Словарик «Линейная алгебра – Проективная геометрия»

Г10◇1. Сколько k-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$ над полем из q элементов?

Г10◇2. При каком условии на три прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 на проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ в пространстве V можно выбрать базис так, чтобы каждая прямая ℓ_i была бесконечно удалённой для стандартной аффинной карты $U_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_i \neq 0\}$?

Г10◇3. Укажите три точки $A, B, C \in \mathbb{P}_2$ так, чтобы точки $A' = (1 : 0 : 0)$, $B' = (0 : 1 : 0)$ и $C' = (0 : 0 : 1)$ лежали, соответственно, на прямых (BC), (CA) и (AB), а прямые (AA'), (BB') и (CC') пересекались в точке $(1 : 1 : 1)$.

Г10◇4. Рассмотрим в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{v \in V \mid \xi(v) \neq 0\}$, отвечающую ненулевому ковектору $\xi \in V^*$, и k-мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_n$, ассоциированное с $(k+1)$-мерным векторным подпространством $W \subset V$. Верно ли, что либо $K \cap U_\xi = \varnothing$, либо $K \cap U_\xi$ видимо в U_ξ как k-мерное аффинное подпространство?

Г10◇5. Подмножество $\Phi \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ таково, что в каждой аффинной карте, с которой оно пересекается, его видно как k-мерное аффинное подпространство (где $k < n$ не зависит от карты). Обязательно ли $\Phi = \mathbb{P}(W)$ для некоторого $(k+1)$-мерного векторного подпространства $W \subset V$? Всегда ли существуют аффинные карты, в которых Φ вообще не видно?

Г10◇6. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются).

Г10◇7. Пусть сумма размерностей двух непересекающихся проективных подпространств L_1 и L_2 в $\mathbb{P}_n$ равна $n-1$. Покажите, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \smallsetminus (L_1 \sqcup L_2)$ существует единственная прямая $\ell \ni p$, пересекающая как L_1, так и L_2.

Г10◇8. Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными*. Покажите, что **а)** каждое из них является пространством гиперплоскостей в другом **б)** правило $\mathbb{P}(W) \longleftrightarrow \mathbb{P}(\operatorname{Ann} W)$ устанавливает оборачивающую включение биекцию между k-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-k-1)$ – мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$ **в)** с учётом (а) биекция из (б) сопоставляет подпространству $H \subset \mathbb{P}_n$ множество всех содержащих его гиперплоскостей.

Г10◇9. Покажите, что для любых четырёх разных упорядоченных точек $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$ *двойное отношение*[1] $[p_1, p_2, p_3, p_4] \stackrel{\text{def}}{=} (\det(p_1, p_2) \cdot \det(p_3, p_4)) : (\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_3, p_2))$ корректно определено и не зависит от выбора координат, и что две четвёрки точек на $\mathbb{P}_1$ проективно конгруэнтны, если и только если их двойные отношения одинаковы.

Г10◇10. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = \vartheta$. Найдите $[p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}]$ для всех 24 перестановок $\sigma \in S_4$ и опишите все такие ϑ, для которых число различных ответов меньше, чем для общего ϑ.

Г10◇11. Нетождественный линейный проективный автоморфизм φ называется *инволюцией*, если $\varphi^2 = \mathrm{Id}$. Покажите, что всякая инволюция проективной прямой над алгебраически замкнутым полем имеет ровно две различных неподвижных точки.

Г10◇12 (перекрёстная ось[2]). Для пары различных прямых $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ и линейного проективного изоморфизма $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ опишите ГМТ пересечения прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где две точки $x \neq y$ независимо пробегают прямую ℓ_1.

Г10◇13 (теорема Дезарга). Даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на $\mathbb{P}_2$. Покажите, что три точки пересечения пар их соответственных[3] сторон коллинеарны, если и только если три прямые, проходящие через пары соответственных вершин, пересекаются в одной точке[4].

[1] По-английски *cross-ratio*.

[2] По-английски *cross-axis*.

[3] Т. е. поименованных одинаковыми буквами.

[4] Треугольники, обладающие этими свойствами, называются *перспективными*.

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 10 (8 февраля)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
9			
10			
11			
12			
13			