§2. Симметричные билинейные и квадратичные формы

В этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ имеет $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$.

2.1. Пространства со скалярным произведением. Будем называть *пространством со скалярным произведением* конечномерное векторное пространство V над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ с зафиксированной на нём невырожденной[1] симметричной билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$. В этом и следующем разделах буква V по умолчанию обозначает именно такое пространство.

2.1.1. Ортогональные прямые суммы. Из двух пространств V_1, V_2 со скалярными произведениями β_1, β_2 можно изготовить пространство $V_1 \oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1 \dotplus \beta_2$, относительно которого слагаемые ортогональны друг другу и которое ограничивается на V_1 и V_2 в β_1 и β_2. Это скалярное произведение задаётся формулой

$$\left[\beta_1 \dotplus \beta_2\right]\big((u_1, u_2), (w_1, w_2)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1(u_1, u_2) + \beta_2(w_1, w_2)\,.$$

Его матрица Грама в любом базисе, первые $\dim V_1$ векторов которого образуют базис в V_1 с матрицей Грама B_1, а последние $\dim V_2$ векторов — базис в V_2 с матрицей Грама B_2, имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Пространство $V_1 \oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1 \dotplus \beta_2$ обозначается $V_1 \dotplus V_2$ и называется *ортогональной прямой суммой* пространств V_1 и V_2.

Упражнение 2.1. Обозначим через H_{2n} гиперболическое пространство[2] размерности $2n$. Постройте изометрический изоморфизм[3] $H_{2m} \dotplus H_{2k} \xrightarrow{\sim} H_{2(m+k)}$.

2.1.2. Изотропные и анизотропные подпространства. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *изотропным*, если $\beta(v, v) = 0$. Подпространство $U \subset V$, целиком состоящее из изотропных векторов, изотропно в смысле n° 1.3.2 на стр. 8, т. е. $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$, поскольку

$$2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0\,.$$

Подпространство $U \subset V$ называется *анизотропным*, если в нём нет изотропных векторов. Скалярное произведение на V называется *анизотропным*, если анизотропно всё пространство V. Например, евклидово скалярное произведение на вещественном векторном пространстве анизотропно. Так как анизотропная форма обладает свойствами (5,6) из предл. 1.1 на стр. 6, каждая анизотропная форма невырождена. Поэтому для любого анизотропного подпространства $U \subset V$ имеет место ортогональное разложение $V = U \oplus U^{\perp}$ из предл. 1.4 на стр. 10.

Предложение 2.1

Каждое изотропное подпространство U в пространстве V со скалярным произведением β содержится в некотором гиперболическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2 \dim U$. При этом любой базис подпространства U дополняется до гиперболического базиса пространства W.

[1] См. предл. 1.1 на стр. 6.
[2] См. прим. 1.2 на стр. 7.
[3] См. n° 1.2.4 на стр. 5.

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис $u_1, u_2, \dots, u_m$ в U, дополним его до базиса в V и обозначим через $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$ первые m векторов ортогонально двойственного базиса. Тогда

$$\beta(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,, \end{cases} \tag{2-1}$$

и эти соотношения ортогональности не нарушаются при добавлении к любому из векторов $u_j^\vee$ произвольной линейной комбинации векторов u_i. Заменим каждый из векторов $u_j^\vee$ на вектор

$$w_j = u_j^\vee - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m} \beta(u_j^\vee, u_\nu^\vee) \cdot u_\nu\,.$$

Векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$ по-прежнему удовлетворяют соотношениям (2-1) и вдобавок

$$\beta(w_i, w_j) = \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2}\,\beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2}\,\beta(u_j^\vee, u_i^\vee) = 0\,,$$

т. е. $2m$ векторов u_i, w_j, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, образуют гиперболический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве W. □

Теорема 2.1
Каждое пространство V со скалярным произведением распадается в прямую ортогональную сумму $V = H_{2k} \oplus A$, первое слагаемое которой гиперболическое и может быть нулевым или совпадать со всем пространством V, а второе слагаемое $A = H_{2k}^\perp$ анизотропно.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если V анизотропно (что так при $\dim V = 1$), доказывать нечего. Если существует ненулевой изотропный вектор $e \in V$, то по предл. 2.1 он лежит в некоторой гиперболической плоскости $H_2 \subset V$, и $V = H_2 \oplus H_2^\perp$ согласно предл. 1.4. По индукции, $H_2^\perp = H_{2m} \oplus A$, где $A = H_{2m}^\perp$ анизотропно. Поэтому $V = H_{2m+2} \oplus A$ и $A = H_{2m+2}^\perp$. □

Замечание 2.1. Ниже, в теор. 2.4 на стр. 18, мы увидим, что разложение из теор. 2.1 единственно в следующем смысле: если $V = H_{2k} \dotplus U = H_{2m} \dotplus W$, где U и W анизотропны, то $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} W$.

Следствие 2.1
Следующие свойства пространства V со скалярным произведением эквивалентны:

1) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству

2) V является прямой суммой двух изотропных подпространств

3) $\dim V$ чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) очевидна. Пусть выполнено (2). По предл. 1.2 размерность каждого из из двух изотропных прямых слагаемых не превышает половины размерности V, что возможно только если обе эти размерности равны $\frac{1}{2}\dim V$. Тем самым, (2)⇒(3). По предл. 2.1 на стр. 14 каждое изотропное подпространство размерности $\frac{1}{2}\dim V$ содержится в гиперболическом подпространстве размерности $\dim V$, которое таким образом совпадает со всем пространством V, что даёт импликацию (3)⇒(1). □

2.2. Изометрии и отражения. Всякий анизотропный вектор $e \in V$ задаёт разложение пространства V в прямую ортогональную сумму $V = \Bbbk \cdot e \oplus e^\perp$. Линейный оператор $\sigma_e : V \to V$, тождественно действующий на гиперплоскости $e^\perp$ и переводящий вектор e в $-e$, называется *отражением* в гиперплоскости $e^\perp$, см. рис. 2◇1. Произвольный вектор $v = v_e + v_{e^\perp} \in V$, где $v_e = e\,\beta(e,v)\,/\,\beta(e,e)$ это проекция вектора v на одномерное подпространство $\Bbbk \cdot e$ вдоль гиперплоскости[1] $e^\perp$, а $v_{e^\perp} = v - v_e \in e^\perp$, переходит при этом в вектор

$$\sigma_e(v) = -v_e + v_{e^\perp} = v - 2v_e = v - 2\,\frac{\beta(e,v)}{\beta(e,e)} \cdot e \tag{2-2}$$

Упражнение 2.2. Убедитесь, что $\sigma_e \in \mathrm{O}_\beta(V)$ и $\sigma_e^2 = \mathrm{Id}_V$, и докажите для любых изометрии $f \in \mathrm{O}(V)$ и анизотропного вектора $e \in V$ равенство $f \circ \sigma_e \circ f^{-1} = \sigma_{f(e)}$.

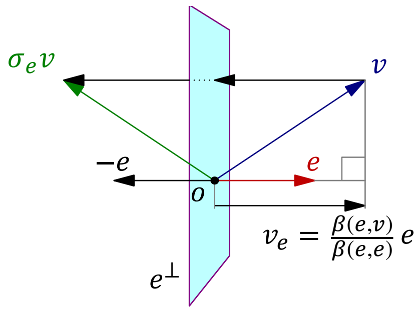

Рис. 2◇1. Отражение σ_e.

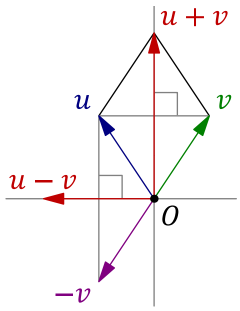

Рис. 2◇2. Отражения в ромбе.

Лемма 2.1

В любом пространстве V со скалярным произведением β для каждой пары различных анизотропных векторов u, v с равными скалярными квадратами $\beta(u,u) = \beta(v,v) \neq 0$ существует отражение, переводящее u либо в v, либо в $-v$.

Доказательство. Если u и v коллинеарны, то искомым отражением является $\sigma_v = \sigma_u$. Если u и v не коллинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей $u+v$, $u-v$ натянутого на них ромба (см. рис. 2◇2) анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны:

$$\beta(u+v, u-v) = \beta(u,u) - \beta(v,v) = 0\,,$$

и их линейная оболочка содержит анизотропные векторы u, v. Тем самым, хотя бы одно из отражений σ_{u-v}, σ_{u+v} определено. При этом $\sigma_{u-v}(u) = v$, а $\sigma_{u+v}(u) = -v$. □

Упражнение 2.3. Проверьте, последние два равенства.

Теорема 2.2

Всякая изометрия n-мерного пространства со скалярным произведением является композицией не более чем $2n$ отражений.

[1] Мы воспользовались форм. (1-16) на стр. 10: вектор ${}^\vee e = e\,/\,\beta(e,e)$ является двойственным к e относительно формы β базисным вектором одномерного пространства $U = \Bbbk \cdot e$, и $v_e = \beta({}^\vee e, v)\,e$.

Доказательство. Индукция по n. Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора E и отражения $-E$. Пусть $n > 1$ и $f : V \to V$ — изометрия. Выберем в V какой-нибудь анизотропный вектор v и обозначим через σ отражение, переводящее $f(v)$ в v или в $-v$. Композиция σf переводит v в $\pm v$, а значит, переводит в себя $(n-1)$-мерную гиперплоскость $v^{\perp}$. По индукции, действие σf на $v^{\perp}$ является композицией не более $2n-2$ отражений в гиперплоскостях внутри $v^{\perp}$. Продолжим их до отражений всего пространства V, добавив в зеркало каждого отражения вектор v. Композиция полученных отражений совпадает с σf на гиперплоскости $v^{\perp}$, а её действие на v либо такое же, как у σf (при $\sigma f(v) = v$), либо отличается от него знаком (при $\sigma f(v) = -v$). Поэтому σf, как оператор на всём пространстве V, есть композиция построенных $2n-2$ отражений и, возможно, ещё одного отражения в гиперплоскости $v^{\perp}$. Следовательно, $f = \sigma\sigma f$ это композиция не более $2n$ отражений. □

Упражнение 2.4. Покажите, что в анизотропном пространстве V в условиях лем. 2.1 всегда найдётся отражение, переводящее u в точности в v, и выведите отсюда, что любая изометрия n-мерного анизотропного пространства является композицией не более n отражений.

Теорема 2.3 (лемма Витта)
Пусть четыре пространства U_1, W_1, U_2, W_2 со скалярными произведениями таковы, что некоторые два из трёх пространств U_1, $U_1 \dotplus W_1$, W_1 изометрически изоморфны соответствующей паре пространств из тройки U_2, $U_2 \dotplus W_2$, W_2. Тогда оставшиеся третьи элементы троек тоже изометрически изоморфны.

Доказательство. Если есть изометрические изоморфизмы $f : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ и $g : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$, то их прямая сумма $f \oplus g : U_1 \dotplus W_1 \to U_2 \dotplus W_2$, $(u, w) \mapsto (f(u), g(w))$, является требуемым изометричеким изоморфизмом. Оставшиеся два случая симметричны, и мы разберём один из них. Пусть имеются изометрические изоморфизмы

$$f : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \quad \text{и} \quad h : U_1 \dotplus W_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \dotplus W_2 \,.$$

Изометрический изоморфизм $g : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$ строится индукцией по $\dim U_1 = \dim U_2$. Если пространство U_1 одномерно с базисом u, то вектор u анизотропен. Поэтому векторы $f(u)$ и $h(u, 0)$ тоже анизотропны и имеют одинаковые скалярные квадраты. Обозначим через σ отражение пространства $U_2 \dotplus W_2$, переводящее $h(u, 0)$ в $\big(\pm f(u), 0\big)$. Композиция

$$\sigma h : U_1 \dotplus W_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \dotplus W_2$$

изометрично отображает одномерное подпространство U_1 первой суммы на одномерное подпространство U_2 второй, а значит, изометрично отображает ортогональное дополнение к U_1 в первой сумме на ортогональное дополнение к U_2 во второй, что и даёт требуемый изоморфизм $\sigma h|_{W_1} : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$. Пусть теперь $\dim U_1 > 1$. Выберем в U_1 любой анизотропный вектор u и рассмотрим ортогональные разложения

$$U_1 \dotplus W_1 = \Bbbk \cdot u \dotplus u^{\perp} \dotplus W_1 \quad \text{и} \quad U_2 \dotplus W_2 = \Bbbk \cdot f(u) \dotplus f(u)^{\perp} \dotplus W_2 \,,$$

в которых $u^{\perp} \subset U_1$ и $f(u)^{\perp} \subset U_2$ означают ортогональные дополнения к анизотропным векторам u и $f(u)$ внутри U_1 и U_2 соответственно. Так как пространства $\Bbbk \cdot u$ и $\Bbbk \cdot f(u)$ изометрически изоморфны, по уже доказанному существуют изометрии

$$f' : u^{\perp} \xrightarrow{\sim} f(u)^{\perp} \quad \text{и} \quad h' : u^{\perp} \dotplus W_1 \xrightarrow{\sim} f(u)^{\perp} \dotplus W_2 \,,$$

к которым применимо индуктивное предположение. □

Теорема 2.4
Построенное в теор. 2.1 разложение пространства V со скалярным произведением в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений $V = H_{2k} \dotplus U = H_{2m} \dotplus W$ имеет место равенство $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \simeq W$.

Доказательство. Пусть $m \geqslant k$, так что $H_{2m} = H_{2k} \dotplus H_{2(m-k)}$. Тождественное отображение $\mathrm{Id} : V \to V$ задаёт изометрический изоморфизм $H_{2k} \dotplus U \xrightarrow{\sim} H_{2k} \dotplus H_{2(m-k)} \dotplus W$. По лемме Витта существует изометрический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} H_{2(m-k)} \dotplus W$. Так как U анизотропно, $H_{2(m-k)} = 0$ (иначе в U будет ненулевой изотропный вектор), откуда $k = m$ и $U \simeq W$. □

Следствие 2.2
Если скалярное произведение на пространстве V невырожденно ограничивается на подпространства $U, W \subset V$ и существует изометрический изоморфизм $\varphi : U \xrightarrow{\sim} W$, то он продолжается (неоднозначно) до такого изометрического автоморфизма $f \in \mathrm{O}(V)$, что $f|_U = \varphi$.

Доказательство. Если есть хоть какой-нибудь изометрический изоморфизм $\psi : U^\perp \xrightarrow{\sim} W^\perp$, то изометрия $f = \varphi \oplus \psi : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} W \oplus W^\perp$, $(u, u') \mapsto \big(\varphi(h'), \psi(u')\big)$ является требуемым автоморфизмом пространства V. В силу сделанных предположений имеются изометрические изоморфизмы $\eta : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} V$, $(u, u') \mapsto u + u'$, и $\zeta : U \oplus W^\perp \xrightarrow{\sim} V$, $(u, w') \mapsto \varphi(u) + w'$. Композиция $\zeta^{-1}\eta : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} U \oplus W^\perp$ тоже изометрический изоморфизм. Так что по лемме Витта[1] ортогоналы $U^\perp$ и $W^\perp$ изометрически изоморфны. □

Следствие 2.3
Для каждого натурального числа k в диапазоне $1 \leqslant k \leqslant \dim V/2$ группа изометрий $\mathrm{O}(V)$ транзитивно действует на k-мерных изотропных и $2k$-мерных гиперболических подпространствах в V.

Доказательство. Утверждение про гиперболические подпространства вытекает непосредственно из сл. 2.2, а про изотропные — получается из него применением предл. 2.1. □

2.3. Квадратичные формы. Функция $q : V \to \Bbbk$ на n-мерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ называется *квадратичной формой*, если она является однородным многочленом второй степени от координат в некотором базисе, т. е. существуют такие базис $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в V и однородный многочлен второй степени $q_{\boldsymbol{e}} \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, что

$$q(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = q_{\boldsymbol{e}}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

для всех $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Bbbk^n$. Если $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$, то многочлен $q_{\boldsymbol{e}}$ можно записать в виде

$$q_{\boldsymbol{e}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \,, \tag{2-3}$$

где суммирование происходит по всем парам индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$, а коэффициенты q_{ij} симметричны по i и j, т. е. при $i \neq j$ число $q_{ji} = q_{ij}$ равно *половине*[2] фактического коэффициента

[1] См. теор. 2.3 на стр. 17.
[2] Обратите внимание, что над полем характеристики 2 многочлен $x_1 x_2$ не записывается в виде (2-3).

при $x_i x_j$ в многочлене $q_{\boldsymbol{e}}$, получающегося после приведения подобных слагаемых в (2-3). Если организовать числа q_{ij} в симметричную матрицу $Q_{\boldsymbol{e}} = \left(q_{ij}\right)$, которую мы будем называть *матрицей Грама* многочлена $q_{\boldsymbol{e}}$, и обозначить через x и $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ столбец и строку, составленные из переменных, то (2-3) можно переписать в виде

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i q_{ij} x_j = x^t\, Q_{\boldsymbol{e}}\, x\,. \tag{2-4}$$

Сравнивая это с форм. (1-3) на стр. 4, мы заключаем, что $q(v) = \widetilde{q}(v, v)$, где $\widetilde{q} : V \times V \to \Bbbk$ — симметричная билинейная форма с матрицей Грама $Q_{\boldsymbol{e}}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Поскольку

$$q(u + w) - q(u) - q(w) = \widetilde{q}(u + w, u + w) - \widetilde{q}(u, u) - \widetilde{q}(w, w) = 2\widetilde{q}(u, w)\,,$$

симметричная билинейная форма $\widetilde{q}$ со свойством $\widetilde{q}(v, v) = q(v)$ однозначно определяется квадратичной формой q, если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Симметричная билинейная форма $\widetilde{q}$ называется *поляризацией* квадратичной формы q. Обратите внимание, что взаимно однозначное соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами

$$\begin{gathered} \widetilde{q}(u, w) \mapsto q(v) = \widetilde{q}(v, v) \\ q(v) \mapsto \widetilde{q}(u, w) = \frac{1}{2}\big(q(u + w) - q(u) - q(w)\big) \end{gathered} \tag{2-5}$$

не зависят от базиса $\boldsymbol{e}$ в V. В частности, для любого базиса $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ef}}$ в V значение $q(v)$ является однородным многочленом второй степени $q_{\boldsymbol{f}}$ от координат вектора v в базисе $\boldsymbol{f}$, причём матрица Грама этого многочлена, равная матрице Грама билинейной формы $\widetilde{q}$ в базисе $\boldsymbol{f}$, будет равна[1] $Q_{\boldsymbol{f}} = C_{\boldsymbol{ef}}^t Q_{\boldsymbol{e}}\, C_{\boldsymbol{ef}}$.

Поскольку при переходе от базиса к базису определитель Грама умножается на квадрат определителя матрицы перехода, класс числа $\det Q_{\boldsymbol{e}} \in \Bbbk$ по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$ не зависит от выбора базиса $\boldsymbol{e}$. Мы будем обозначать этот класс $\det q \in \Bbbk/\Bbbk^{*2}$ и называть его *определителем Грама* квадратичной формы q. Квадратичная форма q называется *вырожденной*, если $\det q = 0$. Формы с $\det q \neq 0$ называются *невырожденными*. Таким образом, невырожденность квадратичной формы q означает в точности то же, что невырожденность её поляризации[2] $\widetilde{q}$. Под *рангом* квадратичной формы q мы понимаем ранг её поляризации $\widetilde{q}$, равный рангу матрицы Грама $Q_{\boldsymbol{e}}$ в любом базисе $\boldsymbol{e}$. Также, как и для симметричных билинейных форм, мы будем называть ненулевой вектор $v \in V$ *изотропным* для квадратичной формы q, если $q(v) = 0$. Квадратичная форма называется *анизотропной*, если $q(v) \neq 0$ при $v \neq 0$.

Из доказанных выше результатов про симметричные билинейные формы немедленно получаются аналогичные результаты про квадратичные формы.

Следствие 2.4 (из теор. 2.1 на стр. 15)
Всякая квадратичная форма q над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ в подходящих координатах записывается в виде $x_1 x_{i+1} + x_2 x_{i+2} + \dots + x_i x_{2i} + \alpha(x_{2i+1}, x_{2i+2} \dots, x_r)$, где $r = \operatorname{rk}(q)$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. □

Следствие 2.5 (из теор. 1.1 на стр. 11)
Всякая квадратичная форма над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ линейной обратимой заменой переменных приводится к виду $\sum a_i x_i^2$. □

[1] См. формулу (1-2) на стр. 4.
[2] См. предл. 1.1 на стр. 6.

Следствие 2.6 (из сл. 1.1 на стр. 12)
Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые им квадратичные формы $f, g : \Bbbk^n \to \mathbb{R}$ имеют одинаковый ранг. □

Пример 2.1 (квадратичные формы от двух переменных)
Согласно сл. 2.5, ненулевая квадратичная форма от двух переменных

$$q(x) = a\,x_1^2 + 2\,b\,x_1x_2 + c\,x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

подходящей линейной заменой координат приводятся либо к виду αt^2 с $\alpha \neq 0$, либо к виду

$$\alpha t_1^2 + \beta\,t_2^2, \quad \text{где} \quad \alpha\beta \neq 0\,.$$

Условимся писать $\xi \sim \eta$ для чисел $\xi, \eta \in \Bbbk$, если $\xi = \lambda^2\eta$ для какого-нибудь ненулевого $\lambda \in \Bbbk$.

Тогда в первом случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha \cdot 0 = 0$, форма q вырождена и с точностью до постоянного множителя является полным квадратом линейной формы $t \in V^*$. Такая форма q зануляется вдоль одномерного подпространства $\operatorname{Ann}(t) \subset V$ и отлична от нуля на всех остальных векторах.

Во втором случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha\beta \neq 0$ и форма q невырождена. Если у неё есть ненулевой изотропный вектор $v = (\vartheta_1, \vartheta_2)$, то из равенства $\alpha\vartheta_1^2 + \beta\vartheta_2^2 = 0$ вытекает, что $\vartheta_2 \neq 0$ и $-\det q \sim -\alpha\beta \sim -\beta/\alpha = (\vartheta_1/\vartheta_2)^2$ является квадратом в поле $\Bbbk$. В этом случае многочлен

$$\alpha t_1^2 + \beta\,t_2^2 = \alpha\left(t_1 + \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}t_2\right)\left(t_1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}t_2\right)$$

раскладывается над полем $\Bbbk$ в произведение двух непропорциональных линейных форм. Поэтому квадратичная форма q, у которой $-\det q$ является ненулевым квадратом, тождественно зануляется на двух одномерных подпространствах и отлична от нуля на всех прочих векторах. Мы будем называть такие формы *гиперболическими*[1]. Если же $-\det q$ не квадрат, то форма q анизотропна.

2.3.1. Вещественные квадратичные формы. Из сл. 2.5 вытекает, что любая квадратичная форма на вещественном вектором пространстве V в подходящем базисе записывается в виде

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2\,. \tag{2-6}$$

Для этого надо перейти к базису с диагональной матрицей Грама и поделить каждый базисный вектор e_i с $q(e_i) \neq 0$ на $\sqrt{|q(e_i)|}$. Числа p и m в представлении (2-6) называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*, упорядоченная пара (p, m) — *сигнатурой*, а разность $p - m$ — просто *индексом* вещественной квадратичной формы q.

Теорема 2.5
Числа p и m в представлении (2-6) не зависят от выбора базиса, в котором квадратичная форма имеет вид (2-6).

[1]Поскольку поляризация такой формы является гиперболическим скалярным произведением.

Доказательство. Будем считать, что $p \geqslant m$, поскольку противоположный случай сводится к этому заменой q на $-q$. Сумма $p+m = \operatorname{rk} q$ равна рангу билинейной формы $\widetilde{q}$ и не зависит от выбора базиса. Линейная оболочка базисных векторов e_k с номерами $k > p+m$ является ядром билинейной формы $\widetilde{q}$. Классы $[e_i]$ остальных базисных векторов по модулю $\ker \widetilde{q}$ образуют базис фактор пространства $W = V/\ker \widetilde{q}$. Форма $\widetilde{q}$ корректно задаёт на W симметричную билинейную форму $\widetilde{q}_{\mathrm{red}}([u],[w]) = \widetilde{q}(u,w)$, поскольку $\widetilde{q}(u+v_1, w+v_2) = \widetilde{q}(u,w)$ для любых $v_1, v_2 \in \ker \widetilde{q}$. В базисе из классов $[e_i]$ с $1 \leqslant i \leqslant p+m$, форма q_{red} по-прежнему задаётся формулой (2-6). В частности, она невырождена. Каждая пара базисных векторов $[e_i]$, $[e_{p+i}]$ порождает гиперболическую плоскость с гиперболическим базисом из векторов $\big([e_i] \pm [e_{p+i}]\big)/\sqrt{2}$. Поэтому форма $\widetilde{q}_{\mathrm{red}}$ является прямой ортогональной суммой гиперболического пространства H_{2m}, натянутого на классы $[e_i]$, $[e_{p+i}]$ с $1 \leqslant i \leqslant m$, и анизотропного пространства размерности $p-m$, натянутого на оставшиеся классы $[e_j]$ с $m < j \leqslant p$. По теор. 2.4 на стр. 18 размерности гиперболического и анизотропного слагаемых не зависят от выбора разложения пространства со скалярным произведением в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного. Поэтому индекс $p-m$ и отрицательный индекс инерции m не зависят от выбора базиса, в котором форма q имеет вид (2-6). □

Следствие 2.7 (из доказательства теор. 2.5)
Для каждого n на пространстве $\mathbb{R}^n$ с точностью до изометрического изоморфизма имеются ровно два анизотропных скалярных произведения — евклидово и *антиевклидово*, получающееся из евклидова сменой знака. Вещественные квадратичные формы положительного индекса имеют ненулевое евклидово анизотропное слагаемое, а формы отрицательного индекса — ненулевое антиевклидово анизотропное слагаемое, размерности которых равны абсолютной величине индекса. Гиперболичность невырожденной вещественной квадратичной формы равносильна тому, что её индекс равен нулю. □

Следствие 2.8
Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые им квадратичные формы $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеют одинаковый ранг и индекс. □

2.3.2. Отыскание сигнатуры вещественной формы. Зафиксируем в пространстве V базис и обозначим через $V_k \subset V$ линейную оболочку первых k базисных вектров $e_1, e_2, \dots, e_k$, а через $\varDelta_k$ их определитель Грама, т. е. главный угловой $k \times k$ минор матрицы Грама выбранного базиса, сосредоточенный в первых k строках и первых k столбцах, и рассматриваемый по модулю умножения на ненулевые положительные числа (ненулевые квадраты поля $\mathbb{R}$). Если он нулевой, ограничение $q|_{V_k}$ особо, и в частности, обладает изотропными векторами. Если ограничение $q|_{V_k}$ неособо, то $\varDelta_k = (-1)^{m_k}$, где показатель m_k равен отрицательному индексу инерции ограниченной формы $q|_{V_k}$. Если в последовательности $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots, \varDelta_{\dim V}$ не слишком много следующих подряд нулей, то читая её слева направо, часто удаётся проследить изменение индекса формы $q|_{V_i}$ при переходе от пространства V_i с ненулевым $\varDelta_i$ к ближайшему справа пространству V_j с ненулевым $\varDelta_j$, что позволяет эффективно вычислять индекс.

Например, пусть $\varDelta_1 < 0$, $\varDelta_2 = 0$, $\varDelta_3 > 0$, $\varDelta_4 = 0$, $\varDelta_5 = 0$, $\varDelta_6 < 0$. Поскольку форма $q|_{V_2}$ особа, пространство V_2 является прямой ортогональной суммой отрицательной анизотропной прямой $\mathbb{R}e_1$ и изотропной прямой. Поскольку ограничение на V_3 неособо, ортогональное дополнение к e_1 внутри V_3 тоже неособо и содержит изотропный вектор. Поэтому оно является гиперболической плоскостью, а $V_3 = \mathbb{R}e_1 \oplus H_2$. Обратите внимание, что Δ_3 в этом случае *обязан* отличаться знаком от Δ_1, что мы и наблюдаем[1].

Упражнение 2.5. Пусть $\Delta_{i-1} \neq 0$, $\Delta_i = 0$ и $\Delta_{i+1} \neq 0$. Покажите, что $\Delta_{i-1}\Delta_{i+1} < 0$ и $V_{i+1} = V_{i-1} \dotplus H_2$.

Итак, ограничение $q|_{V_3}$ имеет сигнатуру $(1, 2)$. Те же аргументы показывают, что ограничение формы на $V_3^\perp$ невырождено и содержит изотропный вектор, а значит имеет сигнатуру $(2, 1)$ или $(1, 2)$. Поскольку знаки у Δ_3 и Δ_6 противоположны, имеет место первое, и полная сигнатура q на $\mathbb{R}^6$ равна $(1, 2) + (2, 1) = (3, 3)$. Примером такой формы является форма с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если все $\Delta_k \neq 0$, то все ограничения $q|_{V_k}$ неособы, и соседние миноры Δ_i, Δ_{i+1} различаются знаком если и только если отрицательный индекс инерции $m_{i+1} = m_i + 1$. Поэтому полный отрицательный индекс инерции m в этом случае равен числу перемен знака в последовательности $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\dim V}$.

2.3.3. Квадратичные формы над полем $\mathbb{F}_p$. Пусть $p > 2$ — простое натуральное число и $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ — поле вычетов по модулю p. Зафиксируем какой-нибудь не квадрат $\varepsilon \in \mathbb{F}_p$.

Упражнение 2.6. Убедитесь, что ненулевые квадраты образуют в мультипликативной группе $\mathbb{F}_p^*$ поля $\mathbb{F}_p$ подгруппу индекса 2. В частности, любой ненулевой элемент поля $\mathbb{F}_p$ умножением на подходящий ненулевой квадрат можно сделать равным либо 1, либо ε.

Из этого упражнения и сл. 2.5 на стр. 19 вытекает, что всякая квадратичная форма над $\mathbb{F}_p$ обратимой линейной заменой переменных приводится к виду

$$q(x) = \sum x_i^2 + \varepsilon \sum x_j^2 \tag{2-7}$$

(наборы переменных в первой и второй сумме не пересекаются). Заметим теперь, что при любых ненулевых $a, b \in \mathbb{F}_p$ и любом $c \in \mathbb{F}_p$ уравнение

$$ax_1^2 + bx_2^2 = c \tag{2-8}$$

разрешимо в $\mathbb{F}_p$ относительно (x_1, x_2), поскольку когда x_1 и x_2 независимо друг от друга пробегают поле $\mathbb{F}_p$, функции ax_1^2 и $c - bx_2^2$ принимают по $(p+1)/2$ различных значений и, стало быть, множества их значений имеют хотя бы один общий элемент $ax_1^2 = c - bx_2^2$. На языке квадратичных форм разрешимость уравнения (2-8) означает, что каждая невырожденная квадратичная форма $q : V \to \mathbb{F}_p$ на двумерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}_p$ принимает все значения из поля $\mathbb{F}_p$. В частности, существует вектор e с $q(e) = 1$, а значит, и такие координаты, в которых форма q имеет вид $x_1^2 + x_2^2$ или $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$. Это замечание позволяет сделать вторую сумму в (2-7) состоящей из не более, чем одного слагаемого. Таким образом, каждая квадратичная форма q ранга r над полем $\mathbb{F}_p$ в подходящих координатах записывается как $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + x_r^2$, если $\det q$ квадрат, и как $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$, если $\det q$ не квадрат.

[1] А квадратичных форм с $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 0$ и $\Delta_3 < 0$ просто не существует!

2.4. Автодуальные операторы на пространстве со скалярным произведением. Рассмотрим над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ векторное пространство V с невырожденной симметричной билинейной формой, которую будем обозначать через

$$(*\,,\,*) : V \times V \to \Bbbk\,, \quad u, w \mapsto (u, w)\,. \tag{2-9}$$

Линейный оператор $f : V \to V$ называется *автодуальным* или *самосопряжённым* относительно скалярного произведения (2-9), если при всех $u, w \in V$ выполняется равенство

$$(fu, w) = (u, fw)\,.$$

Упражнение 2.7. Покажите, что оператор f автодулен если и только если отвечающая ему при биекции из n° 1.3.4 на стр. 9 билинейная форма $\beta_f(u, w) = (u, fw)$ симметрична.

Матрица F самосопряжённого оператора f связана с матрицей Грама G скалярного произведения (2-9) соотношением $F^t G = GF$.

Лемма 2.2

Если автодуальный линейный оператор $f : V \to V$ переводит в себя некоторое подпространство $U \subset V$, то он переводит в себя и его ортогонал $U^\perp$.

Доказательство. Пусть $w \in U^\perp$, т. е. $(u, w) = 0$ для всех $u \in U$. Тогда $(u, fw) = (fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, ибо $fu \in U$. Тем самым, $fw \in U^\perp$. □

Лемма 2.3

Собственные векторы с разными собственными значениями у автодуального оператора ортогональны друг другу.

Доказательство. Если $Fu = \lambda u$ и $Fw = \mu w$, то из равенства $(Fu, w) = (u, Fw)$ вытекает равенство $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$. □

Предложение 2.2

Если характеристический многочлен автодуального линейного оператора $f : V \to V$ полностью раскладывается в поле $\Bbbk$ на линейные множители и все ненулевые собственные векторы оператора f анизотропны, то в пространстве V имеется ортогональный базис из собственных векторов оператора f.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если оператор f является умножением на скаляр (что имеет место при $\dim V = 1$), то подойдёт любой ортогональный базис пространства V. Допустим, что $\dim V > 1$ и оператор f не скалярен. Поскольку характеристический многочлен $\det(tE - F)$ имеет корни в поле $\Bbbk$, у оператора F есть ненулевое собственное подпространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\} \subsetneq V\,.$$

По условию леммы, оно анизотропно, и значит, скалярное произведение ограничивается на него невырождено. Поэтому $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, и ограничение скалярного произведения на $V_\lambda^\perp$ тоже невырождено. По лем. 2.2 оператор f переводит подпространство $V_\lambda^\perp$ в себя. Тем самым, характеристический многочлен оператора f является произведением характеристических многочленов ограничений $f|_{V_\lambda}$ и $f|_{V_\lambda^\perp}$. В силу единственности разложения на множители в кольце $\Bbbk[t]$ и предположения леммы, каждый из этих двух характеристических многочленов полностью раскладываются на линейные множители в поле $\Bbbk$. По индуктивному предположению, в подпространстве $V_\lambda^\perp$ есть ортогональный базис из собственных векторов оператора f. Добавляя к нему любой ортогональный базис собственного пространства V_λ, получаем нужный базис в V. □

2.4.1. Автодуальные операторы на евклидовом пространстве. Покажем, что в евклидовом пространстве V над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ условия предл. 2.2 выполняются для любого автодуального оператора.

Лемма 2.4
У любого линейного оператора $f : V \to V$ на конечномерного векторном пространстве над полем $\mathbb{R}$ имеется одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$, которое переводится оператором f в себя.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$ и образуем из него $n+1$ векторов $v, fv, f^2v, \dots, f^nv$, где $n = \dim V$ и f^kv обозначает результат k-кратного последовательного применения оператора f к вектору v. Поскольку эти векторы линейно зависимы, найдутся такие $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, что $(f^k + a_1f^{k-1} + \dots + a_{k-1}f + a_k)v = 0$. Заключённый в скобки линейный оператор можно воспринимать как результат подстановки $t = f$ в многочлен $f(t) = t^k + a_1t^{k-1} + \dots + a_{k-1}t + a_k \in \mathbb{R}[t]$. Всякий такой многочлен раскладывается в произведение $f(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \cdot \dots \cdot g_m(t)$ линейных двучленов вида $t - \alpha$ и квадратных трёхчленов вида $t^2 - \alpha t - \beta$ с вещественными коэффициентами. Подставляя в это разложение f и применяя полученный оператор к вектору v, мы заключаем, что $g_1(f) \circ g_2(f) \circ \dots \circ g_m(f)v = 0$. Рассмотрим наименьшее k, для которого вектор $w = g_{k+1}(f) \circ \dots \circ g_m(f)v$ всё ещё отличен от нуля. Тогда $g_k(f)w = 0$. Для $g_k(f) = f - \alpha$ это значит, что $f(w) = \alpha w$, т. е. одномерное подпространство $\mathbb{R} \cdot w$ переводится оператором f в себя. Для $g_k(f) = f^2 - \alpha f - \beta$ имеем $f(f(w)) = \alpha f(w) + \beta w$, т. е. линейная оболочка векторов w и $f(w)$ переводится оператором f в себя. □

Лемма 2.5
Характеристический многочлен самосопряжённого оператора на евклидовом пространстве полностью раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{R}$.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, доказывать нечего. Если $\dim V = 2$, оператор f задаётся в ортонормальном базисе симметричной матрицей

$$F = F^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} .$$

Её характеристический многочлен $\det(tE - F) = t^2 - (a + c) \cdot t + (ac - b^2)$ имеет неотрицательный дискриминант $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$ и вещественные корни. При $\dim V > 2$ в пространстве V имеется одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$, которое переводится оператором f в себя. По лем. 2.2 его ортогональное дополнение $U^\perp$ также переходит в себя под действием f, а значит, $\chi_f = \chi_{f|_U} \cdot \chi_{f|_{U^\perp}}$. Первый характеристический многочлен полностью раскладывается на линейные множители над $\mathbb{R}$ по уже доказанному, второй — по предположению индукции. □

Теорема 2.6 (теорема о нормальном базисе)
Любая квадратичная форма q на евклидовом пространстве V имеет в подходящем ортонормальном базисе пространства V диагональную матрицу Грама. Её диагональные элементы с

точностью до перестановки не зависят от выбора базиса и равны собственным числам того единственного автодуального оператора $f : V \to V$, для которого $q(v) = (v, fv)$. Если все эти собственные числа различны, ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы q диагональна, единственен с точностью до перестановки базисных векторов и замены их направлений на противоположные.

Доказательство. По предл. 2.2 в V есть ортонормальный базис из собственных векторов оператора f_q. Матрица Грама формы q в любом ортонормальном базисе совпадает с матрицей оператора f_q. В ортонормальном базисе из собственных векторов она диагональна, причём на её диагонали стоят собственные числа оператора f_q, и каждое собственное число λ присутствует столько раз, какова кратность корня λ в характеристическом многочлене оператора f_q. Поэтому с точностью до перестановки диагональных элементов такая матрица не зависит от выбора нормального базиса. Если все диагональные элементы различны, каждое собственное подпространство оператора f_q одномерно, все они ортогональны друг другу по лем. 2.3, и нормальные базисные векторы с точностью до знака задаются как векторы единичной длины, порождающие эти подпространства. □

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.6. Ненулевые квадраты составляют образ гомоморфизма мультипликативных групп $\mathbb{F}_p^* \to \mathbb{F}_p^*$, $x \mapsto x^2$. Так как уравнение $x^2 = 1$ имеет в поле $\mathbb{F}_p$ ровно два корня $x = \pm 1$, ядро этого гомоморфизма состоит из двух элементов, а значит, образ является подгруппой порядка $(p - 1)/2$.

Упр. 2.7. Если оператор f самосопряжён, то $\beta_f(u, w) = (u, fw) = (fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u)$. Если билинейная форма β_f симметрична, то $(fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u) = \beta_f(u, w) = (u, fw)$