Многомерие.

Г4◇1. Обозначим через A, B, C, D, E концы стандартных базисных векторов в $\mathbb{R}^5$, а через X середину отрезка, соединяющего центры треугольников ABC и CDE. Проходящая через X прямая YZ имеет точку Y на прямой AE, а точку Z в плоскости BCD. Найдите $\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{YZ}$.

Г4◇2. Пусть точка p лежит строго внутри четырёхмерного симплекса $ABCDE$ из предыдущей задачи[1]. Можно ли провести через точку p **а)** двумерную плоскость, не пересекающую ни одного ребра[2] **б)** прямую, не пересекающую ни одной двумерной грани[3] этого симплекса?

Г4◇3. В четырёхмерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ заданы непересекающиеся прямая $\ell = p + v \cdot t$ и двумерная плоскость $\Pi = q + U$, такие что $v \notin U$. Верно ли, что прямые (ab) с $a \in \ell$, $b \in \Pi$ заметают всё пространство $\mathbb{A}^4$?

Г4◇4. В четырёхмерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ над бесконечным полем задано конечное множество двумерных аффинных плоскостей. Всегда ли найдётся двумерная плоскость, которая **а)** не пересекается ни с одной из них **б)** пересекает каждую из них в единственной точке?

Г4◇5. Приведите пример конечномерного пространства W и трёх попарно трансверсальных подпространств $U, V, T \subset W$, таких что $\dim U + \dim V + \dim T = \dim W$, но $W \neq U \oplus V \oplus T$.

Г4◇6. Пусть $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$ для некоторых подпространств $U, V \subset V$. Обязательно ли $U + V$ равно одному из подпространств U, V, а $U \cap V$ — другому?

Г4◇7. Пусть k-мерные подпространства $W_1, W_2, \dots, W_m \subset V$ таковы, что $\dim W_i \cap W_j = k - 1$ для всех $i \neq j$. Покажите, что существует либо $(k-1)$-мерное подпространство $U \subset V$, содержащееся во всех W_i, либо $(k+1)$-мерное подпространство $W \subset V$, содержащее все W_i.

Г4◇8. Может ли **а)** векторное **б)** аффинное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа подпространств меньшей размерности?

Г4◇9. Сколько k-мерных векторных подпространств в n-мерном векторном пространстве над полем из q элементов? Найдите предел этого количества для фиксированных n и k и $q \to 1$.

Г4◇10. Сколько k-мерных аффинных подпространств имеется в n-мерном аффинном пространстве над конечным полем из q элементов?

Г4◇11. Может ли пересечение положительного ортанта[4] в $\mathbb{R}^4$ с некоторой двумерной плоскостью быть квадратом в стандартной евклидовой структуре на $\mathbb{R}^4$?

Г4◇12. При каких c четырёхмерный куб $I^4 \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall i\ |x_i| \leqslant 1\}$ пересекается с гиперплоскостью $\sum x_i = c$? Нарисуйте все трёхмерные многогранники, которые высекаются из куба такими гиперплоскостями. Если задача вызывает затруднения, потренируйтесь сначала на сечениях трёхмерного куба[5] $I^3 \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \forall i\ |x_i| \leqslant 1\}$ гиперплоскостями $\sum x_i = c$ в $\mathbb{R}^3$.

Г4◇13. Нарисуйте развёртку трёхмерной поверхности четырёхмерного куба[6] из предыдущей задачи и напишите инструкцию по склейке[7] четырёхмерного куба из этой развёртки.

Г4◇14. Нарисуйте какую-нибудь двумерную параллельную проекцию четырёхмерного куба, у которой все вершины различны.

Г4◇15. В какой трёхмерный многогранник перейдёт I^4 при факторизации $\mathbb{R}^4 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ по одномерному подпространству, порождённому суммой стандартных базисных векторов?

---

[1] Т. е. является барицентрической комбинацией точек $ABCDE$ со строго положительными весами.

[2] Прямой, проходящей через какие-нибудь две вершины.

[3] Плоскости, проходящей через какие-нибудь три вершины.

[4] Множества всех $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ с $x_i \geqslant 0$ для всех i.

[5] Алгебраически и те и другие сечения легко описываются в барицентрических координатах относительно треугольника (соотв. тетраэдра) с вершинами в точках пересечения плоскости с тремя (соотв. четыртмя) рёбрами куба, выходящими из вершины $(-1, -1, -1)$ (соотв. $(-1, -1, -1, -1)$) или же относительно центрально симметричного треугольника (соотв. тетраэдра) высекаемого рёбрами, входящими в противоположную вершину.

[6] Она представляет собою трёхмерный многогранник, собранный из обычных трёхмерных кубиков.

[7] Укажите, какие пары двумерных граней трёхмерных кубов надлежит склеить друг с другом и как именно.

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 4 (28 сентября)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
3			
4а			
б			
5			
6			
7			
8а			
б			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			