

## §14. Вещественные неевклидовы геометрии

**14.1. Проективизация пространства со скалярным произведением.** Рассмотрим вещественное векторное пространство  $V \simeq \mathbb{R}^{n+1}$  с невырожденной симметричной билинейной формой произвольной сигнатуры. Мы будем называть эту форму *скалярным произведением* и обозначать скалярное произведение векторов  $u, w \in V$  через  $(u, w) \in \mathbb{R}$ . Наряду с вещественным векторным пространством  $V$  мы иногда будем рассматривать его *комплексификацию* — комплексное векторное пространство  $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ , состоящее из векторов  $u + iw, u, w \in V$ . Вещественное подпространство  $V \subset V_{\mathbb{C}}$  характеризуется как множество всех векторов, инвариантных относительно *комплексного сопряжения*  $v = u + iw \mapsto \bar{v} \stackrel{\text{def}}{=} u - iw$ . Скалярное произведение на  $V$  естественным образом продолжается до комплекснозначной симметричной комплексно билинейной формы  $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  по правилу

$$(u_1 + iw_1, u_2 + iw_2) = (u_1, u_2) - (w_1, w_2) + i((u_1, w_2) + (u_2, w_1)),$$

и это комплексное скалярное произведение мы по прежнему обозначаем чрез  $(v_1, v_2)$ .

Главным объектом нашего внимания в этом параграфе будет вещественное проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Для изучения его геометрии мы будем время от времени обращаться и к комплексному проективному пространству  $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ , в которое  $\mathbb{P}_n$  вложено как множество *вещественных*<sup>1</sup> точек. Изотропные векторы скалярного произведения образуют в  $\mathbb{P}_n$  квадрику

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n \mid (p, p) = 0\},$$

которая называется *абсолютом*. То же квадратное уравнение  $(p, p) = 0$  задаёт гладкую комплексную квадрику и в комплексном проективном пространстве  $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ . Мы обозначим её через

$$G_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} \mid (p, p) = 0\}.$$

Абсолют  $G = \mathbb{P}_n \cap G_{\mathbb{C}}$  представляет собою множество вещественных точек квадрики  $G_{\mathbb{C}}$ . Анизотропные точки пространства  $\mathbb{P}_n$  разбиваются на два непересекающихся подмножества

$$P_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n \mid (p, p) > 0\} \quad \text{и} \quad P_- \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n \mid (p, p) < 0\},$$

которые мы будем называть *неевклидовыми пространствами*.

**14.1.1. Касательные векторы.** Условимся обозначать одной и той же буквой  $p$  как точку  $p \in \mathbb{P}(V)$ , так и отвечающее этой точке одномерное векторное подпространство  $p \subset V$ . Рассмотрим точку  $p \notin G$  и произвольный ненулевой вектор  $w \in p$ . Обозначим через

$$w^* : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto (v, w)/(w, w),$$

ковектор, сопоставляющий вектору  $v \in V$  координату его ортогональной проекции на подпространство  $p \subset V$  в базисе  $w$  этого подпространства.

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Убедитесь, что  $v - w \cdot (v, w)/(w, w) \in w^{\perp}$ .

Соответствующая ковектору  $w^*$  аффинная карта<sup>2</sup>  $U_{w^*} = \{v \in V \mid (v, w) = (w, w)\} = w + p^{\perp}$  проходит через конец вектора  $w$ , а её направляющим векторным пространством является

$$\text{Ann } w^* = p^{\perp} = \{v \in V \mid (v, p) = 0\} \subset V.$$

<sup>1</sup>Т. е. инвариантных относительно комплексного сопряжения  $p \mapsto \bar{p}$ .

<sup>2</sup>См. п° 10.1 на стр. 171.

Все аффинные карты  $U_w$  с  $w \in p$  состоят из одних и тех же точек  $p' \in \mathbb{P}_n$ , т.е. совпадают как подмножества в  $\mathbb{P}_n$ . Не зависящее от выбора вектора  $w \in p$  описание этого подмножества таково. При параллельном переносе точки  $p \in \mathbb{P}_n$  в пределах аффинной карты  $U_w$ , каждый вектор  $w \in p$  параллельно сдвигается на вектор  $\tau(w) \in p^\perp$ , линейно зависящий от  $w \in p$  в том смысле, что  $\tau(\lambda w) = \lambda \tau(w)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ , см. рис. 14◊1.

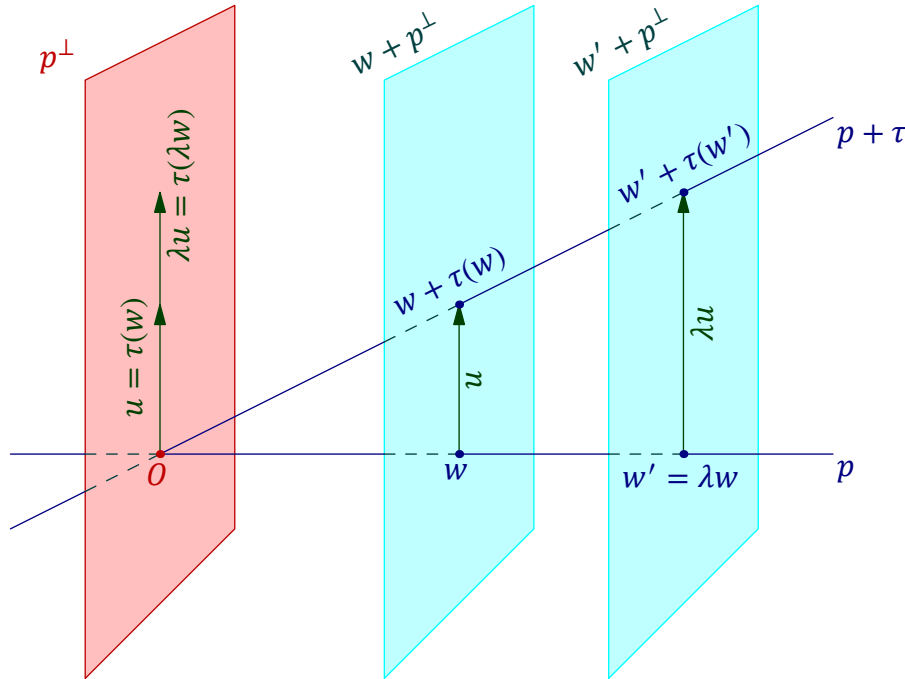


Рис. 14◊1. Сдвиг точки  $p \in \mathbb{P}(V)$  на касательный вектор  $\tau : p \rightarrow p^\perp$ .

Таким образом, лежащие в аффинной карте  $U_w$  одномерные подпространства  $p' \subset V$  являются графиками линейных отображений

$$\tau : p \rightarrow p^\perp \tag{14-1}$$

и образуют аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством  $\text{Hom}(p, p^\perp)$  всех линейных отображений (14-1). Это векторное пространство обозначается  $T_p P_\pm$  и называется касательным пространством к неевклидову пространству  $P_\pm$  в точке  $p \in P_\pm$ . Сами линейные отображения (14-1) называются касательными векторами к  $P_\pm$  в точке  $p$ .

Скалярное произведение на  $V$  позволяет ввести скалярное произведение на каждом касательном пространстве  $T_p P_\pm$ . По определению, касательные векторы  $\tau_1, \tau_2 : p \mapsto p^\perp$  в точке  $p \in P_\pm$  скалярно перемножаются по одной из формул

$$\begin{aligned} & (\tau_1, \tau_2)_p \stackrel{\text{def}}{=} +(\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w) & (14-2^+) \\ \text{или} & (\tau_1, \tau_2)_p \stackrel{\text{def}}{=} -(\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w) & (14-2^-) \end{aligned}$$

где  $w \in p$  — произвольный ненулевой вектор, а знак «+» или «-» в павой части выбирается исходя из того, какую сигнатуру у этого скалярного произведения хочется получить.

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что правые части формул (14-2) зависят только от точки  $p \in \mathbb{P}_n$  и касательных векторов  $\tau_1, \tau_2 \in T_p P_\pm$ , но не от выбора вектора  $w \in p$ .

Если исходное скалярное произведение на пространстве  $V$  позволяет при помощи подходящего выбора знака в (14-2) сделать все касательные пространства  $T_p P_{\pm}$  евклидовыми, то получающееся в результате неевклидово пространство  $P_{\pm}$  называется *классическим*. Есть два типа таких пространств: эллиптический и гиперболический. Мы подробно обсудим их в разделах н° 14.2 и н° 14.4 ниже.

**14.1.2. Геодезические (= прямые).** Не лежащие на абсолюте прямые в  $\mathbb{P}_n$  называются *геодезическими*. Они разбиваются на три непересекающихся класса:

- *эллиптическая геодезическая* не имеет вещественных пересечений с абсолютом, а её комплексификация пересекает квадрику  $G_{\mathbb{C}}$  в двух невещественных комплексно сопряжённых точках; такая геодезическая является проективизацией двумерного анизотропного подпространства в  $V$ , на котором скалярное произведение положительно или отрицательно определено, что равносильно положительности его определителя Грама
- *гиперболическая геодезическая* пересекает абсолют по двум различным вещественным точкам и является проективизацией двумерного гиперболического подпространства в  $V$  с отрицательным определителем Грама
- *параболическая геодезическая* касается абсолюта, пересекая его ровно в одной вещественной точке с кратностью два; она является проективизацией двумерного подпространства в  $V$ , на которое скалярное произведение ограничивается в вырожденную билинейную форму с одномерным ядром и нулевым определителем Грама.

Пусть (комплексная) прямая  $(p_1 p_2)$  проходит через две различные вещественные точки  $p_1, p_2$ , лежащие в одном и том же неевклидовом пространстве  $P_{\pm}$ , и пересекает абсолют по (возможно, комплексным или совпадающим) точкам  $a_1, a_2$ . Ограничение скалярного произведения на прямую  $(p_1 p_2)$  имеет в координатах относительно любого базиса на этой прямой вид<sup>1</sup>

$$(x, y) = \frac{c}{2} (\det(x, a_1) \det(y, a_2) + \det(y, a_1) \det(x, a_2))$$

где  $x, y \in \mathbb{C}^2$  столбцы координат относительно выбранного базиса, а  $c \in \mathbb{C}$  некоторая константа. Величина

$$\begin{aligned} \frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} &= \frac{1}{4} \frac{(\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2) + \det(p_2, a_1) \det(p_1, a_2))^2}{\det(p_1, a_1) \det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1) \det(p_2, a_2)} = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)}{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)} + 2 + \frac{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)}{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} ([p_1, p_2, a_1, a_2] + 2 + [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1}) = \\ &= \left( \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2} \right)^2, \quad \text{где } \vartheta = \frac{1}{2} \ln[p_1, p_2, a_1, a_2], \end{aligned} \quad (14-3)$$

вещественна, положительна и не меняется при умножении скалярного произведения на любую ненулевую константу.

Параболичность геодезической, т. е. совпадение точек  $a_1 = a_2$ , равносильна любому из равенств:  $[p_1, p_2, a_1, a_2] = 1$ ,  $\vartheta = 0$ ,  $(p_1, p_2)^2 = (p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)$ .

<sup>1</sup>Ср. с н° 11.4 на стр. 200 и указаниями к упр. 11.10 на стр. 194.

На эллиптической геодезической, т. е. при  $a_1 \neq a_2$  и  $a_1 = \bar{a}_2$ , выполняются равенства

$$\overline{[p_1, p_2, a_1, a_2]} = [p_1, p_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2] = [p_1, p_2, a_2, a_1] = [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1}.$$

Поэтому двойное отношение  $[p_1, p_2, a_1, a_2] \in \mathbb{C}$  лежит на единичной окружности, и величина  $\vartheta$  чисто мнима. Это согласуется с *эллиптическим неравенством Коши – Буняковского – Шварца*

$$\frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} < 1 \quad (\text{при } p_1 \neq p_2), \quad (14-4)$$

которое выражает собой положительность определителя Грама анизотропной плоскости:

$$\det \begin{pmatrix} (p_1, p_1) & (p_1, p_2) \\ (p_2, p_1) & (p_2, p_2) \end{pmatrix} = (p_1, p_1)(p_2, p_2) - (p_1, p_2)^2 > 0 \quad (\text{при } p_1 \neq p_2).$$

Из неравенства (14-4) вытекает, что на эллиптической геодезической отношение (14-3) является квадратом косинуса положительного вещественного числа.

На гиперболической геодезической, т. е. при вещественных  $a_1 \neq a_2$ , двойное отношение  $[p_1, p_2, a_1, a_2]$  вещественно и отлично от нуля. Отрицательность определителя Грама гиперболической плоскости:  $(p_1, p_1)(p_2, p_2) - (p_1, p_2)^2 < 0$  (при  $p_1 \neq p_2$ ) переписывается в виде *гиперболического неравенства Коши – Буняковского – Шварца*

$$\frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} > 1 \quad (\text{при } p_1 \neq p_2), \quad (14-5)$$

из которого вытекает, что на гиперболической геодезической отношение (14-3) является квадратом гиперболического косинуса положительного вещественного числа.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1** (расстояние вдоль геодезической)

Неотрицательное вещественное число  $|\vartheta| = \frac{1}{2} |\ln[p_1, p_2, a_1, a_2]|$  называется *геодезическим расстоянием* между вещественными точками  $p_1, p_2$  из одного неевклидова пространства  $P_{\pm}$  и обозначается  $|p_1, p_2|$ . Таким образом, расстояние между точками параболической геодезической *нулевое*. Расстояние между точками эллиптической геодезической задаётся равенствами<sup>1</sup>

$$\cos |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}} \quad \text{и} \quad |p_1, p_2| = \pm \frac{1}{2i} \ln[p_1, p_2, a_1, a_2]. \quad (14-6)$$

Оно принимает значения на  $[0, \pi/2]$ . В **прим. 14.1** ниже мы увидим, что эллиптическое расстояние равно евклидову углу между прямыми с направляющими векторами  $p_1, p_2$  в двумерном евклидовом векторном подпространстве, порождённом этими векторами в  $V$ , см. **рис. 14♦2**. Расстояние между точками гиперболической геодезической задаётся равенствами<sup>2</sup>

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}} \quad \text{и} \quad |p_1, p_2| = \pm \frac{1}{2} \ln[p_1, p_2, a_1, a_2] \quad (14-7)$$

Оно принимает значения на  $[0, +\infty)$ . В **прим. 14.2** ниже мы увидим, что гиперболическое расстояние равно длине дуги, отсекаемой прямыми с направляющими векторами  $p_1, p_2$  из единичной гиперболы  $(v, v) = 1$ , лежащей в порождённой этими векторами гиперболической плоскости, см. **рис. 14♦3**.

<sup>1</sup>Как мы видели, в правой части второго равенства стоит ненулевое вещественное число, и знак следует выбрать так, чтобы оно было положительно. Если убрать в левой части модуль, то правая часть будет задавать *ориентированное расстояние*, меняющее знак при перестановке точек  $p_1$  и  $p_2$ .

<sup>2</sup>Где второе равенство обладает всеми описанными в предыдущей сноске свойствами.

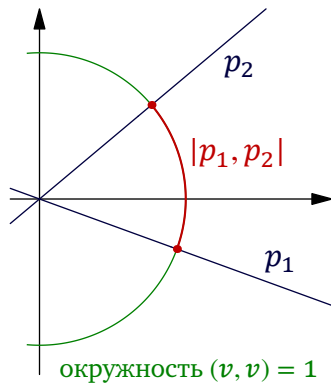


Рис. 14◊2. Эллиптическое расстояние.

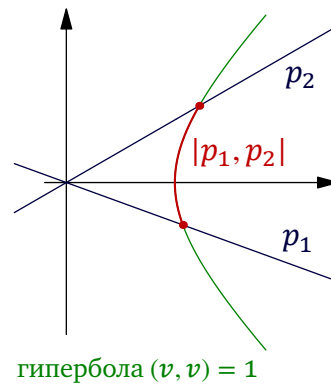


Рис. 14◊3. Гиперболическое расстояние.

ПРИМЕР 14.1 (НАТУРАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ)

Пусть геодезическая  $(ab)$  эллиптическая, т. е. скалярное произведение ограничивается с пространства  $V$  на линейную оболочку одномерных подпространств  $a, b \subset V$  в положительно или отрицательно определённую форму. Выберем в этой линейной оболочке базис  $e_1, e_2$  с матрицей Грама  $\pm E$  так, чтобы  $e_1 \in a$  и обе координаты вектора  $b$  были положительны, как на рис. 14◊4. Рассмотрим зависящий от времени  $t \in \mathbb{R}$  вектор

$$w(t) = e_1 \cdot \cos t + e_2 \cdot \sin t$$

с постоянным скалярным квадратом  $(w(t), w(t)) = 1$ . При  $t = 0$  он находится в точке  $a$ , а при  $t = |a, b|$  из формулы (14-6) он попадает в точку  $b$ . Производная

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{d}{dt} w(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} = \\ &= -e_1 \cdot \sin t + e_2 \cdot \cos t \end{aligned}$$

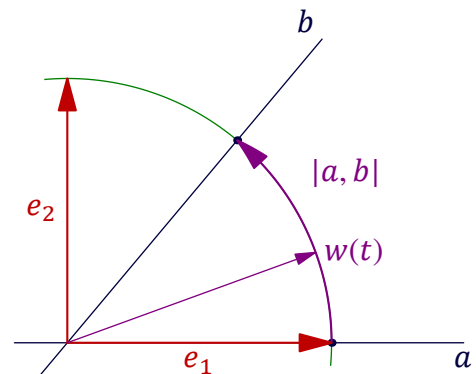


Рис. 14◊4.  $w(t) = e_1 \cdot \cos t + e_2 \cdot \sin t$ .

лежит в ортогонале  $w^\perp(t)$  и задаёт касательный вектор  $\tau(t)$  к проективному пространству  $\mathbb{P}(V)$  в точке  $p(t) = \mathbb{R} \cdot w(t)$  по правилу  $\tau(t): \mathbb{R} \cdot w(t) \rightarrow w^\perp(t), w \mapsto \dot{w}(t)$ . Этот касательный вектор лежит в одномерном касательном пространстве к геодезической  $(ab)$  и вне зависимости от выбора знака в форм. (14-2) на стр. 253 имеет  $(\tau(t), \tau(t))_{p(t)} = 1$  при всех  $t$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.3. Убедитесь в этом.

Таким образом, точка  $p(t) = \mathbb{R} \cdot w(t) \in \mathbb{P}(V)$  движется по геодезической  $(ab)$  с единичной скоростью, и в промежуток времени  $[0, |a, b|]$  проходит в точности расстояние  $|a, b|$ , задаваемое формулой (14-2). Иными словами, эллиптическое расстояние между одномерными подпространствами  $a, b$  равно евклидовой длине кратчайшей из заключённых между  $a$  и  $b$  дуг единичной окружности в порождённой этими векторами плоскости с евклидовой структурой, индуцированной скалярным произведением<sup>1</sup> из  $V$ .

<sup>1</sup>Т. е. со скалярным произведением  $(u_1, u_2) = \pm(u_1, u_2)$ , где плюс ставится когда ограничение скалярного произведения с  $V$  на линейную оболочку векторов  $a, b$  положительно определено, и минус — когда отрицательно.

Пример 14.2 (натуральная параметризация гиперболической геодезической)

Пусть точки  $a, b \in P_+$  и скалярное произведение ограничивается с  $V$  на линейную оболочку одномерных подпространств  $a, b \subset V$  в гиперболическую форму. Выберем в этой линейной оболочке базис  $e_1, e_2$  с матрицей Грама  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

так, чтобы  $e_1 \in a$  и обе координаты вектора  $b$  были положительны, как на рис. 14◊5. Зависящий от времени  $t \in \mathbb{R}$  вектор  $w(t) = e_1 \cdot \operatorname{ch} t + e_2 \cdot \operatorname{sh} t$  имеет постоянный скалярный квадрат  $(w(t), w(t)) = 1$  и при  $t = 0$  находится в точке  $a$ , а при  $t = |a, b|$  из форм. (14-7) на стр. 255 попадает в точку  $b$ . Как и в предыдущем примере, производная  $\dot{w}(t) = e_1 \cdot \operatorname{sh} t + e_2 \cdot \operatorname{ch} t \in w(t)^\perp$  задаёт касательный вектор  $\tau(t) \in T_{p(t)}\mathbb{P}(U)$  в точке  $p(t) = \mathbb{R} \cdot w(t) \in \mathbb{P}(V)$  по правилу

$$\tau(t) : \mathbb{R} \cdot w(t) \rightarrow w^\perp(t), \quad w \mapsto \dot{w}(t).$$

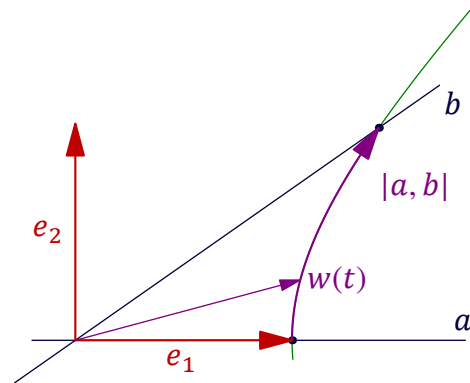


Рис. 14◊5.  $w(t) = e_1 \cdot \operatorname{ch} t + e_2 \cdot \operatorname{sh} t$ .

Определим скалярные произведения касательных векторов в точке  $p(t)$  формулой (14-2<sup>-</sup>). Тогда при всех  $t$  скалярный квадрат  $(\tau(t), \tau(t))_{p(t)} = 1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.4. Убедитесь в этом.

Таким образом, точка  $p(t) = \mathbb{R} \cdot w(t) \in \mathbb{P}(V)$  движется по геодезической  $(ab)$  с единичной скоростью, и в промежуток времени  $[0, |a, b|]$  проходит расстояние  $|a, b|$  из формулы (14-7). Иными словами, гиперболическое расстояние между точками  $a, b$  гиперболической геодезической равно евклидовой длине заключённой между одномерными подпространствами  $a$  и  $b$  дуги гиперболы с уравнением  $x_1^2 - x_2^2 = 1$  в базисе  $e_1, e_2$  относительно такой евклидовой структуры на линейной оболочке подпространств  $a, b$ , в которой базис  $e_1, e_2$  ортонормален.

УПРАЖНЕНИЕ 14.5. Для произвольного гладкого отображения  $w : \mathbb{R} \rightarrow V$  вещественной прямой в пространство  $V$  с симметричной билинейной формой  $(*, *) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  вычислите производную функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = (w(t), w(t))$ , и выведите из этого, что скалярный квадрат вектора  $w(t)$  не зависит от  $t$ , если и только если векторы  $w(t)$  и  $\dot{w}(t)$  ортогональны при всех  $t$ .

**14.2. Эллиптическая геометрия.** Рассмотрим пространство  $V \simeq \mathbb{R}^{n+1}$  с положительно определённым скалярным произведением. Проективное пространство  $P_+ = \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  называется эллиптическим пространством. Абсолют евклидова скалярного произведения не имеет вещественных точек и все геодезические в эллиптическом пространстве эллиптические. Эллиптическое расстояние  $|p_1, p_2|$  между точками  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$  задаётся формулами (14-6)

$$\cos |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}} \quad \text{или} \quad |p_1, p_2| = \pm \frac{1}{2i} \ln [p_1, p_2, a_1, a_2], \quad (14-8)$$

где  $a_1, a_2 \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$  суть точки пересечения (комплексной проективной) прямой  $(p_1 p_2)$  с (комплексифицированным) абсолютном  $G_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ . Скалярное произведение касательных векторов  $\tau_1, \tau_2 : p \rightarrow p^\perp$  в точке  $p = \mathbb{R} \cdot w$  задаётся формулой (14-2<sup>+</sup>):

$$(\tau_1, \tau_2)_p = (\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w). \quad (14-9)$$

При  $(w, w) = 1$ , т. е. для векторов  $w \in p$  с концами на единичной сфере  $S^n \subset V$ , это скалярное произведение совпадает со скалярным произведением векторов  $u = \tau(w)$  в пространстве  $V$ . В частности для таких  $w$  и  $u = \tau(w)$

$$|\tau| = \sqrt{(u, u)} \quad \text{и} \quad \cos \angle(\tau_1, \tau_2) = |(u_1, u_2)| / \sqrt{(u_1, u_1)(u_2, u_2)} \quad (14-10)$$

Предложение 14.1

Геодезическое расстояние (14-8) задаёт на эллиптическом пространстве метрику. Каждая геодезическая  $(ab)$  находится в изометрической биекции с окружностью длины  $\pi$ . ГМТ  $p$ , для которых выполняется равенство  $|a, p| + |p, b| = |a, b|$ , переходит при этой биекции в кратчайшую из двух заключённых между точками  $a$  и  $b$  дуг этой окружности.

Доказательство. Положительность и симметричность расстояния (14-8) очевидны. Неравенство треугольника вытекает из того, что определитель Грама евклидовой формы на линейной оболочке ненулевых векторов  $p_1, p_2, p_3$  неотрицателен и обращается в нуль, если и только если эти векторы линейно зависимы, т. е. лежат на одной геодезической. В самом деле, если нормировать векторы так, чтобы  $(p_i, p_i) = 1$ , и положить  $g_{ij} = (p_i, p_j)$ , мы получим

$$\det \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 \geq 0. \quad (14-11)$$

В силу монотонного убывания функции  $\cos \vartheta$  на  $[0, \pi]$ , неравенство треугольника

$$|p_1, p_2| + |p_2, p_3| \geq |p_1, p_3| \quad (14-12)$$

равносильно неравенству  $\cos(|p_1, p_2| + |p_2, p_3|) \leq \cos |p_1, p_3|$ , которое переписывается как

$$\cos |p_1, p_2| \cdot \cos |p_2, p_3| - \cos |p_1, p_3| \leq \sin |p_1, p_2| \cdot \sin |p_2, p_3|.$$

Поскольку правая часть неотрицательна, при отрицательной левой части неравенство треугольника выполняется строго. Если левая часть неотрицательна, обе части неравенства можно возвести в квадрат. Вспоминая, что  $\cos^2 |p_i, p_j| = (p_i, p_j)^2 = g_{ij}^2$ , получаем

$$g_{12}^2 g_{23}^2 + g_{13}^2 - 2g_{12}g_{23}g_{13} \leq (1 - g_{12}^2)(1 - g_{13}^2),$$

что превращается в (14-11) после раскрытия скобок и переноса левой части направо. Равенство в (14-12) влечёт равенство в (14-11), а значит, линейную зависимость точек  $p_i$ . Это доказывает неравенство треугольника, а также то, что равенство в нём возможно только при  $p_2 \in (p_1 p_3)$ .

Если точки  $p_1, p_2, p_3$  не коллинеарны, то порождённая ими эллиптическая плоскость  $\mathbb{P}_2$  является фактором двумерной единичной сферы  $S^2 = \{e \in \mathbb{R}^3 \mid (e, e) = 1\}$  в натянутом на векторы  $p_i$  евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3 \subset V$  по отношению эквивалентности, отождествляющему диаметрально противоположные точки сферы. Отображение факторизации

$$f : S^2 \rightarrow \mathbb{P}_2, \quad \pm e \mapsto \mathbb{R} \cdot e, \quad (14-13)$$

непрерывно и локально изометрично в том смысле, что если надеть сферу  $S^2$  сферической метрикой, в которой расстоянием между точками  $p, q \in S^2$  считается длина кратчайшей из двух дуг окружности, высекаемой из  $S^2$  плоскостью, проходящей через  $p, q$  и центр сферы, то

сферический шар  $B_{\pi/4}(p) = \{q \in S^2 \mid |p, q| \leq \pi/4\}$  радиуса  $\pi/4$  с центром в произвольной точке  $p \in S^2$  изометрически отобразится проекцией (14-13) на эллиптический шар того же радиуса  $B_{\pi/4}(f(p)) = \{q \in \mathbb{P}_2 \mid |\pi(p), q| \leq \pi/4\}$  с центром в точке  $f(p)$  эллиптической плоскости  $\mathbb{P}_2$ , см. рис. 14◊6. Геодезическая  $(p_1 p_3) \subset \mathbb{P}_2$  является фактором единичной окружности  $S^1$ , высекаемой из сферы  $S^2$  двумерной плоскостью, натянутой на векторы  $p_1, p_3$ . Как топологическое пространство, такой фактор гомеоморфен окружности<sup>1</sup>, и отображение факторизации  $S^1 \rightarrow (p_1 p_3)$  биективно отображает любой полукруг в  $S^1$  на эту окружность, причём любая дуга полукруга, длина которой не превышает  $\pi/2$ , отображается на свой образ изометрически.

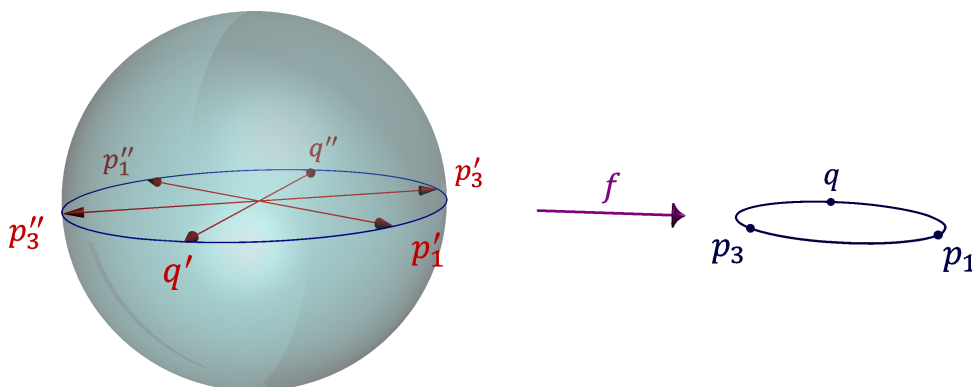


Рис. 14◊6. Факторизация единичной окружности  $S^1 \subset \mathbb{R}^3$  до геодезической  $(p_1 p_3) \subset \mathbb{P}_2$  изометрически отображает лежащие на  $S^1$  дуги длины  $\leq \pi/2$  на их образы.

Разбивая полуокружность на  $S^1$  в объединение двух таких дуг с общим концом, мы заключаем, что окружность  $(p_1 p_3)$  имеет длину  $\pi$ , и расстояние между точками  $p_1$  и  $p_3$  равно длине кратчайшей из двух дуг, на которые эта окружность разбивается точками  $p_1, p_3$ . Если точка  $p_2 \in (p_1 p_3)$ , то равенство в (14-12) возможно, если и только если точка  $p_2$  лежит именно на этой кратчайшей дуге, см. рис. 14◊7. □

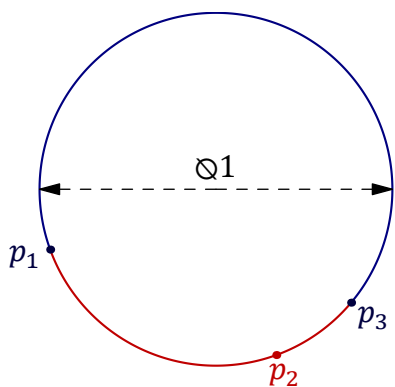


Рис. 14◊7. ГМТ  $p_2$ :  
 $|p_1, p_2| + |p_2, p_3| = |p_1, p_3|$ .

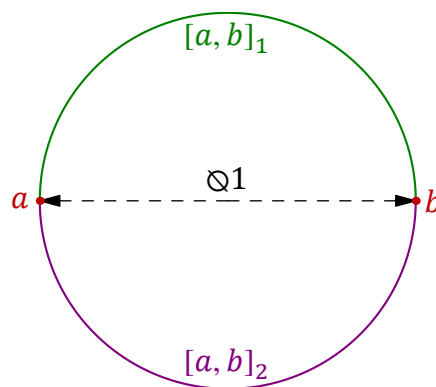


Рис. 14◊8. Два разных геодезических отрезка между точками  $a$  и  $b$  с  
 $|a, b| = \pi/2$ .

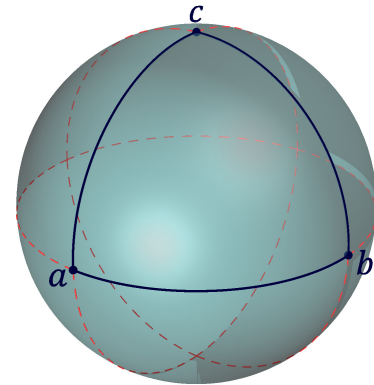
<sup>1</sup>См. прим. 3.9 на стр. 48.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2 (ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ОТРЕЗОК  $[a, b]$ )

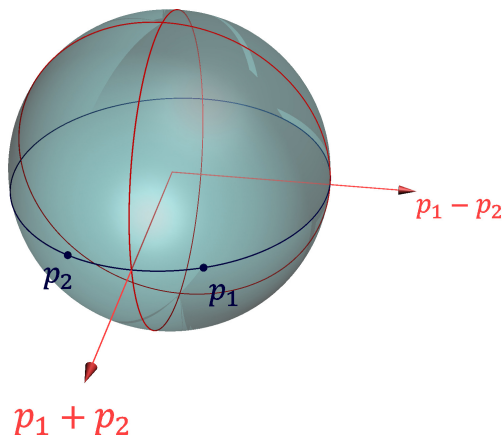
Кратчайшая из двух дуг, на которые геодезическая окружность  $(ab)$  в эллиптическом пространстве  $P$  разбивается точками  $a, b$ , называется *геодезическим отрезком*  $[a, b]$ . Согласно предыдущей [предл. 14.1](#), геодезический отрезок  $[a, b]$  представляет собою ГМТ таких точек  $p \in P$ , что  $|a, p| + |p, b| = |a, b|$ . Если  $|a, b| < \pi/2$ , то геодезический отрезок  $[a, b]$  единствен, как на [рис. 14◊7](#). Если же  $|a, b| = \pi/2$ , то точки  $a$  и  $b$  разбивают геодезическую  $(ab)$  на два различных геодезических отрезка  $[a, b]_1$  и  $[a, b]_2$  одинаковой длины, как на [рис. 14◊8](#).

**14.2.1. Неевклидовы явления в эллиптической геометрии.** Как и на евклидовой плоскости  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$ , через любые две различные точки эллиптической плоскости  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  проходит единственная прямая, и кратчайший путь из одной точки в другую идёт по геодезическому отрезку этой прямой. Однако в отличие от евклидовой плоскости эллиптическая плоскость *компактна*, и геометрия взаимного расположения прямых на ней отличается от евклидовой. На эллиптической плоскости нет параллельных прямых: любые две прямые пересекаются. Прямая не разбивает плоскость на две компоненты: любые две точки не лежащие на прямой  $\ell$  можно соединить не пересекающим прямой  $\ell$  отрезком геодезической. На эллиптической плоскости бывают правильные треугольники с прямыми углами<sup>1</sup>, как на [рис. 14◊9](#), и т. д., и т. п.



**Рис. 14◊9.** Правильный прямоугольный треугольник.

УПРАЖНЕНИЕ 14.6. Убедитесь, что прямые, соединяющие противоположные вершины икосаэдра с центром в нуле евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , образуют на эллиптической плоскости  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  конфигурацию из шести попарно равноудалённых друг от друга точек.



**Рис. 14◊10.** Медиаторы точек  $p_1$  и  $p_2$ .

вектором  $p_1 - p_2$  — на другом, и эти две точки различны.

ПРИМЕР 14.3 (МЕДИАТОРЫ)

Равноудалённость точки  $q$  от двух заданных различных точек  $p_1, p_2$ , где все три точки представлены векторами единичной длины, выражается равенством  $|(p_1, q_1)| = |(p_2, q_2)|$ , которое выполняется в двух случаях: когда  $(p_1 - p_2, q) = 0$  или когда  $(p_1 + p_2, q) = 0$ . Таким образом, ГМТ  $q \in \mathbb{P}_n$ , равноудалённых от двух заданных точек  $p_1 \neq p_2$ , является объединением двух гиперплоскостей, которые называются *медиаторами* точек  $p_1, p_2$  и ортогональны векторам  $p_1 - p_2$  и  $p_1 + p_2$  соответственно, см. [рис. 14◊10](#). Обратите внимание, что если точки  $p_1, p_2$  представлены векторами одинаковой длины, то точка, представленная вектором  $p_1 + p_2$ , лежит на одном медиаторе, а

УПРАЖНЕНИЕ 14.7. Покажите, что медиаторные гиперплоскости ортогональны друг другу и пересекаются по ГМТ  $q \in \mathbb{P}_n$  с  $|p_1, q| = |p_2, q| = \pi/2$ .

<sup>1</sup>Вершины которых суть векторы ортогональных базисов в  $\mathbb{R}^3$ .

**14.2.2. Изометрии.** Для любого вектора  $e \in V$  с  $(e, e) = 1$  отражение в гиперплоскости<sup>1</sup>  $e^\perp$

$$\sigma_e : V \rightarrow V, \quad v \mapsto v - 2(v, e) \cdot e$$

задаёт инволютивный линейный проективный автоморфизм, который мы по-прежнему будем называть *отражением в гиперплоскости*  $\mathbb{P}(e^\perp) \subset \mathbb{P}(V)$  и обозначать  $\sigma_e : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ . Он оставляет на месте каждую точку гиперплоскости  $\mathbb{P}(e^\perp)$  и её полюс  $e$  относительно абсолюта. Поскольку отражение сохраняет скалярное произведение на  $V$ , оно является изометрическим преобразованием эллиптического пространства. Для любых двух различных точек  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}(V)$  существуют ровно два отражения, переставляющие эти точки друг с другом, и эти отражения происходят в медиаторах точек  $p_1, p_2$ . В самом деле, если точка  $q$  принадлежит зеркалу такого отражения, то  $|p_1, q| = |p_2, q|$ , и значит, точка  $q$  принадлежит медиатору. С другой стороны, отражения  $\sigma_{(p_1-p_2)^\perp} : V \rightarrow V$  и  $\sigma_{(p_1+p_2)^\perp} : V \rightarrow V$  переводят вектор  $p_1 \in V$  в векторы  $p_2$  и  $-p_2$  соответственно.

**ТЕОРЕМА 14.1**

Всякое изометрическое преобразование  $g : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n$  эллиптического пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  является линейным проективным автоморфизмом, индуцированным некоторым ортогональным линейным преобразованием  $G : V \xrightarrow{\simeq} V$ , которое определяется по  $g$  однозначно с точностью до знака<sup>2</sup>. Иначе говоря, группа изометрических преобразований  $n$ -мерного эллиптического пространства изоморфна *проективной ортогональной группе*

$$\mathbb{P}O_{n+1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}O(V) \stackrel{\text{def}}{=} O(V) / \{\pm \text{Id}_V\}.$$

**Доказательство.** Очевидно, что все преобразования из группы  $\mathbb{P}O(V)$  являются изометрическими, и что группа  $\mathbb{P}O(V)$  транзитивно действует на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Зафиксируем какой-либо вектор  $e \in V$  с  $(e, e) = 1$ . Беря композицию  $g$  с ортогональным преобразованием, переводящим  $g(e)$  в  $e$ , мы без ограничения общности можем и будем считать, что  $g(e) = e$ . Рассмотрим на  $\mathbb{P}_n$  аффинную карту  $U_e = \{v \in V \mid (v, e) = 1\}$ . Как аффинная гиперплоскость в  $\mathbb{A}(V)$  она параллельна векторной гиперплоскости  $e^\perp \subset V$  и проходит через конец вектора  $e$ . Дополнение  $\mathbb{P}_n \setminus U_e = \mathbb{P}(e^\perp)$  представляет собою ГМТ  $p \in \mathbb{P}_n$ , находящихся на расстоянии  $\pi/2$  от точки  $p$ . Поэтому преобразование  $g$  переводит и карту  $U$  и её бесконечно удалённую гиперплоскость  $e^\perp$  в себя. Поскольку преобразование  $g$  сохраняет расстояние между точками, оно, в силу [предл. 14.1](#), переводит отрезки геодезических в отрезки геодезических, а значит, проективные прямые — в проективные прямые. По [сл. 2.2](#) на стр. 32 ограничение  $g|_{U_e} : U_e \rightarrow U_e$  является аффинным преобразованием. В доказательстве [предл. 12.2](#) на стр. 219 мы видели, что такое аффинное преобразование является ограничением на карту  $U_e$  единственного линейного проективного автоморфизма  $\bar{h} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n$ , причём задающий его линейный оператор  $h : V \rightarrow V$  однозначно с точностью до пропорциональности определяется преобразованием  $g$ . Поскольку оба преобразования  $g, \bar{h} : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$  непрерывны и совпадают на открытом всюду плотном подмножестве  $U_e$  компактного метрического пространства  $\mathbb{P}_n$ , они совпадают вообще всюду на  $\mathbb{P}_n$ , т. е.  $g = \bar{h}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 14.8.** Докажите это.

Умножим оператор  $h$  на такую ненулевую константу, чтобы  $h(e) = e$ , и дополним вектор  $e$  до ортонормального базиса  $e, e_1, e_2, \dots, e_n$  пространства  $V$ . Поскольку оператор  $h$  сохраняет

<sup>1</sup>См. н° 7.1.1 на стр. 107.

<sup>2</sup>Т. е. с точностью до композиции с центральной симметрией  $-\text{Id}_V : v \mapsto -v$ .

углы между одномерными подпространствами, векторы  $h(e_i)$  составляют вместе с вектором  $e$  ортогональный базис пространства  $V$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.9. Убедитесь, что этот ортогональный базис на самом деле ортонормален, т. е. для каждого  $i$  выполняется равенство  $(h(e_i), h(e_i)) = 1$ .

Таким образом, преобразование  $h$  ортогонально. Остаётся заметить, что два ортогональных линейных преобразования евклидова векторного пространства пропорциональны тогда и только тогда, когда коэффициент пропорциональности между ними равен  $\pm 1$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 14.10. Убедитесь в справедливости последнего утверждения.

Следствие 14.1

Всякое изометрическое преобразование эллиптического пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  является композицией не более, чем  $(n + 1)$  отражений в гиперплоскостях.

Доказательство. Это вытекает из теор. 7.1 на стр. 107.  $\square$

Предостережение 14.1. В отличие от евклидовой геометрии, изометрия эллиптического пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  не определяется однозначно своим действием на произвольные  $(n + 1)$  точек, не лежащих в одной гиперплоскости. Например, если эти точки отвечают ортонормальному базису  $e_0, e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$ , то имеется ровно  $2^n$  различных преобразований из группы  $\mathbb{P}O_{n+1}(\mathbb{R})$ , оставляющих каждую из точек на месте. Все они действуют на базис по правилу  $e_i \mapsto \pm e_i$  с точностью до общего для всех  $i$  знака. При  $n = 2$  эти четыре преобразования суть Id и три отражения  $\sigma_i = \sigma_{e_i}$  в сторонах правильного прямоугольного  $\Delta e_0 e_1 e_2$ , см. рис. 14◊11. Они транзитивно действуют на четырёх связных компонентах дополнения  $\mathbb{P}_2 \setminus \bigcup_{i \neq j} (e_i e_j)$  к трём координатным прямым  $(e_i e_j) \subset \mathbb{P}_2$  и оставляют на месте каждую из точек<sup>1</sup>  $e_i \in \mathbb{P}_2$ .

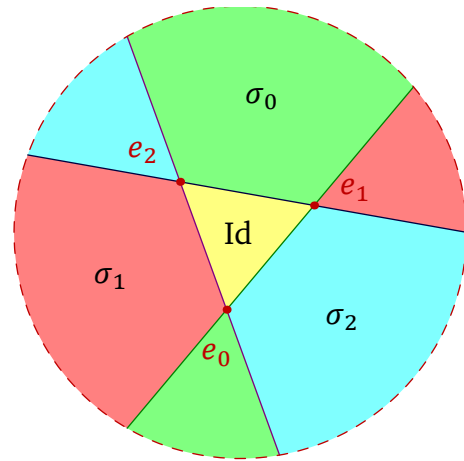


Рис. 14◊11. Образы правильного прямоугольного  $\Delta e_0 e_1 e_2$  при отражениях в его сторонах.

Определение 14.3 (дифференциал эллиптической изометрии)

Ортогональный линейный оператор  $g : V \simeq V$  задаёт в каждой точке  $p \in \mathbb{P}(V)$  ортогональное линейное отображение касательных пространств

$$dg : T_p \mathbb{P}(V) \simeq T_{g(p)} \mathbb{P}(V), \quad \tau \mapsto g\tau g^{-1}, \tag{14-14}$$

переводящее касательный вектор  $\tau : p \mapsto p^\perp$  в касательный вектор

$$dg(\tau) : gp \mapsto gp^\perp, \quad gw \mapsto g\tau(w).$$

Ортогональный линейный оператор (14-14) называется дифференциалом изометрического преобразования  $\bar{g} : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$  в точке  $p \in \mathbb{P}(V)$ .

<sup>1</sup> Отражение  $\sigma_i : \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$  меняет знак у вектора  $e_i \in \mathbb{R}^3$  и тождественно действует на остальные два базисных вектора.

**14.2.3. Треугольники.** Фигура, образованная тремя геодезическими отрезками<sup>1</sup>

$$\Delta abc \stackrel{\text{def}}{=} [a, b] \cup [b, c] \cup [c, a]$$

пересекающихся в неколлинеарных точках  $a, b, c$  геодезических  $(ab), (bc), (ca)$  эллиптического пространства, называется *эллиптическим треугольником*. Всякий эллиптический треугольник лежит в эллиптической плоскости, порождённой его вершинами. Имеется два геометрически разных типа треугольников, представленные на рис. 14◊12 и рис. 14◊13 ниже.

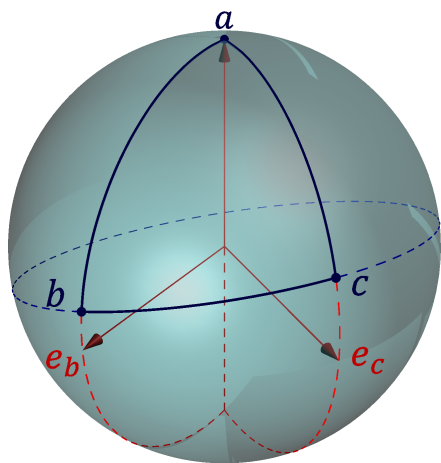


Рис. 14◊12. Треугольник первого рода.

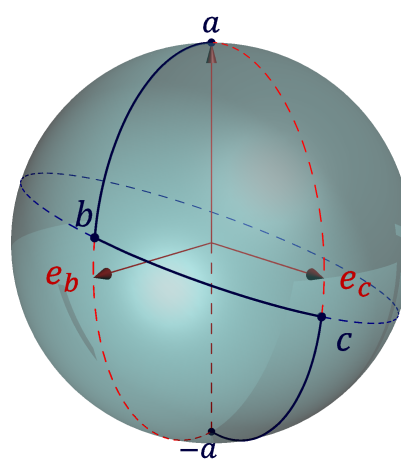


Рис. 14◊13. Треугольник второго рода.

Образы лежащих на единичной сфере  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  сферических треугольников с длинами сторон  $\leq \pi/2$  при отображении факторизации  $f$  из форм. (14-13) на стр. 258 называются эллиптическими треугольниками *первого рода*. Граница такого треугольника разбивает эллиптическую плоскость  $\mathbb{P}_2$  на две связные компоненты, и её можно обойти по кругу так, что треугольник всё время находится по левую руку. Кроме того её можно непрерывно стянуть внутри  $\mathbb{P}_2$  в точку.

УПРАЖНЕНИЕ 14.11. Постройте такое непрерывное отображение единичного квадрата в  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{P}_2, \quad (x, t) \mapsto h(x, t) \in \mathbb{P}_2,$$

что кривая  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_2, x \mapsto h(x, 0)$ , является параметризацией границы треугольника  $abc$  первого рода, а кривая  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_2, x \mapsto h(x, 1)$ , отображает весь отрезок  $[0, 1]$  в точку  $(a + b + c)/3 \in \mathbb{P}_2$ .

Вершины треугольника первого рода представляются такими векторами  $a, b, c$  единичной длины, что  $b = \cos |a, b| \cdot a + \sin |a, b| \cdot e_b$  и  $c = \cos |a, c| \cdot a + \sin |a, c| \cdot e_c$ , где векторы  $e_b$  и  $e_c$  дополняют вектор  $a$  до ортонормальных базисов в плоскостях  $ab$  и  $ac$  соответственно, см. рис. 14◊12. Угол  $\sphericalangle(bac)$  при вершине  $a$  в сферическом  $\Delta abc$  равен евклидову углу между плоскостями  $ab$  и  $ac$  в  $\mathbb{R}^3$ . Он имеет  $\cos \sphericalangle(bac) = (e_b, e_c)$ . Вычисляя скалярное произведение  $(b, c) = \cos |b, c|$ , получаем для эллиптического  $\Delta abc$  первого рода *сферическую теорему косинусов*<sup>2</sup>

$$\cos |b, c| = \cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac). \quad (14-15)$$

<sup>1</sup>См. *опр. 14.2* на стр. 260.

<sup>2</sup>Также известную как *основная формула сферической тригонометрии*.

Эллиптические треугольники, не являющиеся треугольниками первого рода, называются *треугольниками второго рода*. Граница треугольника второго рода поднимается на единичную сферу  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  в *незамкнутую* ломаную, соединяющую диаметрально противоположные точки сферы. Дополнение до границы треугольника второго рода связно: любые две не лежащие на границе точки можно соединить нигде не пересекающим границу треугольника отрезком геодезической. Поскольку на  $\mathbb{P}_2$  имеются геодезические, трансверсально пересекающие границу треугольника второго рода ровно по одной точке, и такой характер пересечения устойчив к малым шевелениям как геодезической, так и треугольника, границу треугольника второго рода<sup>1</sup> нельзя непрерывно продеформировать внутри  $\mathbb{P}_2$  в точку.

УПРАЖНЕНИЕ 14.12. Докажите для треугольников второго рода формулу

$$-\cos |b, c| = \cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac), \quad (14-16)$$

левая часть которой отличается от левой части (14-15) знаком.

Таким образом, величина  $\cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac)$  положительна для треугольников первого рода и отрицательна для треугольников второго рода.

**14.3. Сферическая форма объёма.** Если зафиксировать в пространстве  $V$  ортонормальный базис  $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ , то с каждым ненулевым вектором  $w \in V$  можно связать кососимметричную полилинейную форму  $\omega_w: V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  от  $n = \dim V - 1$  аргументов, значение которой на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  определяется равенством

$$w \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n = \omega_w(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \quad (14-17)$$

и равно определителю  $\det C$  матрицы координат<sup>2</sup> векторов  $w, v_1, v_2, \dots, v_n$  в базисе  $e$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.13. Покажите, что для любого векторного пространства<sup>3</sup>  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  и любого целого неотрицательного  $m$  пространство полилинейных кососимметричных форм от  $m$  аргументов  $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$  канонически изоморфно пространству линейных форм  $L^m V \rightarrow \mathbb{k}$  на  $m$ -той внешней степени пространства  $V$ . Выведите из этого, что сопоставление  $w \mapsto \omega_w$  устанавливает линейный изоморфизм векторного пространства  $V$  с векторным пространством полилинейных кососимметричных форм от  $n = \dim V - 1$  аргументов на пространстве  $V$ .

При выборе другого ортонормального базиса в  $V$  форма  $\omega_w$  не изменится, если новый базис имеет ту же ориентацию, что и базис  $e$ , и умножится на  $-1$ , если ориентация у нового базиса противоположна. Квадрат значения формы  $\omega_w$  на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_n$

$$\omega^2(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det^2 C = \det(C^t E C) = \det G_{w, v_1, v_2, \dots, v_n}$$

равен определителю Грама векторов  $w, v_1, v_2, \dots, v_n$ . Если векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n \in w^\perp$ , то

$$\det G_{w, v_1, v_2, \dots, v_n} = (w, w) \cdot \det G_{v_1, v_2, \dots, v_n}.$$

Таким образом, абсолютная величина значения формы  $\omega_w$  на параллелепипеде из подпространства  $w^\perp \subset V$  равна  $n$ -мерному *евклидову объёму*<sup>4</sup> этого параллелепипеда, умноженному на  $|w|$ ,

<sup>1</sup>Также как и любую геодезическую.

<sup>2</sup>Т. е. такой матрицы  $C$ , что  $(w, v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ .

<sup>3</sup>В том числе бесконечномерного.

<sup>4</sup>См. п° 6.2.1 на стр. 94.

и не зависит от выбора ортонормального базиса в  $V$ . Когда вектор  $w$  лежит на единичной сфере

$$S^n = \{v \in V \mid (v, v) = 1\} \subset \mathbb{A}(V),$$

векторное подпространство  $w^\perp$  является направляющим векторным пространством аффинной касательной гиперплоскости  $T_w S^n = w + w^\perp \subset \mathbb{A}(V)$  к сфере  $S^n$  в точке  $w \in S^n$ , и ограничение на него формы  $|\omega_w|$  задаёт в этой гиперплоскости евклидов объём.

В дифференциальном исчислении гладко зависящую от точки  $x \in \mathbb{A}(V)$  линейную форму

$$\alpha(x) : \Lambda^n V \rightarrow \mathbb{R}$$

принято называть *дифференциальной  $n$ -формой* и записывать в виде

$$\alpha(x) = \sum_{v=0}^n a_{0 \dots \widehat{v} \dots n}(x) \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-18)$$

где крышка означает пропуск того, что под ней стоит, а  $a_{0 \dots \widehat{v} \dots n} : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  это гладкая функция, значение которой в точке  $x \in \mathbb{A}(V)$  по определению равно значению формы  $\alpha(x)$  на базисном грасмановом мономе  $e_0 \wedge \dots \wedge e_{v-1} \wedge e_{v+1} \wedge \dots \wedge e_n \in \Lambda^n V$ . Форма (14-17)

$$\omega(x) : \Lambda^n V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \omega_x(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (14-19)$$

записывается в виде (14-18) следующим образом:

$$\omega(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v x_v \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-20)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.14. Убедитесь в этом.

**14.3.1. Объёмы фигур.** Пусть некоторая область  $\Phi \subset S^n$  единичной сферы  $S^n \subset \mathbb{A}(V)$  является образом области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  при биективном гладком отображении  $f : \Omega \rightarrow \Phi$ . Тогда в каждой точке  $z \in \Omega$  дифференциал  $df$  отображения  $f$  линейно отображает векторное пространство  $\mathbb{R}^n$ , воспринимаемое как касательное пространство к области  $\Omega$  в точке  $z$ , в направляющее векторное пространство  $f(z)^\perp \subset V$  аффинной касательной гиперплоскости к сфере  $S^n$  в точке  $f(z)$ . Дифференциал  $df$  переводит параллелепипеды  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  в параллелепипеды  $df(\Pi) \subset f(z)^\perp$  так, что отношение евклидова объёма параллелепипеда  $df(\Pi)$  в касательном пространстве к  $S^n$  в точке  $f(z)$  к евклидову объёму параллелепипеда  $\Pi$  в  $\mathbb{R}^n$  одинаково для всех  $\Pi$  и равно  $\varrho(z) = |\omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))|$ , где  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — произвольный ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, функция  $\varrho(z)$  задаёт «коэффициент растяжения» евклидова объёма при линейном отображении касательных пространств  $df : T_z \Omega \rightarrow T_{f(z)} \Phi$  в каждой точке  $z \in \Omega$ . Интеграл от неё по области  $\Omega$  естественно называть *объёмом сферической области  $\Phi = f(\Omega) \subset S^n$* :

$$\text{Vol}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \varrho(z) dz_1 \dots dz_n.$$

Возникающая при этом на области  $\Omega$  дифференциальная форма

$$\omega(z) : \Lambda^n \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto \omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))$$

называется *подъёмом* имеющейся на сфере  $S^n \subset \mathbb{A}(V)$  дифференциальной формы (14-19) относительно гладкого отображения  $f : \Omega \rightarrow S^n$  и обычно обозначается  $f^* \omega$ .

ПРИМЕР 14.4 (ПЛОЩАДЬ ПОЛУСФЕРЫ)

Пересечение  $\Pi$  единичной сферы  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  с полупространством  $x_0 \geq 0$  является образом квадрата

$$\Omega = \{(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 \leq \psi, \varphi \leq \pi/2\}$$

из евклидова пространства  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $(\varphi, \psi)$  при отображении Эйлера  $f : \Omega \rightarrow \Pi, (\varphi, \psi) \mapsto (x_0, x_1, x_2)$ , где

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \psi \cos \varphi \\ x_1 &= \cos \psi \sin \varphi \\ x_2 &= \sin \psi. \end{aligned} \tag{14-21}$$

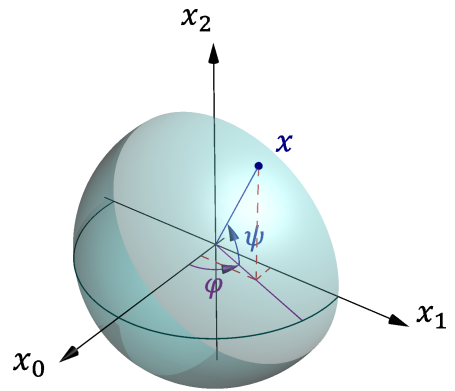


Рис. 14◊14. Эйлера углы.

Дифференцируя эти равенства по  $\varphi$  и  $\psi$ , получаем

$$\begin{aligned} dx_0 &= -\sin \psi \cos \varphi d\psi - \cos \psi \sin \varphi d\varphi & dx_1 \wedge dx_2 &= \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi \wedge d\psi \\ dx_1 &= -\sin \psi \sin \varphi d\psi + \cos \psi \cos \varphi d\varphi & dx_0 \wedge dx_2 &= -\cos^2 \psi \sin \varphi d\varphi \wedge d\psi \\ dx_2 &= \cos \psi d\psi, & dx_0 \wedge dx_1 &= \cos \psi \sin \psi d\varphi \wedge d\psi. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в дифференциальную форму (14-20)

$$\omega(x) = x_0 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_0 \wedge dx_2 + x_2 dx_0 \wedge dx_1,$$

после многочисленных сокращений заключаем, что её подъём со сферы  $S^2$  на евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$  с декартовыми координатами  $(\varphi, \psi)$  имеет вид  $f^*\omega(\varphi, \psi) = \cos \psi d\varphi \wedge d\psi$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.15. Убедитесь в этом!

Стало быть, функция  $\varrho(\varphi, \psi) = \cos \psi$ , и площадь полусферы

$$S(\Pi) = \int_{\Omega} \varrho(\varphi, \psi) d\varphi d\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi = 2\pi.$$

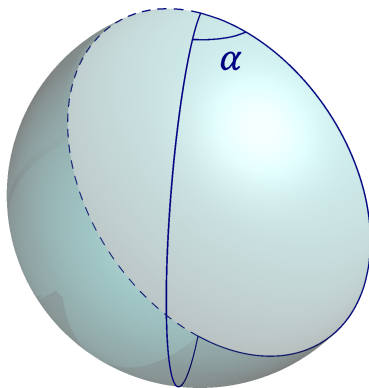


Рис. 14◊15. Площадь сферической лунки с углом  $\alpha$  равна  $2\alpha$ .

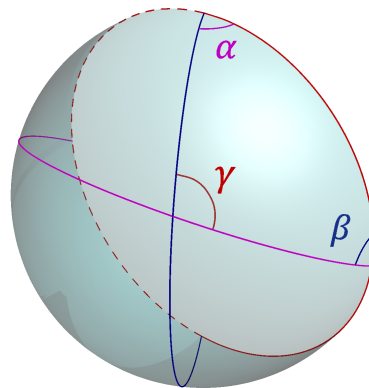


Рис. 14◊16. Лунки с углами  $\alpha$  и  $\beta$  и две части от лунки с углом  $\gamma$ .

## ТЕОРЕМА 14.2

Площадь сферического треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  равна  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ . В частности, сумма углов сферического треугольника всегда строго больше  $\pi$ .

Доказательство. Площадь сферической луночки, заключённой между двумя проходящими через центр сферы плоскостями, пропорциональна углу  $\alpha$  между этими плоскостями и относится к площади полусферы как  $\alpha : \pi$ , см. рис. 14◊15. Поэтому площадь такой лунки равна  $2\alpha$ . Сферический треугольник на рис. 14◊16 высекается из полусферы двумя луночками с углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Дополнение к этим луночкам и треугольник вместе составляют две части сферической луночки с раствором  $\gamma$ . Поэтому сумма площадей трёх сферических лунок с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  отличается от площади полусферы тем, что интересующий нас треугольник учтён в ней трижды, т. е. площадь  $S$  этого треугольника удовлетворяет равенству  $2S + 2\pi = 2(\alpha + \beta + \gamma)$ .  $\square$

**14.3.2. Инвариантная форма объёма на эллиптическом пространстве.** Сферическая форма объёма на касательных пространствах к единичной сфере в  $\mathbb{R}^{n+1}$  индуцирует форму объёма  $\text{Vol}_p$  на касательных пространствах  $T_p\mathbb{P}_n$  к эллиптическому пространству  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  во всех его точках  $p \in \mathbb{P}_n$  по правилу

$$\text{Vol}_p : \Lambda^n T_p \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mapsto \frac{|\omega_w(\tau_1(w), \tau_2(w), \dots, \tau_n(w))|}{|w|^{n+1}}. \quad (14-22)$$

Правая часть этой формулы не зависит от выбора ненулевого представителя  $w \in p$  и обладает тем свойством, что для любого ортогонального линейного оператора  $g : V \simeq V$  выполняется равенство

$$\text{Vol}_{g(p)}(dg(\tau_1), dg(\tau_2), \dots, dg(\tau_n)) = \text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

где  $dg : T_p\mathbb{P}(V) \rightarrow T_{g(p)}\mathbb{P}(V)$  это дифференциал<sup>1</sup> преобразования  $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.16. Убедитесь в этом.

При  $(w, w) = 1$  и  $\tau_i(w) = u_i$  формула (14-22) упрощается до

$$\text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \stackrel{\text{def}}{=} |\omega_w(u_1, u_2, \dots, u_n)| \quad (14-23)$$

и равна абсолютной величине формы объёма (14-20) на единичной сфере.

**14.4. Гиперболическая геометрия.** Рассмотрим пространство  $V = \mathbb{R}^{n+1}$  с лоренцевым скалярным произведением сигнатуры  $(1, n)$

$$(x, y) = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (14-24)$$

Условимся называть ортогональные базисы пространства  $V$ , в которых скалярное произведение задаётся формулой (14-24), *лоренцевыми*. Изотропная квадрика  $G = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid (v, v) = 0\}$  непуста и разбивает  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  на два непересекающихся подмножества. В аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  множество  $G_+ = \{v \in V \mid (v, v) > 0\}$  представляет собою внутренность конуса  $G$ , а множество  $G_- = -\{v \in V \mid (v, v) < 0\}$  является его внешностью, см. рис. 14◊17 на стр. 268. Проективизация первого множества  $P_+ = \{p \in \mathbb{P}_n \mid (p, p) > 0\}$  называется  $n$ -мерным пространством Лобачевского или гиперболическим пространством и обозначается  $\mathbb{L}_n$ .

<sup>1</sup>См. опр. 14.3 на стр. 262.



Ограничение скалярного произведения (14-24) на ортогонал  $p_1^\perp$  к любому вектору  $p_1$  с положительным квадратом  $(p_1, p_1) > 0$  отрицательно определено. Поэтому все геодезические  $(ab)$ , где  $a, b \in \mathbb{L}_n$ , имеют гиперболический тип<sup>1</sup>. Гиперболическое расстояние  $|p_1, p_2|$  между точками  $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$  задаётся формулами (14-7) :

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}} \quad \text{и} \quad |p_1, p_2| = \pm \frac{1}{2} \ln [p_1, p_2, a_1, a_2], \quad (14-25)$$

где  $a_1, a_2 \in \mathbb{P}_n$  суть точки пересечения<sup>2</sup> проективной прямой  $(p_1 p_2) \subset G$  с абсолютом  $G \subset \mathbb{P}_n$ .

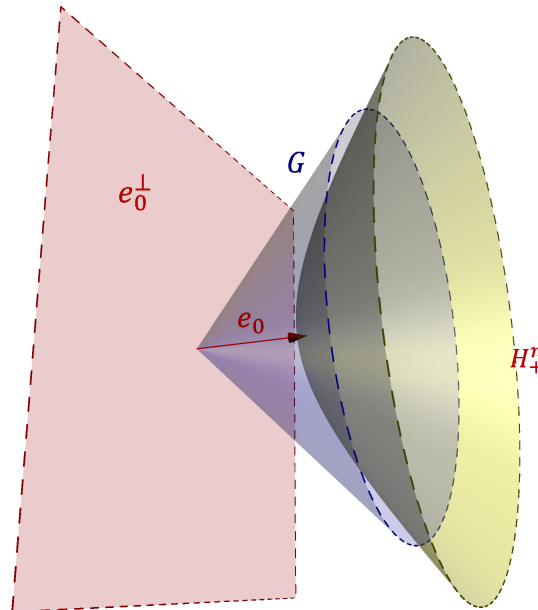


Рис. 14-17. Вектор  $e_0$  с  $(e_0, e_0) = 1$ , абсолютный конус  $G = \{v \in V \mid (v, v) = 0\}$  и положительная поля  $H_+^n = H \cap x_0^+$  гиперboloида  $H = \{v \in V \mid (v, v) = 1\}$ .

Если выбрать векторы  $p_1^+ \in p_1$  и  $p_2^+ \in p_2$  лежащими на *положительной* поле

$$H_+^n \stackrel{\text{def}}{=} \{v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (v, v) = 1 \ \& \ x_0 > 0\} \subset \mathbb{A}(V) \quad (14-26)$$

двуполостного гиперboloида векторов единичной длины, то угол между векторами  $p_1^+, p_2^+$  будет острым<sup>3</sup>, что позволяет избавиться от модуля и знаменателя в первой из формул (14-25):

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = (p_1^+, p_2^+). \quad (14-27)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.17. Покажите, что для любых двух ненулевых векторов  $a^+, b^+ \in V$  с концами на  $H_+^n$  разность  $a^+ - b^+ \notin \mathbb{L}_n$ .

<sup>1</sup>Любой ненулевой вектор  $w_1 \in a$  имеет  $(w_1, w_1) > 0$ , а ортогонал к нему пересекает плоскость  $ab$  по одномерному пространству, на котором скалярное произведение отрицательно определено.

<sup>2</sup>Обратите внимание, что обе они вещественны.

<sup>3</sup>Поскольку лежит внутри евклидова прямого угла, высекаемого плоскостью  $(p_1 p_2) \subset V$  из конуса  $(v, v) > 0$ .

Скалярное произведение касательных векторов  $\tau_1, \tau_2 \in T_p \mathbb{L}_n$  в точке  $p = \mathbb{R} \cdot w$  гиперболического пространства  $\mathbb{L}_n$  определяется по форм. (14-2<sup>-</sup>) на стр. 253 :

$$(\tau_1, \tau_2)_p \stackrel{\text{def}}{=} -(\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w). \quad (14-28)$$

Оно *положительно определено*. Для вектора  $w \in p$  с концом на  $H_+^n$  аффинная гиперплоскость  $w + w^\perp \subset \mathbb{A}(V)$  представляет собою аффинное касательное пространство к гиперboloиду  $H_+^n$  в точке  $w$ . Сопоставляя касательному вектору  $\tau : p \rightarrow p^\perp$  из  $T_p \mathbb{L}_n$  вектор  $u = \tau(w) \in w^\perp$ , мы можем отождествить касательное пространство  $T_p \mathbb{L}_n$  с векторным подпространством  $w^\perp \subset V$ , состоящим из всех касательных векторов к  $H_+^n$  в точке  $w$ . При таком отождествлении длины касательных векторов и углы между ними вычисляются по формулам

$$|\tau| = \sqrt{-(u, u)} \quad \text{и} \quad \cos \angle(\tau_1, \tau_2) = |(u_1, u_2)| / \sqrt{(u_1, u_1)(u_2, u_2)}. \quad (14-29)$$

Предложение 14.2

Геодезическое расстояние (14-25) задаёт на гиперболическом пространстве  $\mathbb{L}_n$  метрику. Каждая геодезическая  $(ab) \subset \mathbb{L}_n$  гомеоморфна вещественной прямой, и отрезок  $[a, b]$  этой прямой представляет собою ГМТ  $p \in \mathbb{L}_n$ , для которых выполняется равенство  $|a, p| + |p, b| = |a, b|$ .

Доказательство. Любые три линейно независимых вектора  $p_1, p_2, p_3$  с концами на  $H_+^n$  порождают в  $\mathbb{P}(V)$  плоскость, которая не касается абсолютной квадрики  $G$ . Поэтому ограничение лоренцева скалярного произведения на линейную оболочку этих векторов не вырождено и имеет сигнатуру  $(1, 2)$ . Следовательно, их определитель Грама

$$G_{p_1 p_2 p_3} = \det \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 \geq 0, \quad (14-30)$$

где, как и в форм. (14-11) на стр. 258, мы полагаем  $g_{ij} = (p_i, p_j)$ . В силу монотонного возрастания функции  $\text{ch } t$  на  $[0, \infty)$ , неравенство треугольника для точек  $p_1, p_2, p_3$  равносильно неравенству  $\text{ch}(|p_1, p_2| + |p_2, p_3|) \geq \text{ch} |p_1, p_3|$ , которое можно переписать как

$$\text{sh} |p_1, p_2| \cdot \text{sh} |p_2, p_3| \geq \text{ch} |p_1, p_3| - \text{ch} |p_1, p_2| \cdot \text{ch} |p_2, p_3|. \quad (14-31)$$

Поскольку левая часть здесь неотрицательна, при отрицательной правой части неравенство треугольника выполняется строго. Если же правая часть неотрицательна, возводя обе части неравенства в квадрат и пользуясь тем, что  $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ , получаем

$$(g_{12}^2 - 1)(g_{13}^2 - 1) \geq g_{12}^2 g_{23}^2 + g_{13}^2 - 2g_{12}g_{23}g_{13},$$

что превращается в (14-30) после раскрытия скобок и переноса правой части налево. Равенство в (14-31) влечёт равенство в (14-30) и, тем самым, линейную зависимость точек  $p_i$ . При  $p_1 \neq p_3$  пересечение гиперboloида  $H_+^n$  с натянутым на  $p_1, p_3$  двумерным векторным подпространством  $U \subset V$  представляет собою гиперболу в аффинизации  $\mathbb{A}(U)$  этого пространства. Если выбрать в  $U$  базис  $e_1, e_2$  с  $e_1 \in p_1$  и таким  $e_2$ , что  $(e_2, e_2) = -1$ ,  $(e_2, e_1) = 0$ , а вектор  $p_3$  имеет неотрицательные координаты, гипербола  $U \cap H_+^n$  запишется в нём уравнением  $x_1^2 - x_2^2 = 1$  и будет выглядеть как на рис. 14-5 из прим. 14.2 на стр. 257, где мы видели, что гиперболическое расстояние между точками  $a$  и  $b$  этой гиперболы равно евклидовой длине заключённой между ними дуги в такой евклидовой структуре на пространстве  $U$ , для которой базис  $e_1, e_2$  ортонормален. Таким образом, равенство  $|p_1, p_2| + |p_2, p_3| = |p_1, p_3|$  выполняется в точности для точек  $p_2$ , лежащих на заключённой между точками  $p_1$  и  $p_3$  дуге гиперболы.  $\square$

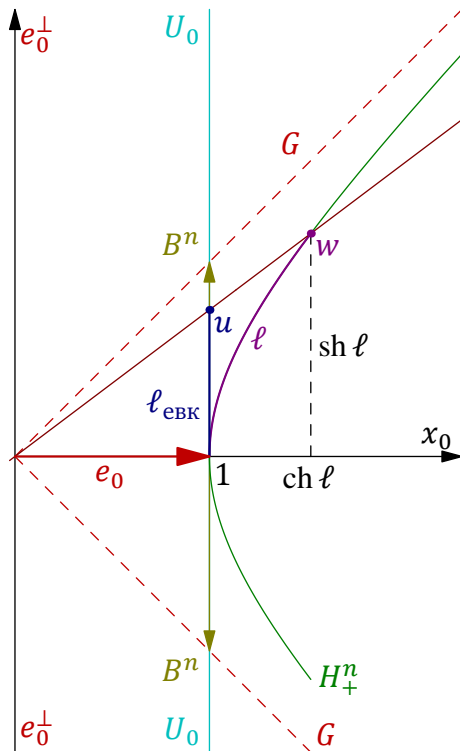
**14.4.1. Неевклидовы эффекты в гиперболической геометрии.** Всё гиперболическое пространство  $\mathbb{L}_n$  полностью наблюдаемо в стандартной аффинной карте

$$U_0 = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$$

проективного пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  как внутренность единичного шара

$$B^n = \{(1, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U_0 \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} = G_+ \cap U_0.$$

При этом прямые из  $\mathbb{L}_n$  видны в  $B^n$  в виде прямых, и через любые две различные точки проходит единственная прямая, а кратчайший путь из одной точки в другую идёт по отрезку этой прямой. Та же картина имеет место в евклидовом пространстве  $U_0$  с евклидовой структурой, задаваемой взятым с противоположным знаком ограничением лоренцева скалярного произведения с  $V$  на направляющее подпространство  $\text{Ann } x_0$  карты  $U_0$ . Однако и расстояния, и углы в  $\mathbb{L}_n$  отличаются от расстояний и углов в евклидовом пространстве  $U_0$ . Так, точка  $w = \text{ch } \ell \cdot e_0 + \text{sh } \ell \cdot e_1 \in \mathbb{L}_n$ , находящаяся на гиперболическом расстоянии  $\ell$  от точки  $e_0$ , видна в аффинной карте  $U_0 = e_0 + e_0^\perp$  как точка  $u = e_0 + \text{th } \ell \cdot e_1$ , см. рис. 14◊18, удалённая от  $e_0$  на евклидово расстояние



$$\ell_{\text{евк}} = \text{th } \ell, \tag{14-32}$$

и когда точка  $u$  приближается к абсолюту, т.е. при  $\ell_{\text{евк}} \rightarrow 1$ , гиперболическое расстояние  $\ell \rightarrow \infty$ . Плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}_2$ , как и евклидова плоскость, разбивается каждой лежащей в ней прямой на две связные компоненты. Однако через любую точку  $a$ , не лежащую на произвольно заданной прямой  $\ell$ , проходит континуальное семейство прямых, не пересекающих прямую  $\ell$ , см. рис. 14◊19.

Рис. 14◊18.  $\ell_{\text{евк}} : 1 = \text{sh } \ell : \text{ch } \ell$ .  
см. рис. 14◊19.

**Пример 14.5 (гиперболическая тригонометрия)**

Рассмотрим три линейно независимых вектора  $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{L}_2$  с концами на  $H_+^2$ . Дополним вектор  $w_0$  до лоренцева базиса в линейной оболочке векторов  $w_0, w_1$  вектором  $u_1$  так, чтобы вектор  $w_1$  имел в этом базисе положительные координаты, и рассмотрим аналогичный лоренцев базис  $w_0, u_2$  в линейной оболочке векторов  $w_0, w_2$ . Тогда угол  $\alpha_0$  при вершине  $w_0$  в  $\Delta w_0 w_1 w_2$  имеет  $\cos \alpha_0 = -(u_1, u_2)$ , а векторы  $w_1, w_2$  выражаются через базисные как<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{ch } |w_0, w_1| \cdot w_0 + \text{sh } |w_0, w_1| \cdot u_1 \\ w_2 &= \text{ch } |w_0, w_2| \cdot w_0 + \text{sh } |w_0, w_2| \cdot u_2. \end{aligned} \tag{14-33}$$

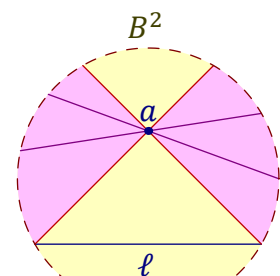


Рис. 14◊19.

<sup>1</sup>Ср. с доказательством форм. (14-15) на стр. 263.

Вычисляя при помощи этих разложений лоренцево произведение  $(w_1, w_2) = \text{ch } |w_1, w_2|$ , получаем *гиперболическую теорему косинусов*

$$\text{ch } |w_1, w_2| = \text{ch } |w_0, w_1| \cdot \text{ch } |w_0, w_2| - \text{sh } |w_0, w_1| \cdot \text{sh } |w_0, w_2| \cdot \cos \alpha_0. \tag{14-34}$$

Из (14-33) вытекает также, что определитель матрицы координат векторов  $w_0, w_1, w_2$  в произвольно зафиксированном лоренцевом базисе  $e$  пространства  $V = \mathbb{R}^3$  равен

$$\det(w_0, w_1, w_2) = \text{sh } |w_0, w_1| \text{sh } |w_0, w_2| \det(w_0, u_1, u_2).$$

Так как квадрат последнего определителя равен определителю Грама<sup>1</sup> векторов  $w_0, u_1, u_2$ :

$$\det^2(w_0, u_1, u_2) = \Gamma_{w_0, u_1, u_2} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos \alpha_0 \\ 0 & -\cos \alpha_0 & -1 \end{pmatrix} = \sin^2 \alpha_0,$$

в любом  $\Delta w_0 w_1 w_2$  с гиперболическими углами  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  и длинами сторон  $\ell_i = |w_j, w_k|$  для всех перестановок  $i, j, k$  номеров 0, 1, 2 выполнена *гиперболическая теорема синусов*

$$\det(w_0, w_1, w_2) = \text{sh } \ell_i \text{sh } \ell_j \sin \alpha_k, \tag{14-35}$$

где векторы  $w_i$ , представляющие вершины треугольника, предполагаются лежащими на единичном гиперboloиде  $H_+^2$ . Из формулы (14-35) вытекает равенство

$$\frac{\text{sh } \ell_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\text{sh } \ell_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\text{sh } \ell_2}{\sin \alpha_2}, \tag{14-36}$$

также известное как *гиперболическая теорема синусов*.

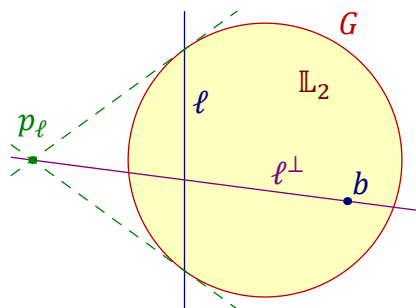


Рис. 14-20. Перпендикуляр  $\ell^\perp$ , опущенный из точки  $b$  на прямую  $\ell$ .

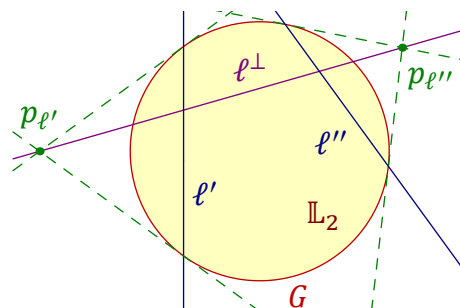


Рис. 14-21. Общий перпендикуляр  $\ell^\perp$  к двум не пересекающимся прямым  $\ell', \ell''$ .

**Пример 14.6 (перпендикуляры к прямым)**

Прямая  $\ell \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  пересекает плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{P}_2$ , если и только если её полюс  $p_\ell$  относительно абсолютной коники  $G \subset \mathbb{P}_2$  не лежит в  $\mathbb{L}_2$ , см. рис. 14-20. Две такие прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда они сопряжены относительно  $G$ , т. е. одна (а значит, и каждая) из них проходит через полюс другой. В частности, через каждую точку

<sup>1</sup>Определитель Грама любого набора векторов равен определителю Грама лоренцева базиса  $e$  в  $\mathbb{R}^3$ , умноженному на квадрат определителя матрицы координат этих векторов в лоренцевом базисе, ср. с предл. 6.2 на стр. 94.

$b \in \mathbb{L}_2 \setminus \ell$  проходит единственная прямая, перпендикулярная прямой  $\ell$ , а именно — прямая  $(bp_\ell)$ . В точке пересечения  $a = (bp_\ell) \cap \ell$  достигается строгий абсолютный минимум гиперболического расстояния от точки  $b$  точек прямой  $\ell$ , поскольку для любой отличной от  $b$  точки  $c \in \ell$  в силу формулы (14-15) выполняется неравенство  $\operatorname{ch} |b, c| = \operatorname{ch} |a, b| \cdot \operatorname{ch} |a, c| > \operatorname{ch} |a, b|$ , ибо  $\operatorname{ch} |a, c| > 1$ . В отличие от евклидовой плоскости, у любых двух пересекающихся  $\mathbb{L}_2$  но не пересекающихся внутри  $\mathbb{L}_2$  прямых  $\ell', \ell'' \subset \mathbb{P}_2$  имеется единственный общий перпендикуляр, а именно — поляр  $\ell^\perp = (p_{\ell'} p_{\ell''})$  точки  $\ell' \cap \ell''$  относительно абсолютной коники  $G$ . При этом точки пересечения  $a' = \ell' \cap \ell^\perp$  и  $a'' = \ell'' \cap \ell^\perp$  образуют единственную пару точек, на которой достигается строгий абсолютный минимум расстояний между точками прямых  $\ell'$  и  $\ell''$  в том смысле, что  $|c', c''| > |a', a''|$  для всех  $c' \in \ell' \setminus a', c'' \in \ell'' \setminus a''$ .

ПРИМЕР 14.7 (МЕДИАТОР)

В гиперболическом пространстве  $\mathbb{L}_n$  равноудалённость точки  $q$  от двух заданных различных точек  $p_1, p_2$ , где все три точки представлены векторами с концами на  $H_+^n$ , выражается равенством<sup>1</sup>  $(p_1, q) = (p_2, q)$ , означаящем, что  $q \in (p_1 - p_2)^\perp$ . Таким образом, ГМТ  $q \in \mathbb{L}_n$ , равноудалённых от двух заданных точек  $p_1 \neq p_2$ , высекается из  $\mathbb{L}_n$  проективной гиперплоскостью  $(p_1 - p_2)^\perp$ , полярной к точке  $p_1 - p_2$ , которая лежит вне  $\mathbb{L}_n$  по упр. 14.17 на стр. 268. Как и в евклидовой геометрии, эта гиперплоскость перпендикулярна прямой  $(p_1 p_2)$  и проходит через точку  $(p_1 + p_2)/2 \in \mathbb{L}_n$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.3

Если  $(n + 1)$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{L}_n$  не лежат в гиперплоскости, а точки  $a, b \in \mathbb{L}_n$  таковы, что  $|a, p_i| = |b, p_i|$  для всех  $0 \leq i \leq n$ , то  $a = b$ .

Доказательство. Если  $a \neq b$ , то согласно прим. 14.7 все точки  $p_i \in (a - b)^\perp$ . □

**14.4.2. Группа изометрий.** Гиперплоскость  $u^\perp \subset \mathbb{P}(V)$ , лоренцево ортогональная вектору  $u \in V$ , пересекает гиперболическое пространство  $\mathbb{L}_n$ , если и только если  $(u, u) < 0$ . Отражение в такой гиперплоскости  $\sigma_u : V \rightarrow V, v \mapsto v - 2(u, e) \cdot u$  задаёт линейную проективную инволюцию  $\sigma_u : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , оставляющую на месте точку  $u$  и все точки гиперплоскости  $u^\perp$ . Она переводит в себя абсолютную квадрику  $G \subset \mathbb{P}(V)$  и пространство Лобачевского  $\mathbb{L}_n$ . Возникающее таким образом изометрическое преобразование  $\sigma_u : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$  отправляет точку  $p \in \mathbb{L}_n$  в такую точку  $\sigma_u(p) \in (pu)$ , что точки  $p$  и  $\sigma_u(p)$  гармоничны на прямой  $(pu)$  точкам  $u$  и  $u^* = (pu) \cap u^\perp$ , вторая из которых сопряжена точке  $u$  относительно абсолюты. Для любых двух различных точек  $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$  существует единственная гиперплоскость, отражение в которой переводит эти точки друг в друга. Это в точности медиаторная гиперплоскость  $(p_1^+ - p_2^+)^\perp$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.18. Убедитесь в этом.

ТЕОРЕМА 14.3

Всякое изометрическое преобразование  $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$  задаётся лоренцево ортогональным линейным оператором  $g : V \simeq V$ , который определяется преобразованием  $g$  однозначно с точностью до умножения на  $\pm 1$ . Каждое изометрическое преобразование является композицией не более  $n + 1$  отражений в гиперплоскостях. Для любых двух наборов из  $n + 1$  не содержащихся в гиперплоскости точек  $p_i, q_i, 0 \leq i \leq n$ , таких что  $|p_i, p_j| = |q_i, q_j|$  для всех  $i, j$ , существует

<sup>1</sup>Обратите внимание, что в отличие от прим. 14.3 на стр. 260 в этом равенстве нет модулей, см. форм. (14-27) на стр. 268.

единственное изометрическое преобразование  $g : \mathbb{L}_n \simeq \mathbb{L}_n$ , переводящее точку  $p_i$  в точку  $q_i$  для каждого  $i$ .

Доказательство. Представим все точки векторами с концами на  $H_+^n$ . Тогда равенства  $|p_i, p_j| = |q_i, q_j|$  для всех  $i, j$  означают равенство матриц Грама этих наборов векторов. Поэтому существует линейный лоренцево ортогональный оператор  $g : V \rightarrow V$ , переводящий векторы  $p_i$  в векторы  $q_i$ . Согласно предл. 14.3, каждая точка  $z \in \mathbb{L}_n$  однозначно определяется своими расстояниями как до точек  $p_i$ , так и до точек  $q_i$ . Поэтому всякое изометрическое преобразование  $\mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ , переводящее точки  $p_i$  в точки  $q_i$ , совпадает с задаваемым оператором  $g$  преобразованием  $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ . Это доказывает первое и последнее утверждения теоремы. Единственность оператора  $g$  с точностью до знака проверяется той же выкладкой, что и в упр. 14.10 на стр. 262, а его разложение в композицию не более  $n + 1$  отражений — теми же рассуждениями, что и в теор. 7.1 на стр. 107, но с использованием упр. 14.18.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 14.19. Аккуратно проделайте все эти рассуждения.

Следствие 14.2

Всякое изометрическое преобразование  $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$  однозначно продолжается на абсолют до непрерывного преобразования  $g : \bar{\mathbb{L}}_n \rightarrow \bar{\mathbb{L}}_n$ , где  $\bar{\mathbb{L}}_n$  означает замыкание  $\mathbb{L}_n$  в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ , и однозначно восстанавливается по своему действию на абсолют.  $\square$

Пример 14.8 (гиперболические сферы)

Гиперболическая сфера радиуса  $r$  с центром в точке  $p \in \mathbb{L}_n$  определяется как ГМТ  $x \in \mathbb{L}_n$  с  $|p, x| = r$ . Это гладкая вещественная проективная квадратика с уравнением<sup>1</sup>

$$(p, x)^2 - (x, x) \cdot (p, p) \cdot \text{ch}^2 r = 0. \quad (14-37)$$

Все такие квадрики лежат в пучке  $S_\lambda = \Pi_p - \lambda G$ , натянутом на вырожденную квадратичку  $\Pi_p$  ранга 1, которая задаётся квадратичной формой  $q_0(x) = (p, x)^2$  из первого слагаемого в (14-37) и представляет собою двойную полярную гиперплоскость  $p^\perp$  точки  $p$ , а также абсолютную квадратичку  $G$ , которая задаётся квадратичной формой  $q_\infty(x) = (x, x)$  из второго слагаемого в (14-37). Симметричная билинейная форма квадратички  $S_\lambda = \Pi_p - \lambda G$  имеет вид  $\tilde{q}_\lambda(x, y) = (p, x)(p, y) - \lambda(x, y)$ , и полярная линейная форма точки  $p$  относительно неё

$$\tilde{q}_\lambda(p, y) = (p, p)(p, y) - \lambda(p, y) = (p, y) \cdot ((p, p) - \lambda)$$

тождественно зануляется при  $\lambda = (p, p)$ . Поэтому сфера нулевого радиуса  $S_{(p,p)} = \Pi_p - (p, p) \cdot G$  особа в точке  $p$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.20. Убедитесь, что в комплексном проективном пространстве  $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$  квадратичка  $S_{(p,p)}$  представляет собою простой конус с вершиной в  $p$ , образованный всеми (комплексными) касательными прямыми, опущенными из  $p$  на  $G$ .

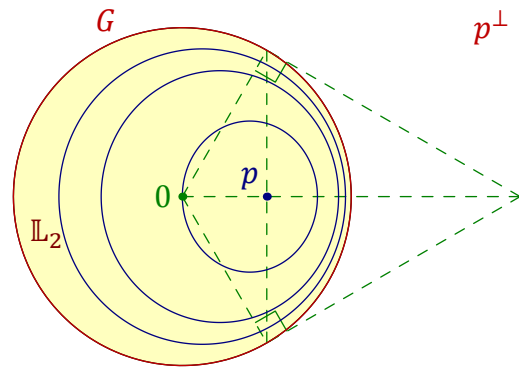


Рис. 14-22. Пучок окружностей с центром в  $p$  на плоскости Лобачевского.

<sup>1</sup>См. первую из форм. (14-25) на стр. 268.

Группа  $\Gamma_p$  всех изометрических преобразований  $\mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ , оставляющих точку  $p$  на месте, переводит в себя каждую из трёх квадрик  $S_{(p,p)}$ ,  $S_0 = \Pi_p$ ,  $S_\infty = G$ , а значит, и каждую квадрику из натянутого на них пучка. Поскольку группа  $\Gamma_p$  транзитивно действует на проходящих через точку  $p$  прямых, каждая гиперболическая сфера  $S_\lambda = \Pi_p - \lambda G$  представляет собою одну орбиту группы  $\Gamma_p$ . Гиперболический радиус  $r$  сферы  $S_\lambda$  связан с параметром пучка  $\lambda$  соотношением

$$\lambda = (p, p) \cdot \operatorname{ch}^2 r. \tag{14-38}$$

В частности, множество вещественных точек сферы  $S_\lambda$  непусто при  $\lambda \geq (p, p)$ , и при  $\lambda = (p, p)$  гиперболическая сфера вырождается в одну двойную точку  $p$ .

Если отождествить плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}_2$  с единичным кругом в аффинной карте  $U_0$  и ввести в нём декартовы координаты  $(x, y)$  так, чтобы  $p = (c, 0)$ , то лоренцев скалярный квадрат точки  $p$  будет равен  $(p, p) = 1 - c^2$ , а пучок гиперболических окружностей с центром в  $p$  будет выглядеть как пучок эллипсов<sup>1</sup> с уравнениями  $(cx - 1)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$ , см. рис. 14◊22.

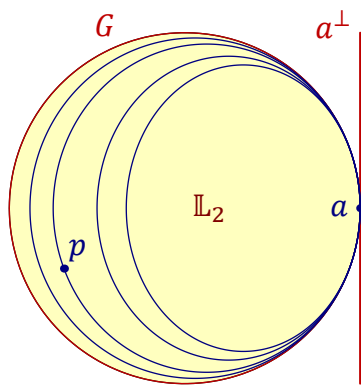


Рис. 14◊23. Пучок орициклов с полюсом в точке  $a$  на абсолютном.

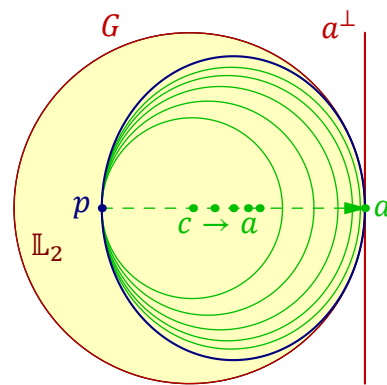


Рис. 14◊24. Орицикл как предел проходящих через  $p$  окружностей неограниченного радиуса.

Пример 14.9 (орициклы)

Квадрики из пучка, порождённого абсолютом  $G$  и двойной касательной плоскостью  $T_a G$  в некоторой точке  $a \in G$  на абсолютном, называются *орициклами* с полюсом  $a$ . Через любую точку  $p \in \mathbb{L}_n$  и любую точку  $a \in G$  проходит единственный орицикл с полюсом в  $a$ , см. рис. 14◊23. Его можно воспринимать как предел проходящих через точку  $p$  сфер, центры  $c$  которых удаляются от точки  $p$  в направлении  $a$ , а радиусы<sup>2</sup> неограниченно возрастают, см. рис. 14◊24. В отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского такие сферы не «уплощаются» в пределе до перпендикулярной к прямой  $(pa)$  гиперплоскости, проходящей через точку  $p$ , а стремятся к гладкой квадрике — орициклу с полюсом в  $a$ .

Определение 14.4 (дифференциал гиперболической изометрии)

Как и в эллиптическом случае, ортогональный оператор  $g : V \simeq V$  задаёт для каждой точки  $p \in \mathbb{L}_n$  ортогональное линейное отображение касательных пространств

$$dg : T_p \mathbb{L}_n \simeq T_{g(p)} \mathbb{L}_n, \quad \tau \mapsto g\tau g^{-1}, \tag{14-39}$$

<sup>1</sup>На комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$  это пучок коник с двумя базисными точками и двумя особыми кониками, как на рис. 13◊4 на стр. 238.

<sup>2</sup>Т. е. гиперболические расстояния  $|p, c|$ , где  $c$  это центр соответствующей сферы.

переводящее касательный вектор  $\tau : p \mapsto p^\perp$  в касательный вектор

$$dg(\tau) : gp \mapsto gp^\perp, \quad gw \mapsto g\tau(w).$$

Ортогональный линейный оператор (14-14) называется *дифференциалом* изометрического преобразования  $g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  в точке  $p \in \mathbb{P}(V)$ .

**14.5. Гиперболическая форма объёма.** Точно также, как и в н° 14.5 на стр. 275, с каждым ненулевым вектором  $w$  из пространства  $V$  с лоренцевым скалярным произведением связана кососимметричная  $n$ -линейная форма на  $V$ , значение которой на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  определяется равенством

$$w \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n = \omega_w(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n, \quad (14-40)$$

где  $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  это *лоренцев*<sup>1</sup> пространства. С точностью до знака, она не зависит от выбора лоренцева базиса в  $V$ , и абсолютная величина её значения на параллелепипеде из подпространства  $w^\perp \subset V$  равна умноженному на  $|w|$  евклидову  $n$ -мерному объёму<sup>2</sup> этого параллелепипеда вне зависимости от выбора лоренцева базиса в  $V$ . Если вектор  $w$  лежит на гиперболоиде<sup>3</sup>  $H_+^n$  векторное подпространство  $w^\perp$  является направляющим векторным пространством касательной гиперплоскости  $T_w H_+^n \subset \mathbb{A}(V)$ , и ограничение на него формы  $|\omega_w|$  задаёт в этой гиперплоскости евклидов объём. В координатах относительно лоренцева базиса  $e$  задаваемая равенством (14-40) дифференциальная форма

$$\omega(x) : \Lambda^n V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \omega_x(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (14-41)$$

записывается в точности также, как и на эллиптическом пространстве<sup>4</sup>:

$$\omega(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v x_v \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-42)$$

Если задана гладкая биекция  $f : \Omega \rightarrow \Phi$  некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  на область  $\Phi \subset H_+^n$ , то подъём  $f^* \omega$  формы  $\omega$  с  $H_+^n$  на  $\mathbb{R}^n$  в каждой точке  $z \in \Omega$  пропорционален форме евклидова объёма на  $\mathbb{R}^n$ . Абсолютная величина коэффициента пропорциональности является неотрицательной функцией на области  $\Omega$

$$\varrho(z) = |\omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))|,$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — произвольный ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^n$ , и интеграл от этой функции называется *объёмом гиперболической области*  $\Phi = f(\Omega) \subset H_+^n$ :

$$\text{Vol}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \varrho(z) dz_1 \dots dz_n.$$

Как и в н° 14.3.2 на стр. 267, форму (14-42) можно по однородности распространить до *инвариантной формы объёма* на касательном пространстве  $T_p \mathbb{L}_n$  в точке  $p \in \mathbb{L}_n$  правилом

$$\text{Vol}_p : \Lambda^n T_p \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mapsto \frac{|\omega_w(\tau_1(w), \tau_2(w), \dots, \tau_n(w))|}{|w|^{n+1}}, \quad (14-43)$$

<sup>1</sup>См. н° 14.4 на стр. 267.

<sup>2</sup>См. н° 6.2.1 на стр. 94.

<sup>3</sup>См. формулу (14-27) на стр. 268.

<sup>4</sup>См. формулу (14-20) на стр. 265.



которое не зависит от выбора ненулевого представителя  $w \in p$  и при  $w \in H_+^n$  и  $u_i = \tau_i(w)$  превращается в форму (14-41)

$$\text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \omega_w(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Как и в эллиптическом случае, форма (14-43) обладает тем свойством, что для любого лоренцево ортогонального линейного оператора  $g : V \simeq V$  выполняется равенство

$$\text{Vol}_{g(p)}(dg(\tau_1), dg(\tau_2), \dots, dg(\tau_n)) = \text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

где  $dg : T_p \mathbb{P}(V) \rightarrow T_{g(p)} \mathbb{P}(V)$  это дифференциал<sup>1</sup> преобразования  $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$ .

ПРИМЕР 14.10 (ПОДЪЁМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОБЪЁМА НА ЕВКЛИДОВ ШАР  $B^n \subset U_0$ )

Обозначим через  $t_i = x_i/x_0$  стандартные координаты в аффинной карте  $U_0 \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ , которую мы будем рассматривать как евклидово пространство со скалярным произведением

$$(u, w)_0 \stackrel{\text{def}}{=} -(u, w) = u_1 w_1 + u_2 w_2 + \dots + u_n w_n,$$

противоположным по знаку к ограничению лоренцева скалярного произведения с  $\mathbb{R}^{n+1}$  на  $e_0^\perp$ . Лежащий на единичном гиперboloиде вектор  $x(t) \in H_+^n$ , который представляет ту же самую точку пространства  $\mathbb{L}_n$ , что и вектор  $t \in B^n \subset U_0$ , имеет вид  $x(t) = x_0 \cdot (e_0 + t)$  и лоренцев скалярный квадрат  $1 = (x(t), x(t)) = x_0^2 \cdot (1 + (t, t))$ , откуда  $x_0 = (1 + (t, t))^{-\frac{1}{2}}$ . Так как  $x_i = t_i x_0$ , дифференциал  $dx_i = x_0 dt_i + t_i dx_0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n &= x_0^n dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n, \end{aligned}$$

$$dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n = x_0^{n-1} dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n.$$

Подставляя это в форму объёма (14-42), заключаем, что её подъём с гиперboloида  $H_+^n$  на евклидов шар  $B^n \subset U_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(t) &= x_0 dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + \sum_{i=1}^n (-1)^i x_i dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= x_0^{n+1} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^n \sum_{i=1}^n (-1)^i t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n = \\ &= \frac{dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n}{(1 - (t, t)_0)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент растяжения гиперболического объёма по отношению к евклидову в точке  $t \in B^n$  зависит только от евклидовой нормы  $|t|^2 = (t, t)_0$  вектора  $t$  и равен

$$\varrho(t) = (1 - |t|^2)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (14-44)$$

<sup>1</sup>См. опр. 14.4 на стр. 274.

Пример 14.11 (площадь гиперболического треугольника)

Рассмотрим на плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}_2$  прямоугольный  $\Delta abc$  с прямым углом в вершине  $c$  и гиперболическими углами  $\alpha$  и  $\beta$  в вершинах  $a$  и  $b$ . Поместим в вершину  $a$  начальный вектор лоренцева базиса в  $\mathbb{R}^3$  и обозначим через  $u$  и  $w$  изображения вершин  $b$  и  $c$  в проходящей через конец вектора  $a \in \mathbb{R}^3$  стандартной аффинной карте  $U_0 = a + a^\perp$  на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ , см. рис. 14◊25. Поскольку прямые  $(bc)$  и  $(ac)$  сопряжены в  $\mathbb{P}_2$  относительно абсолютной коники  $G$ , их изображения  $(aw)$  и  $(uw)$  в карте  $U_0$  перпендикулярны друг другу в евклидовой структуре на  $a^\perp$ , а так как гиперболические углы между касательными векторами к  $\mathbb{P}_2$  в точке  $a$  совпадают с евклидовыми углами в пространстве  $a^\perp$ , евклидов угол между прямыми  $(au)$  и  $(aw)$  равен гиперболическому углу  $\alpha$  в  $\Delta abc$ . Обозначим через  $\ell$  евклидову длину катета  $[a, w]$  евклидова  $\Delta auw$ . По форм. (14-32) на стр. 270 она выражается через гиперболическую длину  $|a, c|$  соответствующего катета в  $\Delta abc$  как  $\ell = \text{th } |a, c|$ . Гиперболическая площадь  $\Delta abc$  равна интегралу от функции (14-44) по  $\Delta auw$ :

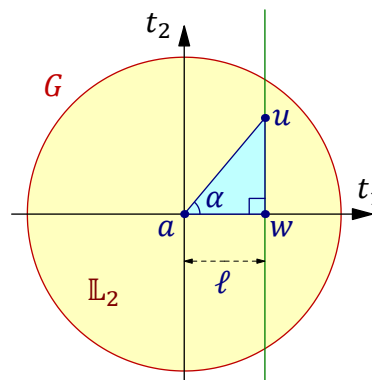


Рис. 14◊25. Изображение гиперболического  $\Delta abc$  в карте  $U_0 = a + a^\perp$ , где  $\ell = \text{th } |a, c|$ .

$$S(\Delta abc) = \int_{\Delta auw} (1 - r^2)^{-\frac{3}{2}} dt_1 dt_2,$$

где  $(t_1, t_2)$  — декартовы координаты в карте  $U_0$ , а  $r^2 = t_1^2 + t_2^2$  — квадрат евклидова расстояния до нуля. Переходя к полярным координатам

$$\begin{aligned} t_1 &= r \cos \varphi & dt_1 &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ t_2 &= r \sin \varphi & dt_2 &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \\ dt_1 \wedge dt_2 &= r dr \wedge d\varphi, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} S(\Delta acb) &= \int_0^\alpha d\varphi \int_0^{\frac{\ell}{\cos \varphi}} (1 - r^2)^{-\frac{3}{2}} r dr = \int_0^\alpha ((1 - \ell^2 / \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} - 1) d\varphi = \\ &= \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \ell^2 - \sin^2 \varphi}} - \alpha = \arcsin \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \ell^2}} \right) - \alpha. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.21. Убедитесь, что  $\sin \alpha / \sqrt{1 - \ell^2} = \cos \beta$ .

Итак, гиперболическая площадь прямоугольного треугольника с углами  $\alpha, \beta$  равна

$$S(\Delta acb) = \arcsin(\cos \beta) - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha.$$

Разрезая произвольный треугольник на два прямоугольных треугольника высотой, заключаем, что гиперболическая площадь треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  равна  $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ . В частности, сумма углов треугольника в гиперболической геометрии всегда строго меньше  $\pi$ . Из соображений непрерывности, формула для площади остаётся справедливой и для треугольников с вершинами на абсолютe, не имеющих никаких других точек на абсолютe, кроме вершин.

**14.6. Конформные модели гиперболического пространства.** Так называют изображения пространства Лобачевского точками евклидова пространства, в которых евклидовы углы между геодезическими равны гиперболическим углам, однако сами геодезические изображаются не в виде евклидовых прямых, как это было в рассмотренной выше *линейной* модели  $B^n \subset U_0$ , а в виде некоторых коник и прямых специального вида. Одна из таких моделей получается из изображения пространства Лобачевского  $\mathbb{L}_n \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  внутренностью единичного шара  $B^n \subset U_0$  представленным на рис. 14◊26 биективным квадратичным преобразованием  $\kappa : B^n \rightarrow B_0^n$  этого шара в точно такой же единичный шар

$$B_0^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{A}(e_0^\perp), \quad (14.45)$$

но лежащий в проходящей через нуль гиперплоскости  $e_0^\perp$ , параллельной карте  $U_0$ .

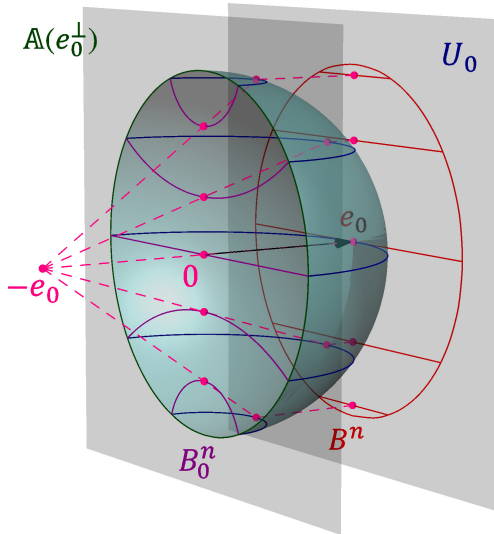


Рис. 14◊26. Квадратичное преобразование  $\kappa : B^n \rightarrow B_0^n$ .

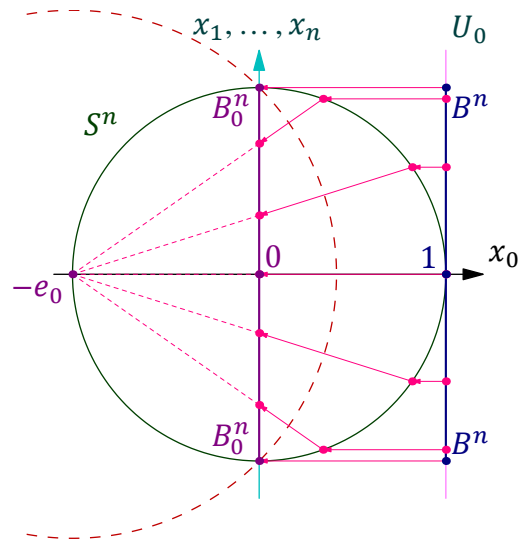


Рис. 14◊27. Вид сбоку на рис. 14◊26.

Преобразование  $\kappa$  осуществляется в два шага. Сначала параллельно спроектируем шар  $B^n$  в направлении вектора  $-e_0$  на положительную полуферу  $x_0 \geq 0$  единичной *евклидовой* сферы

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}. \quad (14.46)$$

Затем отобразим эту полуферу на параллельной карте  $U_0$  экваториальную плоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  стереографической проекцией из диаметрально противоположной к  $e_0$  точки  $-e_0 \in S^n$ . На первом шаге лежащие в шаре  $B^n$  отрезки прямых из  $U_0$  переходят в дуги окружностей, пересекающих экваториальную плоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  под прямым углом, как на рис. 14◊26. Согласно прим. 6.9 на стр. 104, следующая далее стереографическая проекция является ограничением на сферу  $S^n$  инверсии относительно большей сферы, изображённой на рис. 14◊27 красным пунктиром. Она имеет центр в точке  $-e_0$  и пересекает аффинную гиперплоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  по той же самой  $(n - 1)$ -мерной единичной сфере с центром в нуле

$$S^{n-1} = S^n \cap \mathbb{A}(e_0^\perp) = \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in e_0^\perp \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}, \quad (14.47)$$

что и сфера (14.46). Поскольку стереографическая проекция сохраняет углы и переводит окружности в окружности или прямые, геодезические пространства  $\mathbb{L}_n$  изображаются в шаре  $B_0^n$  в виде

его диаметров, а также всевозможных дуг окружностей, пересекающих граничную сферу  $S^{n-1}$  под прямым углом. При этом прямыми изобразятся в точности те геодезические, что проходят через точку  $e_0 \in \mathbb{L}_n$ , которая переводится преобразованием  $\kappa$  в центр шара  $B_0^n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.22. Обозначим через  $\varrho$  и  $\varrho_0$  евклидовы расстояния от центров шаров  $B^n$  и  $B_0^n$  до точек  $w \in B^n$  и  $w_0 = \kappa(w) \in B_0^n$  соответственно. Покажите, что они связаны соотношениями  $\varrho = 2\varrho_0 / (1 + \varrho_0^2)$  и  $\varrho_0 = (1 - \sqrt{1 - \varrho^2}) / \varrho$ .

ЛЕММА 14.1

Отражение  $\sigma_u : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n, w \mapsto w - 2(w, u) \cdot u / (u, u)$ , в ортогональной гиперплоскости  $u^\perp \subset V$  к вектору  $u$  с концом в карте  $U_0$  и отрицательным лоренцевым квадратом  $(u, u) < 0$  действует в модели  $B_0^n$  как инверсия  $\sigma_{q,d} : B_0^n \rightarrow B_0^n$  относительно  $(n - 1)$ -мерной сферы в пространстве  $A(e_0^\perp)$ , имеющей центр в точке  $q = q(u) = u - (u, e_0) \cdot e_0$ , которая является параллельной проекцией точки  $u \in U_0$  на  $A(e_0^\perp)$  вдоль вектора  $-e_0$ , и радиус  $d = d(u)$ , квадрат которого

$$d^2 = \deg_{S^{n-1}} q = \|q\|^2 - 1$$

равен степени точки  $q$  относительно единичной  $(n - 1)$ -мерной сферы (14.47).

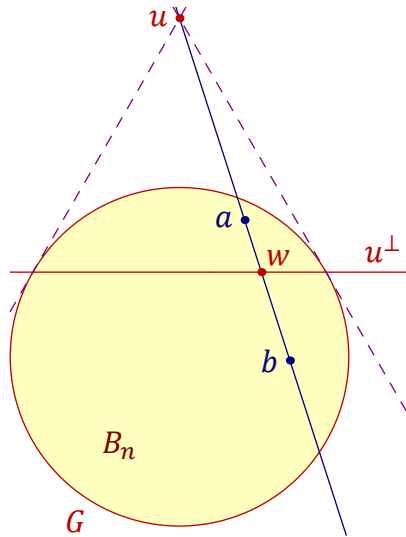


Рис. 14♦28.  $\sigma_u$ -зеркальные точки  $a, b$  имеют  $[a, b, u, w] = -1$ .

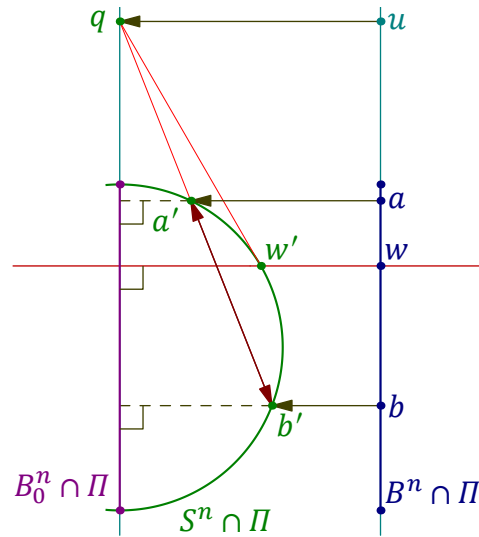


Рис. 14♦29. Параллельная проекция точек  $a, b, u, w$  на полуокружность  $S^n \cap \Pi$ .

Доказательство. Отражение  $\sigma_u : \mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n$  переводит в себя каждую проходящую через точку  $u$  прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  и действует на ней как линейная инволюция с неподвижными точками  $u$  и  $w = \ell \cap u^\perp$ . Поэтому точки  $a, b \in B^n$  переводятся друг друга отражением  $\sigma_u$ , если и только если проективная прямая  $(ab)$  проходит через точку  $u$  и на этой прямой точки  $a, b$  гармоничны точкам  $u$  и  $w = (ab) \cap u^\perp$ , см. рис. 14♦28, где изображён вид на аффинную гиперплоскость  $U_0$  вдоль вектора  $-e_0$ . Параллельная проекция точек  $u, a$  и  $b$  на полусферу  $x_0 \geq 0$  сферы  $S^n$  происходит внутри двумерной аффинной плоскости  $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , которая проходит через аффинную прямую  $(ab) \cap U_0$  параллельно вектору  $-e_0$ . Плоскость  $\Pi$  изображена на рис. 14♦29. Она пересекает сферу  $S^n$  по окружности с диаметром  $B_0^n \cap \Pi$ . Инволюция  $\sigma_u : (ab) \simeq (ab)$

задаёт инволюцию на пучке параллельных прямых, перпендикулярных этому диаметру. Неподвижными точками этой инволюции являются прямая ( $uq$ ) и поляр ( $wр$ ) точки  $q$  относительно окружности  $\Pi \cap S^n$ , а центр<sup>1</sup> пучка сопряжён точке  $q$  относительно окружности  $S^n \cap \Pi$ . В прим. 11.8 на стр. 204 мы видели, что в этом случае любые две находящиеся в инволюции друг с другом прямые пучка пересекают полуокружность по точкам, которые состоят друг с другом в инволюции, задаваемой на конике  $\Pi \cap S^n$  точкой  $q$ , т. е. лежат с точкой  $q$  на одной прямой. Таким образом, параллельная проекция шара  $B_n$  на положительную полусферу  $x_0 \geq 0$  единичной сферы  $S^n$  переводит зеркальные относительно  $u^\perp$  точки  $a, b$  в точки  $a', b' \in S^n$ , которые переводятся друг в друга инверсией сферы  $S^n$  с центром в точке  $q$ . Согласно прим. 6.10 на стр. 104, стереографическая проекция сферы  $S^n$  из точки  $-e_0$  на экваториальную гиперплоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  переводит инверсию сферы  $S^n$  с центром в точке  $q$  в инверсию гиперплоскости  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  относительно  $(n-1)$ -мерной сферы с центром в  $q$  и радиусом, квадрат которого равен степени точки  $q$  относительно единичной сферы  $S^n$ .  $\square$

#### Следствие 14.3

Группа изометрических преобразований пространства  $\mathbb{L}_n$  в модели  $B_0^n$  это группа преобразований единичного шара  $B_0^n$ , порождённая всевозможными инверсиями объёмлющего евклидова пространства  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$ , имеющими центр вне шара  $B_0^n$  и переводящими этот шар в себя. В частности, изометрические преобразования сохраняют евклидовы углы между геодезическими.  $\square$

#### Следствие 14.4

Евклидовы углы между геодезическими в модели  $B_0^n$  равны гиперболическим углам.

Доказательство. Евклидовы углы между проходящими через точку  $e_0$  прямыми в карте  $U_0$  совпадают с гиперболическими углами между этими прямыми. Преобразование  $\kappa: B^n \rightarrow B_0^n$  переводит эти прямые в диаметры шара  $B_0^n$ , сохраняя евклидовы углы. Поскольку группа изометрий пространства  $\mathbb{L}_n$  позволяет перевести любую точку с парой отложенных от неё касательных векторов единичной длины в любую другую точку с парой отложенных от неё касательных векторов единичной длины с тем же самым гиперболическим углом между ними, эта группа транзитивно действует на парах геодезических, пересекающихся под заданным гиперболическим углом. Так как группа гиперболических изометрий действует на шаре  $B_0^n$  преобразованиями, сохраняющими евклидовы углы между геодезическими, и в центре шара гиперболические углы совпадают с евклидовыми, точно такое же совпадение имеет место и в любой другой точке.  $\square$

#### Пример 14.12 (гиперболические сферы в конформной модели $B_0^n$ )

Гиперболическая сфера<sup>2</sup> радиуса  $r$  с центром в точке  $p = e_0 + q \in B^n$ , где  $q \in e_0^\perp$ , состоит из точек  $x = e_0 + w \in B_n$ , где  $w \in e_0^\perp$ , удовлетворяющих уравнению<sup>3</sup>

$$(p, x)^2 - (p, p)(x, x) \operatorname{ch}^2 r = (1 - (q, w))^2 - (1 - \|q\|^2)(1 - \|w\|^2) \operatorname{ch}^2 r = 0, \quad (14-48)$$

где  $\|u\|^2 = -(u, u)$  означает евклидов скалярный квадрат вектора  $u \in e_0^\perp$ . Параллельная проекция на единичную сферу  $S^n$  вдоль вектора  $-e_0$  отображает такую точку  $x = w + e_0$  в точку

<sup>1</sup>Он лежит на бесконечности плоскости  $\Pi$  в направлении вектора  $e_0$ , евклидово перпендикулярного проходящему через точку  $q$  диаметру окружности.

<sup>2</sup>См. прим. 14.8 на стр. 273.

<sup>3</sup>См. формулу (14-37) на стр. 273.

$x' = w + e_0 \cdot \sqrt{1 + \|w\|^2}$ , для которой в силу (14-48) выполняется равенство

$$\left( q - e_0 \cdot \sqrt{1 - \|q\|^2} \operatorname{ch} r, x' \right) = (q, w) - \sqrt{(1 - \|q\|^2)(1 - \|w\|^2)} \operatorname{ch} r = 1.$$

Таким образом, проекция гиперболической сферы радиуса  $r$  с центром в точке  $p = e_0 + q \in B^n$  на единичную сферу  $S^n$  представляет собою евклидову сферу, которая высекается из  $S^n$  гиперплоскостью с уравнением  $\left( q - e_0 \cdot \sqrt{1 - \|q\|^2} \operatorname{ch} r, x \right) = 1$ . Поскольку стереографическая проекция переводит сферы в сферы, семейство гиперболических сфер с центром в данной точке  $a \in B_0^n$  выглядит в модели  $B_0^n$  как пучок евклидовых сфер, натянутый на двойную точку  $a$  и абсолютную сферу  $S^{n-1}$ .

#### ПРИМЕР 14.13 (ДИСК ПУАНКАРЕ)

Конформную модель плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}_2$  в единичном круге  $B_0^2$  на евклидовой плоскости обычно называют *диск Пункаре*. Геодезические в этой модели изображаются диаметрами круга, а также дугами окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом. Это ровно те окружности, инверсия относительно которых переводит диск в себя, и такие инверсии как раз и являются гиперболическими отражениями относительно геодезических. Гиперболические окружности с центром в точке  $a \in \mathbb{L}_2$  изображаются на диске Пуанкаре евклидовыми окружностями из пучка, натянутого на абсолют и двойную точку  $a$ . Каждая окружность этого пучка перпендикулярна всем проходящим через точку  $a$  геодезическим, т. е. проходящим через  $a$  евклидовым окружностям, перпендикулярным абсолюту. Орициклы также видны на диске Пуанкаре как окружности, касающиеся абсолюта. Любой треугольник с нулевыми углами и вершинами на абсолютe имеет площадь  $\pi$ , не смотря на то, что его стороны имеют бесконечную длину. Отражения в сторонах такого треугольника замащивают всю плоскость Лобачевского счётным множеством треугольников с попарно не пересекающимися внутренностями, конгруэнтных исходному треугольнику.

## Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 14.5. Ответ:  $f'(t) = 2(w(t), \dot{w}(t))$ .

Упр. 14.7. Первое следует из того, что векторы  $p_1 + p_2$  и  $p_1 - p_2$ , ортогональные векторным подпространствам, проективизациями которых являются медиаторы, ортогональны (при условии, что  $(p_1, p_1) = (p_2, p_2) = 1$ ). Второе — из того, что одновременное выполнение равенств  $(p_1, q) = (p_2, q)$  и  $(p_1, q) = -(p_2, q)$  означает, что  $(p_1, q) = (p_2, q) = 0$ .

Упр. 14.8. Пусть  $p \notin U_e$ . Выберем последовательность Коши  $u : \mathbb{N} \rightarrow U_e$ , сходящуюся к  $p$ . Поскольку  $g$  сохраняет расстояния, последовательность  $g \circ u = \bar{h} \circ u$  также является последовательностью Коши и сходится в  $\mathbb{P}_n$ . В силу непрерывности отображений  $g$  и  $\bar{h}$  получаем  $g(p) = g(\lim u_n) = \lim g(u_n) = \lim \bar{h}(u_n) = \bar{h}(\lim u_n) = \bar{h}(p)$ .

Упр. 14.9. Пусть  $h(e_i) = \alpha f$ , где  $(f, f) = 1$ , и пусть  $p = e + e_i$ . Тогда  $h(p) = e + \alpha f$  и

$$\begin{aligned} \cos^2 |e, p| &= (e, p)^2 / (p, p) = 1/2 \\ \cos^2 |e, g(p)| &= (e, e + \alpha f)^2 / (e + \alpha f, e + \alpha f) = 1/(1 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Поскольку преобразование  $g$  изометрическое,  $\alpha^2 = 1$ . Поэтому  $(h(e_i), h(e_i)) = \alpha^2(f, f) = 1$ .

Упр. 14.10. Пусть  $g = \lambda f$ . Т.к.  $(v, v) = (gv, gv) = \lambda^2(fv, fv) = \lambda^2(v, v)$ , коэффициент  $\lambda = \pm 1$ .

Упр. 14.13. Сопоставьте  $m$ -линейной форме  $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$  линейную форму  $\varphi' : \Lambda^m V \rightarrow \mathbb{k}$ , значение которой на разложимых грассмановых многочленах задаётся равенством

$$\varphi'(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_m) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v_1, v_2, \dots, v_m),$$

и убедитесь, что это отображение корректно продолжается по линейности на произвольные линейные комбинации разложимых грассмановых многочленов. Обратное отображение переводит линейную форму  $\varphi' : \Lambda^m V \rightarrow \mathbb{k}$  в полилинейную форму

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_m) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_m).$$

При линейном отображении  $w \mapsto \omega_w$  базис  $e_0, e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$  переходит в базис пространства  $(\Lambda^n V)^*$ , двойственный к стандартному базису в  $\Lambda^n V$  из грассмановых мономов  $e_0 \wedge \dots \wedge e_{v-1} \wedge e_{v+1} \wedge \dots \wedge e_n$ ,  $0 \leq v \leq n$ .

Упр. 14.14. Согласно форм. (14-17) на стр. 264 для вектора  $w = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  значение

$$\omega_w(e_0, \dots, \hat{e}_v, \dots, e_n) = (-1)^v x_v.$$

Упр. 14.17. Поскольку  $(a^+, b^+) > 0$ , скалярный квадрат  $(a^+ + b^+, a^+ + b^+) > 0$ . Так как векторы  $a^+ + b^+$  и  $a^+ - b^+$  ортогональны и порождают гиперболическую плоскость  $(ab)$ , скалярный квадрат  $(a^+ - b^+, a^+ - b^+) < 0$ .

Упр. 14.18. Если точка  $q$  принадлежит зеркалу отражения, переставляющего точки  $p_1$  и  $p_2$ , то  $|p_1, q| = |p_2, q|$ , откуда  $q \in (p_1^+ - p_2^+)^\perp$ . С другой стороны, отражение  $\sigma_{p_1^+ - p_2^+}$  переводит векторы  $p_1^+$  и  $p_2^+$  друг в друга.

Упр. 14.20. Квадрика  $C_p$  проходит через базисное множество  $\Pi_p \cap G$  пучка  $\Pi_p - lG$ , а каждая проходящая через особую точку  $p$  квадрики  $S_{(p,p)}$  прямая либо больше нигде не пересекает эту

квадрику, либо лежит на ней целиком. Поэтому квадрика  $S_{(p,p)}$  является линейным соединением точки  $p$  и неособой квадрики  $P_p \cap G$  в дополнительной к точке  $p$  гиперплоскости  $p^\perp$  (ср. с доказательством теор. 11.2 на стр. 191).

Упр. 14.21. Из гиперболической теоремы косинусов<sup>1</sup> для прямоугольного  $\Delta acb$  вытекают равенства  $\operatorname{ch} |a, c| = \operatorname{ch} |a, b| \cdot \operatorname{ch} |c, b| - \operatorname{sh} |a, b| \cdot \operatorname{sh} |c, b| \cdot \cos \beta$  и  $\operatorname{ch} |a, b| = \operatorname{ch} |a, c| \cdot \operatorname{ch} |c, b|$ . Подставляя второе из них в первое, заключаем, что  $\operatorname{ch} |a, c| = \cos \beta \cdot \operatorname{sh} |a, b| / \operatorname{sh} |c, b|$ , откуда

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \ell^2}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 |a, c|}} = \sin \alpha \cdot \operatorname{ch} |a, c| = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sh} |a, b|}{\operatorname{sh} |c, b|} = \cos \beta$$

(последнее равенство вытекает из теоремы синусов<sup>2</sup> для  $\Delta acb$ ).

Упр. 14.22. Если обозначить через  $w'$  параллельную проекцию точки  $w$  на сферу  $S^n$ , а через  $\alpha$  — угол между единичными векторами  $w'$  и  $e_0$ , то  $\varrho = \sin \alpha$ , а  $\varrho_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , откуда сразу следуют обе формулы.

<sup>1</sup>См. формулу (14-34) на стр. 271.

<sup>2</sup>См. формулу (14-36) на стр. 271.