Гиперболическая геометрия.

Терминология. Зафиксируем в $\mathbb{R}^{n+1}$ скалярное *произведение Лоренца* $(x,y)_{\mathbb{L}} = x_0y_0 - \sum_{i=1}^n x_iy_i$. Квадрика $I = \{x \in \mathbb{P}_n \mid (x,x)_{\mathbb{L}} = 0\} \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ называется *абсолютом*. Множество $\mathbb{L}^n = \{x \in \mathbb{P}_n \mid (x,x)_{\mathbb{L}} > 0\}$ с таким расстоянием $|a,b|_{\mathbb{L}}$, что $\operatorname{ch}|a,b|_{\mathbb{L}} = |(a,b)_{\mathbb{L}}|/\sqrt{(a,a)_{\mathbb{L}}(b,b)_{\mathbb{L}}}$, называется n-мерным *пространством Лобачевского* или *гиперболическим пространством*. Проективные автоморфизмы $\mathbb{P}_n$, вызванные изометриями формы Лоренца, называются *движениями*. Проективные прямые $\ell \subset \mathbb{P}_n$ называются *геодезическими*. Полярное к точке p *векторное* пространство $T_p\mathbb{L}^n \overset{\text{def}}{=} p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (p,v) = 0\}$ называется *касательным пространством* к $\mathbb{L}^n$ в точке $p \in \mathbb{L}^n$. На $T_p\mathbb{L}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ есть евклидово скалярное произведение $(v,w) \overset{\text{def}}{=} -(v,w)_{\mathbb{L}}$. Длины касательных векторов и углы между ними всегда вычисляются в этой евклидовой структуре.

Г16◇1. Покажите, что $|a,b|_{\mathbb{L}} = \left|\frac{1}{2}\ln[a,b,c,d]\right|$, где $c,d \in I$ суть точки пересечения прямой $(ab) \subset \mathbb{P}_n$ с абсолютом (ср. с Зад. Г13◇3 и Г15◇1).

Г16◇2. Убедитесь, что для каждой точки $p \in \mathbb{L}^n$ скалярное произведение $(v,w) = -(v,w)_{\mathbb{L}}$ на векторном пространстве $T_p\mathbb{L}^n = p^\perp$ и впрямь евклидово, а каждая геодезическая $\ell \ni p$ имеет вид $\ell_{p,v} = \{p + tv \in \mathbb{P}_n \mid t \in \mathbb{R}\}$ для некоторого вектора[1] $v \in T_a\mathbb{L}^n$, задаваемого геодезической ℓ однозначно с точностью до пропорциональности.

Г16◇3. Рассмотрим касательные векторы $u,w \in T_a\mathbb{L}^2$ как точки лоренцево полярной к $a \in \mathbb{P}_2$ проективной прямой $\ell = \mathbb{P}(a^\perp)$ и обозначим через $\{\tau_1,\tau_2\} = \ell \cap I \subset \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ *комплексные* точки пересечения прямой ℓ с абсолютом на комплексной плоскости $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$. Покажите, что **а)** евклидов угол между геодезическими $\ell_{p,u}$ и $\ell_{p,w}$ равен $\frac{1}{2i}\ln[u,w,\tau_1,\tau_2]$ **б)** перпендикулярность двух пересекающихся геодезических означает их сопряжённость относительно коники I в пучке прямых с центром в точке пересечения **в)** пучок концентрических гиперболических окружностей с центром в данной точке a это пучок коник на $\mathbb{P}_2$, натянутый на I и двойную прямую $\mathbb{P}(a^\perp)$.

Г16◇4. Пусть при каждом $t \in [0,1]$ кривая $[0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $t \mapsto v_t$, имеет $(v_t,v_t)_{\mathbb{L}} = 1$ и определён *касательный вектор* $\dot v_t \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0}(v_{t+\Delta t} - v_t)/\Delta t \in \mathbb{R}^{n+1}$. Покажите, что **а)** $\dot v_t \in T_{v_t}\mathbb{L}^n$ **б)** если образ кривой в $\mathbb{L}^n$ является отрезком геодезической $[A,B]$, то $\int_0^1 |\dot v_t|\,dt = |AB|_{\mathbb{L}}$.

Г16◇5. Докажите, что $\mathbb{L}^n$ является метрическим пространством. Компактно ли оно?

Г16◇6. Реализуется ли кратчайшее расстояние от точки p до прямой $\ell \not\ni p$ вдоль перпендикуляра, опущенного из p на ℓ, и много ли есть таких перпендикуляров?

Г16◇7. Докажите для любых $n+2$ точек $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{L}^n$ равенство $\det\left(\operatorname{ch}|p_i,p_j|_{\mathbb{L}}\right) = 0$ (можно ограничиться $n = 2,3$).

Г16◇8. Переговорите всю гиперболическую «терминологию» для эллиптических пространств, заменив лоренцеву форму $(x,y)_{\mathbb{L}}$ на евклидову $(x,y)_{\mathbb{E}} = \sum_{i=0}^n x_iy_i$, и решите для эллиптического пространства аналоги **а)** зад. Г16◇2 **б)** зад. Г16◇3 **в)** зад. Г16◇4 **г)** зад. Г16◇5 **д)** зад. Г16◇6.

Г16◇9. Бывают ли отличные от движений преобразования $\mathbb{L}^n$, увеличивающие все расстояния между точками в одно и то же число раз? (Можно ограничиться $n = 2,3$.)

Г16◇10. Верно ли, что для любых двух точек $a,b \in \mathbb{L}^n$ существует отражение σ_w относительно анизотропного вектора w с $(w,w)_{\mathbb{L}} < 0$, переводящее a в b? Покажите, что каждое движение пространства $\mathbb{L}^n$ является композицией $\leqslant (n+1)$ ортогональных отражений в гиперплоскостях.

Г16◇11. Как действует на $\mathbb{L}^n$ отражение σ_a задаваемое вектором $a \in \mathbb{L}^n$?

Г16◇12. Для углов между (касательными) векторами, отложенными от одной точки гиперболической, эллиптической или евклидовой плоскости, докажите равенство $\measuredangle(a,b) + \measuredangle(b,c) = \measuredangle(a,c)$.

Г16◇13. Для каких $n \geqslant 3$ на гиперболической плоскости $\mathbb{L}^2$ существует n-угольник, все углы которого равны π/n, а стороны имеют равную заданную длину? Верно ли, что все такие многоугольники переводятся друг в друга движениями?

Г16◇14. На плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ дан четырёхугольник, у которого три угла прямые, а длины двух из прилежащих к этим углам сторон равны a и b. Найдите четвёртый угол.

---

[1] Он называется *направляющим вектором* или *вектором скорости* геодезической ℓ.

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 16 (5 апреля)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3а			
б			
в			
4а			
б			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
д			
9			
10			
11			
12			
13			
14			