ПГ 2019◊1. Найдите прообраз точки $-\frac{35}{46}$ при дробно линейном преобразовании рациональной проективной прямой, переводящем точки 2, $\frac{4}{3}$, 1 соответственно в точки $-\frac{5}{6}$, $-\frac{11}{14}$, $-\frac{3}{4}$.

Решение. Двойное отношение точек-образов

$$\left[-\frac{5}{6}, -\frac{11}{14}, -\frac{3}{4}, -\frac{35}{46}\right] = \frac{\det\begin{pmatrix}-11 & -35\\ 14 & 46\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}-5 & -3\\ 6 & 4\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}-5 & -35\\ 6 & 46\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}-11 & -3\\ 14 & 4\end{pmatrix}} = \frac{16\cdot 2}{20\cdot 2} = \frac{4}{5}\,.$$

Поскольку дробно линейное преобразование сохраняет двойные отношения, искомая точка $(\alpha : \beta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{4}{5} = \left[2, \frac{4}{3}, 1, \frac{\alpha}{\beta}\right] = \frac{\det\begin{pmatrix}4 & \alpha\\ 3 & \beta\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}2 & \alpha\\ 1 & \beta\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}} = \frac{4\beta - 3\alpha}{2\beta - \alpha}\,,$$

откуда $8\beta - 4\alpha = 20\beta - 15\alpha$ и $\alpha/\beta = 12/11$.

ПГ 2019◊2. Найдите косинус меньшего из двух смежных углов между касательными прямыми, опущенными на конику $-12x^2 + 28xy + 4x - 9y^2 - 8y = 0$ из точки $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.

Первое решение. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : y)$ коника имеет матрицу Грама

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 2 & -12 & 14\\ -4 & 14 & -9\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Прямая (pv), выходящая из заданной точки $p = (5 : 2 : 1)$ в направлении $v = (0 : t_1 : t_2)$, касается коники если и только если ограничение квадратичной формы (1) на линейную оболочку векторов p, v вырождено. Поскольку матрица Грама этих векторов[1]

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 0 & t_1 & t_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 2 & -12 & 14\\ -4 & 14 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & t_1\\ 1 & t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 2\,t_1 - 4\,t_2 & -12\,t_1 + 14\,t_2 & 14\,t_1 - 9\,t_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & t_1\\ 1 & t_2\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}-1 & -t_2\\ -t_2 & -12\,t_1^2 + 28\,t_1t_2 - 9\,t_2^2\end{pmatrix}$$

имеет определитель $12\,t_1^2 - 28\,t_1t_2 + 8\,t_2^2$, касательные направления $t = (t_1 : t_2)$ являются корнями квадратного уравнения $3t^2 - 7t + 2 = 0$ с дискриминантом $49 - 24 = 5^2$ и равны $v_+ = (2 : 1)$ и $v_- = (1 : 3)$. Косинус меньшего из смежных улов между этими направлениями равен

$$\frac{|(v_+, v_-)|}{\sqrt{(v_+, v_+)(v_-, v_-)}} = \frac{5}{\sqrt{5\cdot 10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

[1]Обратите внимание, что в силу симметричности матрицы Грама достаточно вычислить только три её элемента.

Второе решение. Касательные, опущенные на конику (1) из точки $p = (5 : 2 : 1)$, касаются коники в точках её пересечения с полярой точки p, которая задаётся уравнением $\eta_0 x_0 + \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 = 0$ с коэффициентами

$$(\eta_0 : \eta_1 : \eta_2) = (5 : 2 : 1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -12 & 14 \\ -4 & 14 & -9 \end{pmatrix} = (0 : 0 : -1) = (0 : 0 : 1) .$$

Выберем в качестве базиса на поляре точки $a = (1 : 0 : 0)$ и $b = (0 : 1 : 0)$. Точка $t_0 a + t_1 b$ лежит на конике если и только если

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -12 & 14 \\ -4 & 14 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t_1 & 2\,t_0 - 12\,t_1 & -4\,t_0 + 14\,t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 4\,t_0 t_1 - 12\,t_1^2 = 0 ,$$

т. е. при $(t_0 : t_1) = (1 : 0)$ и $(t_0 : t_1) = (12 : 4) = (3 : 1)$. Таким образом, касательные прямые пересекают конику в точках $q_1 = (1 : 0 : 0)$ и $q_2 = (3 : 1 : 0)$ с аффинными координатами $(0, 0)$ и $(1/3, 0)$ соответственно. Абсолютная величина косинуса угла между векторами $\overrightarrow{pq}_1 = (-2/5, -1/5)$ и $\overrightarrow{pq}_2 = (-1/15, -1/5)$ такая же, как между векторами $v_1 = (2, 1)$ и $v_2 = (1, 3)$, и равна

$$\frac{|(v_1, v_2)|}{\sqrt{(v_1, v_1)(v_2, v_2)}} = \frac{5}{\sqrt{5 \cdot 10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Третье решение. В двойственных координатах $(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2)$ на $\mathbb{P}_2^\times$ матрица Грама двойственной коники пропорциональна присоединённой матрице[2] матрицы (1) и с точностью до умножения на константу равна[3]

$$\begin{pmatrix} -88 & -38 & -20 \\ -38 & -16 & -8 \\ -20 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 44 & 19 & 10 \\ 19 & 8 & 4 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Коэффициенты $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ касательных прямых $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, опущенных на исходную конику (1) на $\mathbb{P}_2$ из точки $p = (5 : 2 : 1) \in \mathbb{P}_2$, суть точки пересечения двойственной коники (2) с прямой $5\xi_0 + 2\xi_1 + \xi_2 = 0$ на $\mathbb{P}_2^\times$. Выберем в качестве базиса на этой прямой точки $\eta = (-2 : 5 : 0)$ и $\zeta = (0 : -1 : 2)$. Точка $t_0 \eta + t_1 \zeta$ лежит на конике (2) если и только если

$$\begin{pmatrix} -2\,t_0 & 5\,t_0 - t_1 & 2\,t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44 & 19 & 10 \\ 19 & 8 & 4 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\,t_0 \\ 5\,t_0 - t_1 \\ 2\,t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,t_0 + t_1 & 2\,t_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\,t_0 \\ 5\,t_0 - t_1 \\ 2\,t_1 \end{pmatrix} =$$
$$= -4\,t_0^2 - 4\,t_0 t_1 = 0 ,$$

т. е. при $(t_0 : t_1) = (0 : 1)$ и $(t_0 : t_1) = (-1 : 1)$. Поэтому искомые касательные прямые задаются однородными уравнениями $-x_1 + 2\,x_2 = 0$ и $2\,x_0 - 6\,x_1 + 2\,x_2 = 0$, которые в аффинной карте U_0 превращаются в $x - 2\,y = 0$ и $3\,x - y = 1$. Нормальные векторы этих прямых суть $u = (1, -2)$ и $w = (3, -1)$. Поэтому косинус меньшего из смежных улов между прямыми равен

$$\frac{|(u, w)|}{\sqrt{(u, u)(w, w)}} = \frac{5}{\sqrt{5 \cdot 10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

ПГ 2019◇3. Напишите однородное уравнение проективной коники, проходящей через точки

$$(2 : 2 : 1), \quad (7 : 6 : 2), \quad (3 : 2 : 1)$$

[2]Т. е. матрице алгебраических дополнений к элементам матрицы (1).

[3]Опять-таки, в силу симметричности достаточно вычислить только шесть её элементов.

и касающейся прямой $16x_0 - 22x_1 + 14x_2 = 0$ в точке $(27 : 26 : 10)$.

Решение. Коники, проходящие через точки $a = (7 : 6 : 2)$, $b = (3 : 2 : 1)$ и касающиеся прямой ℓ с уравнением $8x_0 - 11x_1 + 7x_2 = 0$ в точке $c = (27 : 26 : 10)$, образуют пучок, порождённый распавшимися кониками $C = \ell \cup (ab)$ и $D = (ca) \cup (cb)$. Если последние задаются квадратичными формами $f(x)$ и $g(x)$ от однородных координат $x = (x_0 : x_1 : x_2)$, то единственная проходящая через точку $p = (2 : 2 : 1)$ коника пучка с точностью до постоянного множителя задаётся квадратичной формой $g(p)\,f(x) - f(p)\,g(x)$. Прямые (ab), (ac) и (bc) задаются линейными формами

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 7 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2x_0 - x_1 - 4x_2$$

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 7 & 6 & 2 \\ 27 & 26 & 10 \end{pmatrix} = 8x_0 - 16x_1 + 20x_2 \sim 2x_0 - 4x_1 + 5x_2$$

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 27 & 26 & 10 \end{pmatrix} = -6x_0 - 3x_1 + 24x_2 \sim -2x_0 - x_1 + 8x_2\,,$$

откуда

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) &= (2x_0 - x_1 - 4x_2)(8x_0 - 11x_1 + 7x_2) = \\ &= 16x_0^2 + 11x_1^2 - 28x_2^2 - 30x_0x_1 - 18x_0x_2 + 37x_1x_2\,, \\ f(2,2,1) &= (4 - 2 - 4)(16 - 22 + 7) = -2\,, \\ g(x_0, x_1, x_2) &= (2x_0 - 4x_1 + 5x_2)(-2x_0 - x_1 + 8x_2) = \\ &= -4x_0^2 + 4x_1^2 + 40x_2^2 + 6x_0x_1 + 6x_0x_2 - 37x_1x_2\,, \\ g(2,2,1) &= (4 - 8 + 5)(-4 - 2 + 8) = 2\,. \end{aligned}$$

Искомая коника задаётся квадратичной формой

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) + g(x_0, x_1, x_2) = 12x_0^2 + 15x_1^2 + 12x_2^2 - 24x_0x_1 - 12x_0x_2 \sim \\ \sim 4x_0^2 + 5x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_0x_1 - 4x_0x_2\,. \end{aligned}$$

ПГ 2019⋄4. Определите тип евклидовой коники $-x^2 + 2xy - 4x - y^2 + 6y - 3 = 0$, и если эта коника центральная, то найдите её центр и направления главных осей, а если парабола — направление оси и вершину.

Решение. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : y)$ коника имеет матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

с главными нижними угловыми минорами $\Delta_{12} = 0$ и $\Delta_{012} = 3$. Следовательно, она непустая и гладкая. Полюс бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$ находится в точке

$$x_* = \left(\Delta_{12} : -\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0 : 1 : 1)$$

и лежит на этой прямой, т. е. коника касается бесконечно удалённой прямой в точке $x_* = (0 : 1 : 1)$ и, тем самым, является параболой с осью, направленной вдоль вектора $(1 : 1)$. Ось является полярой евклидово перпендикулярного к x_* направления $y_* = (0 : -1 : 1)$ и задаётся линейным однородным уравнением $\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = 0$ с коэффициентами

$$(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) = (0 : -1 : 1)\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (5 : 2 : -2)\,.$$

Выберем на оси точку $e = (-2 : 5 : 0)$. Вершина z_* параболы является отличным от x_* и лежащим на прямой (ex_*) изотропным вектором билинейной формы β с матрицей Грама (3). Такой вектор получается отражением точки x_* в ортогонале к e относительно формы β:

$$z_* = \sigma_e(x_*) = x_* - 2\,\frac{\beta(e, x_*)}{\beta(e, e)}\,e\,.$$

Скалярные произведения $\beta(e, x_*)$ и $\beta(e, e)$ вычисляются умножением строки

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

на столбцы координат векторов x_* и e и равны $\beta(e, x_*) = -2$, $\beta(e, e) = 3$. Таким образом, вершина параболы находится в точке $z_* = (0, 1, 1) + \frac{4}{3}(-2, 5, 0) = (-8 : 23 : 3)$ с аффинными координатами

$$(-23/8, -3/8)\,.$$

ПГ 2019◇5*. Постройте рациональную параметризацию коники, заданной аффинным уравнением

$$-28x^2 + 20xy + 24x - 4y^2 - 8y - 5 = 0\,.$$

Первое решение. Умножим уравнение коники на -1. Получим квадратичную форму, матрица Грама которой в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : y)$ равна

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -12 & 4 \\ -12 & 28 & -10 \\ 4 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Если коника непустая и гладкая, то B-ортогональное дополнение к анизотропному базисному вектору e_2 должно быть гиперболической плоскостью. Эта плоскость порождается ортогональными проекциями базисных векторов e_0, e_1:

$$e_0 - \frac{\beta(e_0, e_2)}{\beta(e_2, e_2)}\,e_2 = (1, 0, 0) - (0, 0, 1) = (1, 0, -1)$$
$$e_1 - \frac{\beta(e_1, e_2)}{\beta(e_2, e_2)}\,e_2 = (0, 1, 0) + \frac{5}{2}\,(0, 0, 1) = (0, 1, 5/2)\,.$$

Положим $u_0 = (1, 0, -1)$, $u_1 = (0, 2, 5)$. Эти векторы имеют матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -12 & 4 \\ -12 & 28 & -10 \\ 4 & -10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Положим $w_1 = u_1 - \beta(u_0, u_1)\,u_0 = 4\,u_0 + u_1 = (4, 2, 1)$. Тогда $\beta(u_0, w_1) = 0$ и

$$\beta(w_1, w_1) = 16 - 8 \cdot 4 + 12 = -4\,.$$

В базисе (u_0, w_1, e_2) форма β имеет диагональную матрицу Грама с элементами $(1, -4, 4)$ на диагонали. В однородных координатах $(z_0 : z_1 : z_2)$ относительно этого базиса коника задаётся уравнением

$$z_0^2 = 4(z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$$

и имеет рациональную параметризацию

$$z_0 = 2\,t_0 t_1\,, \quad z_1 + z_2 = t_0^2\,, \quad z_1 - z_2 = t_1^2\,, \quad \text{т. е.}$$
$$(z_0 : z_1 : z_2) = (4\,t_0 t_1 : t_0^2 + t_1^2 : t_0^2 - t_1^2)\,.$$

В исходных однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ эта параметризация приобретает вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\,t_0 t_1 \\ t_0^2 + t_1^2 \\ t_0^2 - t_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,t_0 t_1 + 4\,t_0^2 + 4\,t_1^2 \\ 2\,t_0^2 + 2\,t_1^2 \\ 2\,t_0^2 - 4\,t_0 t_1 \end{pmatrix}.$$

В исходных аффинных координатах на евклидовой плоскости это записывается формулами

$$x = \frac{t^2 + 1}{2\,t^2 + 2\,t + 2}, \quad y = \frac{t^2 - 2\,t}{2\,t^2 + 2\,t + 2}, \quad \text{где} \quad t = t_0 / t_1 \in \mathbb{Q} \sqcup \infty. \tag{4}$$

Второе решение. Ограничение коники на прямую $y = 0$ задаётся уравнением

$$28\,x^2 - 24\,x + 5 = 0$$

с $D/4 = 144 - 140 = 2^2$ и корнями $1/2$, $5/14$. Таким образом, точка $p = (2 : 1 : 0)$ лежит на конике. Все рациональные направления $t = (0 : t_1 : t_2)$ анизотропны, поскольку ограничение коники на бесконечно удалённую прямую задаётся уравнением $7\,x^2 - 5\,xy + y^2 = 0$, у которого нет рациональных корней. Каждая прямая (pt) пересекает конику в точке p и точке[4]

$$q(t) = \sigma_t(p) = p - 2\,\frac{\beta(t,p)}{\beta(t,t)}\,t = (2\,\beta(t,t) : \beta(t,t) - 2t_1\,\beta(t,p) : -2t_2\,\beta(t,p)).$$

Скалярные произведения $\beta(t,p)$ и $\beta(t,t)$ получаются умножением столбцов координат векторов p и t на строку

$$\begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -12 & 4 \\ -12 & 28 & -10 \\ 4 & -10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12\,t_1 + 4\,t_2 & 28\,t_1 - 10\,t_2 & -10\,t_1 + 4\,t_2 \end{pmatrix}$$

Они равны $\beta(t,p) = 4\,t_1 - 2\,t_2$ и $\beta(t,t) = 28\,t_1^2 - 20\,t_1 t_2 + 4\,t_2^2$, откуда

$$\begin{aligned} q(t) &= \left(56\,t_1^2 - 40\,t_1 t_2 + 8\,t_2^2 : 20\,t_1^2 - 16\,t_1 t_2 + 4\,t_2^2 : -8\,t_1 t_2 + 4\,t_2^2\right) = \\ &= \left(14\,t_1^2 - 10\,t_1 t_2 + 2\,t_2^2 : 5\,t_1^2 - 4\,t_1 t_2 + t_2^2 : -2\,t_1 t_2 + t_2^2\right). \end{aligned}$$

В исходных аффинных координатах на евклидовой плоскости это записывается формулами

$$x = \frac{t^2 - 4\,t + 5}{2\,t^2 - 10\,t + 14}, \quad y = \frac{t^2 - 2\,t}{2\,t^2 - 10\,t + 14}, \quad \text{где} \quad t = t_2 / t_1 \in \mathbb{Q} \sqcup \infty. \tag{5}$$

Вопрос: какое дробно линейное преобразование переменной t превращает параметризацию (4) в параметризацию (5)?

Ответ: $t \mapsto 2 - t$, ибо оно оставляет на месте 1 и ∞ и меняет местами 0 и 2.

[4] Эта точка является отражением изотропного вектора p в ортогонале к анизотропному вектору t.