \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_d$ имеет вид

$$(t_0 : t_1) \mapsto \left(t_0^d : t_0^{d-1}t_1 : t_0^{d-2}t_1^2 : \dots : t_1^d\right) .$$

Координаты в правой части образуют геометрическую прогрессию со знаменателем t_1/t_0. Наоборот, любой набор из $d+1$ чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$, образующих геометрическую прогрессию, т. е. таких, что

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1 ,$$

находится в образе отображения Веронезе. Тем самым, кривая Веронезе описывается системой однородных квадратных уравнений

$$\det\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = a_ia_{j+1} - a_{i+1}a_j = 0 , \quad \text{где} \quad 0 \leqslant i < j \leqslant d . \tag{4-14}$$

Лемма 4.1
Если $\operatorname{char}\Bbbk \nmid d$, никакая гиперплоскость в $\mathbb{P}_d$ не пересекает кривую Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ более, чем по d точкам. В частности, любые k различных точек кривой Веронезе порождают $(k-1)$-мерное проективное подпространство при $1 \leqslant k \leqslant d+1$.

Доказательство. Гиперплоскость, задаваемая уравнением $A_0a_0 + A_1a_1 + \dots + A_da_d = 0$, пересекает кривую C_d по образам тех точек $(t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$, которые являются корнями однородного многочлена $\sum A_\nu\, t_0^{d-i}t_1^i$ степени d. □

Пример 4.11 (коника Веронезе)
Коника Веронезе $C_2 \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U)$, где $\dim U = 2$, состоит из всех таких квадратичных форм

$$a_0e_0^2 + 2a_1e_0e_1 + a_2e_1^2$$

от базисных векторов e_0, e_1 пространства U, которые являются квадратами линейных форм. Система (4-14) в этом случае состоит из одного, хорошо известного с седьмого класса уравнения

$$D/4 = -\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0a_2 = 0 , \tag{4-15}$$

решения которого имеют вид $(a_0 : a_1 : a_2) = (t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2)$, где $t = (t_0 : t_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1$, что мы уже видели в форм. (4-7) на стр. 44. Таким образом, приведение уравнения непустой невырожденной коники $C \subset \mathbb{P}_2$ к виду (4-15) на геометрическом языке означает такое отождествление объемлющей конику плоскости $\mathbb{P}_2$ с пространством $\mathbb{P}(S^2U)$ неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, при котором коника C становится множеством двойных точек a^2.

Упражнение 4.13. Убедитесь, что множество пар ab, в которых точка a фиксирована, а b пробегает $\mathbb{P}(U)$, является прямой на плоскости $\mathbb{P}(S^2U)$.

[1] Обратите внимание, что $(t_0e_0 + t_1e_1)^d = t_0^dx_0^d + t_1^de_1^d$, когда $d \mid \operatorname{char}\Bbbk$.

Мы видим, что пара касательных, которые можно опустить на конику Веронезе из точки ab, это прямые, образованные парами at и bt, где t пробегает $\mathbb{P}(U)$. Они касаются коники C_2 в точках a^2 и b^2 соответственно. Отметим, что если основное поле $\Bbbk$ не является алгебраически замкнутым, то на плоскости $\mathbb{P}(S^2U)$ могут быть точки, не представимые в виде ab, поскольку могут существовать не раскладывающиеся на линейные множители однородные многочлены второй степени.

Упр. 4.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, а слева — количество ненулевых векторов в $(n+1)$-мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е. $(q^{n+1} - 1)/(q-1)$; кто знает, может, именно поэтому полученная формула называется формулой суммирования *геометрической* прогрессии

Упр. 4.4. Это следует из соотношения $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$.

Упр. 4.5. Если стягиваемая петля настолько мала, что почти не отличается от точки, устойчивое к малым шевелениям количество точек её пересечения с любой петлёй равно нулю. При изменении размеров петли устойчивые точки пересечения появляются и исчезают по две.

Упр. 4.7. Пусть $K = \mathbb{P}(W)$. Векторное подпространство $W \subset V$ имеет размерность $k+1$ и либо содержится в гиперплоскости $\mathrm{Ann}(\xi)$, либо пересекается с нею по k-мерному векторному пространству $W' = \mathrm{Ann}(\xi|_W) \subset W$. В первом случае K не пересекается с картой U_ξ, во втором случае пересечение $K \cap U_\xi$ представляет собою аффинное пространство над векторным пространством $W \cap \mathrm{Ann}\,\xi = W'$.

Упр. 4.10. Если $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$ и $v \notin U \cup W$, то u и w линейно независимы, и $v \in (u, w)$. Если отвечающая вектору v точка проективного пространства лежит на какой-то ещё прямой (ab) с $a \in U$ и $b \in W$, то $v = \lambda a + \mu b$ для некоторых ненулевых $\lambda, \mu \in \Bbbk$, причём $\lambda a = u$ и $\mu b = w$ в силу единственности разложения вектора v. Поэтому a и u, так же как b и w, суть совпадающие точки проективного пространства. В частности, $(uw) = (ab)$.

Упр. 4.11. Для нульмерной квадрики на $\mathbb{P}_1$ утверждение очевидно. Пусть при $n \geqslant 2$ квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ содержится в гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}_n$ и имеет гладкую точку $a \in Q$. Тогда каждая проходящая через a и не содержащаяся в H прямая пересекает Q ровно в одной точке a, т. е. лежит в T_pQ. Поэтому $\mathbb{P}_n = H \cup T_pQ$. Если $H = V(\xi)$, $T_pQ = V(\eta)$ для каких-то ненулевых ковекторов $\xi, \eta \in V^*$, то квадратичная форма $q(v) = \xi(v)\eta(v)$ тождественно зануляется на векторном пространстве V. Но тогда и оба сомножителя ξ, η должны быть нулевыми. Противоречие.

Упр. 4.12. Ответ: $\binom{n+d}{d} - 1$.

Упр. 4.13. Пусть $a = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1$, $b = \lambda e_0 + \mu e_1$, где $\alpha_0, \alpha_1 \in \Bbbk$ фиксированы, а отношение $(\lambda : \mu)$ пробегает $\mathbb{P}_1$. Тогда произведение $ab = \lambda(\alpha_0 e_0^2 + \alpha_1 e_0 e_1) + \mu(\alpha_1 e_1^2 + \alpha_0 e_0 e_1)$ пробегает в $\mathbb{P}(S^2 U)$ прямую, проходящую через точки $\alpha_0 e_0^2 + \alpha_1 e_0 e_1$ и $\alpha_1 e_1^2 + \alpha_0 e_0 e_1$.