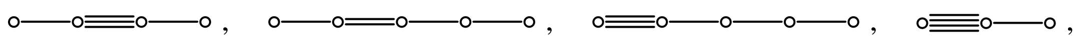
Правильные многогранники (по Кокстеру).

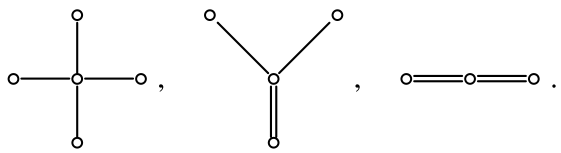
Г7⅔◇1. Перечислите все связные графы Кокстера типа «мерседес».

Г7⅔◇2. Покажите, что в графе Кокстера нет подграфов вида



а также подграфов, получающихся из них увеличением кратности их кратного ребра.

Г7⅔◇3. Покажите, что в графе Кокстера нет подграфов вида



Далее мы следуем определениям и обозначениям из Листка 7½. Под *симметрией* фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ понимается любое преобразование $\Phi \xrightarrow{\sim} \Phi$ из полной группы O_Φ фигуры Φ.

Г7⅔◇4. Для любой грани Γ правильного многогранника P покажите, что каждая симметрия $g \in \mathrm{O}_\Gamma$ продолжается до симметрии $\widetilde{g} \in \mathrm{O}_P$, причём всякое отражение[1] $g \in \mathrm{O}_\Gamma$ продолжается до отражения $\widetilde{g} \in \mathrm{O}_P$.

Г7⅔◇5. Зафиксируем вершину F_0 правильного многогранника P, примыкающее к ней ребро F_1, примыкающую к нему двумерную грань F_2, и т. д. вплоть до самого многогранника $F_n = P$. Докажите, что группа O_P порождается отражением σ_1, продолжающим отражение ребра F_1 относительно его середины, отражением σ_2, продолжающим отражение двумерной грани F_2 относительно относительно оси, проходящей через вершину F_0, отражением σ_3, продолжающим отражение трёхмерной грани F_3 относительно относительно плоскости, проходящей через ребро F_1, и т. д. вплоть до отражения σ_n самого многогранника P относительно гиперплоскости, проходящей через грань $F_{n-2} \subset P$ коразмерности 2 (всего n отражений).

Г7⅔◇6. Для произвольного флага $\varnothing = F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n = P$ обозначим через ν_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, количество k-мерных граней многогранника P, содержащихся в F_{k+1} и содержащих F_{k-2}. Через H_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим гиперплоскость, проходящую через барицентры всех граней F_ν с $\nu \neq i-1$, через a_i — единичный нормальный вектор этой гиперплоскости, направленный в то полупространство, где лежит барицентр грани F_{i-1}, а через σ_i — отражение в гиперплоскости H_i. Покажите, что: **а)** последовательность $\boldsymbol{\nu}(P) = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1})$ это символ Шлефли[2] **б)** векторы a_i составляют систему простых корней группы O_P **в)** простые отражения σ_i удовлетворяют соотношениям $\sigma_i^2 = \left(\sigma_i \sigma_{i+1}\right)^{\nu_i} = \mathrm{Id}$ **г)** стабилизатор грани F_k в группе O_P порождается простыми отражениями σ_i с $i \neq k+1$.

Г7⅔◇7. Покажите, что граф Кокстера группы O_P *линеен*[3] и находится в списке: A_n, B_n, H_3, H_4, F_4, $I_2(m)$, а порядок $|\,\mathrm{O}_P\,|$ равен, соответственно, $(n+1)!$, $2^n n!$, 120, 14400, 1152, $2m$.

Г7⅔◇8. Покажите, что каждый граф в предыдущем списке отвечает ровно одному или двум (с точностью до подобия) правильным многогранникам P, двойственным друг другу в смысле задачи Г7½◇5, и получите отсюда второе решение задачи Г7½◇7.

Г7⅔◇9*. Для каждого правильного многогранника подсчитайте количество всех его граней каждой возможной размерности[4].

[1] В гиперплоскости, лежащей внутри наименьшего аффинного подпространства, содержащего грань Γ.

[2] См. задачу Г7½◇2.

[3] Т. е. не содержит вершин, соединённых более чем с двумя другими разными вешинами.

[4] Ответ на эту задачу имеется на стр. 47 книги: *Е. Ю. Смирнов.* «Группы отражений и правильные многогранники». М.: МЦНМО, 2009.

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 7⅔ (необязательный)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
в			
г			
7			
8			
9			