§12. Пространства со скалярным произведением

В этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

12.1. Скалярные произведения. Будем называть *скалярным произведением* на конечномерном векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ любую невырожденную симметричную билинейную форму $\beta : V \times V \to \Bbbk$. Напомню, что *невырожденность* равносильна выполнению любого из следующих эквивалентных условий:

(1) матрица Грама $B = \big(\beta(e_i, e_j)\big)$ какого-нибудь (а значит, и любого) базиса пространства V невырождена

(2) оператор корреляции $\hat\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$, сопоставляющий вектору $v \in V$ функционал скалярного умножения на этот вектор $\hat\beta(v) : V^* \to \Bbbk$, $w \mapsto \beta(w, v)$, является изоморфизмом

(3) оператор $\hat\beta$ сюрьективен, т. е. $\forall\, \xi \in V^*\ \exists\, w \in V : \xi(v) = \beta(v, w)$ для всех $v \in V$

(4) оператор $\hat\beta$ инъективен, т. е. $\forall$ ненулевого $v \in V\ \exists\, v' \in V : \beta(v', v) \neq 0$.

Упражнение 12.1. Убедитесь, что эти свойства действительно равносильны друг другу, и для любого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ в пространстве V со скалярным произведением β существует единственный *ортогонально двойственный* базис $e_1^\times, e_2^\times, \dots, e_n^\times$, такой что

$$\beta(e_i, e_j^\times) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,, \end{cases} \tag{12-1}$$

причём разложения любого вектора $v \in V$ по эти базисам имеют вид

$$v = \sum_{i=1}^{n} \beta(v, e_i^\times) \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \beta(v, e_i) \cdot e_i^\times\,. \tag{12-2}$$

Лемма 12.1

Если ограничение $\beta_U : U \times U \to \Bbbk$ симметричной билинейной формы[1] $\beta : V \times V \to \Bbbk$ на подпространство $U \subset V$ невырождено, то $V = U \oplus U^\perp$, где $U^\perp = \{v \in V \mid \forall\, u \in U\ \beta(u, v) = 0\}$.

Доказательство. Поскольку корреляция $\widehat{\beta_U} : U \xrightarrow{\sim} U^*$ биективна, для каждого вектора $v \in V$ существует единственный такой вектор $v_U \in U$, что $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$ для всех $u \in U$, т. е. $v - v_U \in U^\perp$. Тем самым, любой вектор $v \in V$ однозначно записывается как $v = v_U + v_{U^\perp}$ с $v_U \in U$ и $v_{U^\perp} = v - v_U \in U^\perp$. □

12.1.1. Ортогональные разложения и ортогональные проекции. Прямое разложение из лем. 12.1 называется *ортогональным разложением*. Оно имеется для любого подпространства $U \subset V$, на которое форма β ограничивается невырождено[2]. Невырожденность формы β на всём пространстве V в этом случае равносильна невырожденности её ограничения на $U^\perp$. Компоненты $v_U \in U$ и $v_{U^\perp} \in U^\perp$ произвольного вектора $v = v_U + v_{U^\perp} \in V$ называются *ортогональными*

[1] Которая не предполагается невырожденной.

[2] Не следует думать, что ограничение скалярного произведения на подпространство невырождено. Оно может оказаться даже тождественно нулевым, см. прим. 12.1 на стр. 210 ниже.

проекциями вектора v на подпространства U и $U^{\perp}$. Первая из них однозначно характеризуется тем, что $\beta(u,v)=\beta(u,v_U)$ для всех $u\in U$. Если задана пара ортогонально двойственных друг другу базисов $u_1,u_2,\dots,u_k$ и $u_1^{\times},u_2^{\times},\dots,u_k^{\times}$ подпространства U, то по формуле (12-2)

$$v_U=\sum_{i=1}^{n}\beta(v_U,u_i^{\times})\cdot u_i=\sum_{i=1}^{n}\beta(v,u_i^{\times})\cdot u_i\,.$$

Из любых двух пространств V_1, V_2 со скалярными произведениями β_1, β_2 можно изготовить пространство $V_1\oplus V_2$ и снабдить его таким скалярным произведением, для которого слагаемые ортогональны друг другу и которое ограничивается на V_1 и V_2 в β_1 и β_2. Это скалярное произведение обозначается $\beta_1\dotplus\beta_2$ и задаётся формулой

$$\left[\beta_1\dotplus\beta_2\right]\big((u_1,u_2),(w_1,w_2)\big)\overset{\text{def}}{=}\beta_1(u_1,u_2)+\beta_2(w_1,w_2)\,.$$

Его матрица Грама в любом базисе, первые $\dim V_1$ векторов которого образуют базис в V_1 с матрицей Грама B_1, а последние $\dim V_2$ векторов — базис в V_2 с матрицей Грама B_2, имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix}B_1&0\\0&B_2\end{pmatrix}.$$

Пространство $V_1\oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1\dotplus\beta_2$ обозначается $V_1\dotplus V_2$ и называется *ортогональной прямой суммой* пространств V_1 и V_2.

12.2. Изотропные и анизотропные подпространства. Ненулевой вектор $v\in V$ называется *изотропным*, если $\beta(v,v)=0$. Подпространство $U\subset V$ называется *анизотропным*, если в нём нет изотропных векторов. Скалярное произведение называется *анизотропным*, если анизотропно всё пространство V. Например, евклидово скалярное произведение на вещественном векторном пространстве анизотропно. Поскольку для анизотропной формы выполняется условие (4) со стр. 209, она автоматически невырождена. В частности, для любого анизотропного подпространства $U\subset V$ имеет место ортогональное разложение $V=U\oplus U^{\perp}$ из лем. 12.1.

Упражнение 12.2. Убедитесь, что скалярное произведение с матрицей Грама B на двумерном пространстве $\Bbbk^2$ анизотропно, если и только если $-\det B$ не квадрат в $\Bbbk$.

Подпространство $U\subset V$ называется *изотропным*, если $\beta(u,u)=0$ для всех $u\in U$. Поскольку

$$4\beta(u,w)=\beta(u+w,u+w)-\beta(u-w,u-w)$$

подпространство $U\subset V$ изотропно, если и только если скалярное произведение ограничивается на U в тождественно нулевую форму.

Упражнение 12.3. Докажите, что $2\dim U\leqslant\dim V$ для любого изотропного подпространства U в любом пространстве V со скалярным произведением.

Следующий ниже пример показывает, что эта оценка является точной.

Пример 12.1 (гиперболическое пространство H_{2n})
Рассмотрим n-мерное векторное пространство V и зададим на прямой сумме $H_{2n}\overset{\text{def}}{=}V^*\oplus V$ скалярное произведение h формулой

$$h\big((\xi_1,v_1),(\xi_2,v_2)\big)=\xi_1(v_2)+\xi_2(v_1)\,. \tag{12-3}$$

Иными словами, скалярное произведение вектора $v \in V$ и ковектора $\xi \in V^*$ равно их свёртке $\langle\, \xi \,,\, v \,\rangle = \xi(v) = \mathrm{ev}_v(\xi)$, а все скалярные произведения векторов с векторами и ковекторов с ковекторами нулевые. Последнее означает что прямые слагаемые $V, V^* \subset H_{2n}$ являются изотропными подпространствами половинной размерности. Матрица Грама формы h в любом базисе $(e_1^*, 0)$, $(e_2^*, 0)$, … , $(e_n^*, 0)$, $(0, e_1)$, $(0, e_2)$, … , $(0, e_n) \in V^* \oplus V$, составленном из двойственных друг другу базисов $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^* \in V^*$ и $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ имеет блочный вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{12-4}$$

где E и 0 суть единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$. В частности, форма h симметрична и невырождена. Базисы в H_{2n} с матрицей Грама (12-4) называются *гиперболическими*. Ортогональный базис в гиперболическом пространстве H_{2n} существует только при $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$. Пример такого базиса доставляют векторы $p_i = e_i + e_i^*$ и $q_i = e_i - e_i^*$ со скалярными квадратами $h(p_i, p_i) = 2$ и $h(q_i, q_i) = -2$.

Упражнение 12.4. Постройте изометрический[1] изоморфизм $H_{2m} \dotplus H_{2k} \xrightarrow{\sim} H_{2(m+k)}$.

Предложение 12.1
Каждое изотропное подпространство U в пространстве V со скалярным произведением β содержится в некотором гиперболическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2\dim U$. При этом любой базис подпространства U можно дополнить до гиперболического базиса пространства W.

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис $u_1, u_2, \dots, u_m$ в U, дополним его до базиса в V и обозначим через $u_1^\times, u_2^\times, \dots, u_m^\times$ первые m векторов ортогонально двойственного базиса. Тогда

$$\beta(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,, \end{cases} \tag{12-5}$$

и эти соотношения ортогональности не нарушаются при добавлении к любому из векторов $u_j^\times$ любой линейной комбинации векторов u_i. Заменим каждый из векторов $u_j^\times$ на вектор

$$w_j = u_j^\times - \frac{1}{2}\sum_\nu \beta(u_j^\times, u_\nu^\times)\cdot u_\nu\,.$$

Векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$ по-прежнему удовлетворяют соотношениям (12-5) и вдобавок

$$\beta(w_i, w_j) = \beta(u_i^\times, u_j^\times) - \frac{1}{2}\,\beta(u_i^\times, u_j^\times) - \frac{1}{2}\,\beta(u_j^\times, u_i^\times) = 0\,,$$

т. е. $2m$ векторов u_i, w_j, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, образуют гиперболический базис своей линейной оболочки, которую мы и возьмём в качестве W. □

Теорема 12.1
Каждое пространство V со скалярным произведением распадается в прямую ортогональную сумму $V = H_{2k} \oplus H_{2k}^\perp$, второе слагаемое которой $W = H_{2k}^\perp$ анизотропно (при этом $H_{2k} = 0$ и $H_{2k} = V$ тоже допускаются).

[1] Т. е. сохраняющий скалярные произведения векторов.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если V анизотропно (что так при $\dim V = 1$), доказывать нечего. Если есть ненулевой изотропный вектор $e \in V$, то по предл. 12.1 он лежит в некоторой гиперболической плоскости $H_2 \subset V$, и по лем. 12.1 $V = H_2 \oplus H_2^{\perp}$. По индукции, $H_2^{\perp} = H_{2m} \oplus W$, где $W = H_{2m}^{\perp}$ анизотропно. Поэтому $V = H_{2m+2} \oplus W$. □

Замечание 12.1. В теор. 12.4 на стр. 215 мы увидим, что разложение из теор. 12.1 единственно в следующем смысле: если $V = H_{2k} \dotplus U = H_{2m} \dotplus W$, где U и W анизотропны, то $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} W$.

Следствие 12.1

Всякая квадратичная форма q над произвольным полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ в подходящих координатах записывается в виде $x_1x_{i+1} + x_2x_{i+2} + \cdots + x_ix_{2i} + \alpha(x_{2i+1}, x_{2i+2} \dots , x_r)$, где $r = \operatorname{rk}(q)$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. □

Следствие 12.2

Следующие свойства пространства V со скалярным произведением эквивалентны:

1) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству

2) V является прямой суммой двух изотропных подпространств

3) $\dim V$ чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) очевидна. Пусть выполнено (2). По упр. 12.3 размерность каждого из из двух изотропных прямых слагаемых не превышает половины размерности V, что возможно только если обе эти размерности равны $\frac{1}{2}\dim V$. Тем самым, (2)⇒(3). По предл. 12.1 на стр. 211 каждое изотропное подпространство размерности $\frac{1}{2}\dim V$ содержится в гиперболическом подпространстве размерности $\dim V$, которое таким образом совпадает со всем V, что даёт импликацию (3)⇒(1). □

12.3. Изометрии. Линейное отображение $f : V_1 \to V_2$ между пространствами V_1 и V_2 со скалярными произведениями β_1 и β_2 называется *изометрическим*, если для всех $u, w \in V_1$ выполняется равенство $\beta_1(u,w) = \beta_2\big(f(u), f(w)\big)$. Изометричность линейного эндоморфизма $f : V \to V$ пространства V со скалярным произведением β означает, что матрица F опреатора f, записанная в базисе с матрицей Грама B, удовлетворят соотношению

$$F^t \cdot B \cdot F = B\,. \tag{12-6}$$

Поскольку $\det B \neq 0$, мы заключаем, что и $\det F \neq 0$. В частности, каждый изометрический изометрический оператор обратим, причём матрица обратного оператора имеет вид

$$F^{-1} = B^{-1}F^tB\,. \tag{12-7}$$

Тем самым, изометрические эндоморфизмы пространства V со скалярным произведением β образуют группу. Она называется *ортогональной группой* или *группой изометрий* и обозначается $\mathrm{O}(V)$ или $\mathrm{O}_\beta(V)$, если важно указать, какое именно скалярное произведение имеется в виду.

Пример 12.2 (изометрии вещественной гиперболической плоскости)
Оператор $f : H_2 \to H_2$, имеющий в стандартном гиперболическом базисе e, $e^* \in H_2$ матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

является изометрическимтогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

что равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad + bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} , \quad \text{где } \lambda \in \Bbbk^* = \Bbbk \smallsetminus \{0\}. \tag{12-8}$$

Над полем $\mathbb{R}$ оператор F_λ является собственным, и при $\lambda > 0$ называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор $v = (x, y)$, обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ по гиперболе $xy = \text{const}$. Если положить $\lambda = e^t$ и перейти к ортогональному базису из векторов $p = (e + e^*)/\sqrt{2}$, $q = (e - e^*)/\sqrt{2}$, оператор F_λ запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота[1]:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} ,$$

где $\operatorname{ch} t \overset{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$ и $\operatorname{sh} t \overset{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$ называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа t. Оператор F_λ с $\lambda < 0$ является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии[2]. Несобственный оператор $\tilde{F}_\lambda$ является композицией гиперболического поворота с отражением относительно пересекающей ветви оси гиперболы.

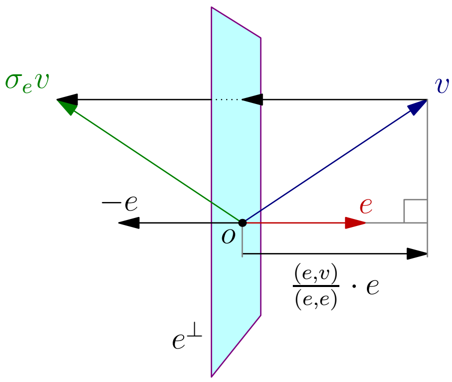

Рис. 12◇1. Отражение σ_e.

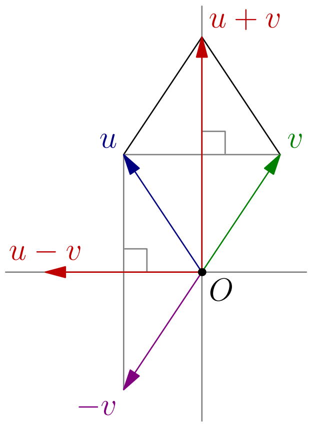

Рис. 12◇2. Отражения в ромбе.

[1] См. формулу (3-16) на стр. 42.

[2] С проективной точки зрения, при проходе параметра λ через 0 или через ∞ орбита $F_\lambda v$ перескакивает через бесконечно удалённую прямую на другую ветвь той же гиперболы.

Пример 12.3 (отражение в гиперплоскости)
Всякий анизотропный вектор $e \in V$ задаёт разложение пространства V в прямую ортогональную сумму $V = \Bbbk \cdot e \oplus e^{\perp}$. Точно так же, как и в евклидовом случае[1] назовём *отражением* в гиперплоскости $e^{\perp}$ оператор $\sigma_e : V \to V$, тождественно действующий на $e^{\perp}$ и переводящий e в $-e$, см. рис. 12◇1. Произвольный вектор $v = v_e + v_{e^{\perp}} \in V$ переходит при этом[2] в

$$\sigma_e(v) = -v_e + v_{e^{\perp}} = v - 2v_e = v - 2\,\frac{\beta(e,v)}{\beta(e,e)} \cdot e \tag{12-9}$$

Упражнение 12.5. Убедитесь, что $\sigma_e \in \mathrm{O}_\beta(V)$ и $\sigma_e^2 = \mathrm{Id}_V$, и докажите для любых изометрии $f \in \mathrm{O}(V)$ и анизотропного вектора $e \in V$ равенство $f \circ \sigma_e \circ f^{-1} = \sigma_{f(e)}$.

Лемма 12.2
В каждом пространстве V со скалярным произведением β для любых двух различных анизотропных векторов u, v с равными скалярными квадратами $\beta(u,u) = \beta(v,v) \neq 0$ существует отражение, переводящее u либо в v, либо в $-v$.

Доказательство. Если u и v коллинеарны, то искомым отражением является $\sigma_v = \sigma_u$. Если u и v не коллинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей $u+v$, $u-v$ натянутого на них ромба (см. рис. 12◇2) анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны:

$$\beta(u+v, u-v) = \beta(u,u) - \beta(v,v) = 0\,,$$

и их линейная оболочка содержит анизотропные векторы u, v. Тем самым, хотя бы одно из отражений σ_{u-v}, σ_{u+v} определено. При этом $\sigma_{u-v}(u) = v$, а $\sigma_{u+v}(u) = -v$. □

Упражнение 12.6. Проверьте, последние равенства.

Теорема 12.2
Всякая изометрия n-мерного пространства со скалярным произведением является композицией не более чем $2n$ отражений.

Доказательство. Индукция по n. Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора E и отражения $-E$. Пусть $n > 1$ и $f : V \to V$ — изометрия. Выберем в V какой-нибудь анизотропный вектор v и обозначим через σ отражение, переводящее $f(v)$ в v или в $-v$. Композиция σf переводит v в $\pm v$, а значит, переводит в себя $(n-1)$-мерную гиперплоскость $v^{\perp}$. По индукции, действие σf на $v^{\perp}$ является композицией не более $2n-2$ отражений в гиперплоскостях внутри $v^{\perp}$. Продолжим их до отражений всего пространства V, добавив в зеркало каждого отражения вектор v. Композиция полученных отражений совпадает с σf на гиперплоскости $v^{\perp}$, а её действие на v либо такое же, как у σf (при $\sigma f(v) = v$), либо отличается от него знаком (при $\sigma f(v) = -v$). Поэтому σf, как оператор на всём пространстве V, есть композиция построенных $2n-2$ отражений и, возможно, ещё одного отражения в гиперплоскости $v^{\perp}$. Следовательно, $f = \sigma\sigma f$ это композиция не более $2n$ отражений. □

Упражнение 12.7. Покажите, что в анизотропном пространстве V в условиях лем. 12.2 всегда найдётся отражение, переводящее u в точности в v, и выведите отсюда, что любая изометрия n-мерного анизотропного пространства является композицией не более n отражений.

[1] См. n° 7.1.1 на стр. 107.
[2] Ср. с форм. (7-2) на стр. 107.

Теорема 12.3 (лемма Витта)
Пусть четыре пространства U_1, W_1, U_2, W_2 со скалярными произведениями таковы, что некоторые два из трёх пространств U_1 , $U_1 \dotplus W_1$, W_1 изометрически изоморфны соответствующей паре пространств из тройки U_2 , $U_2 \dotplus W_2$, W_2. Тогда оставшиеся третьи элементы троек тоже изометрически изоморфны.

Доказательство. Если есть изометрические изоморфизмы $f : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ и $g : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$, то их прямая сумма $f \oplus g : U_1 \dotplus W_1 \to U_2 \dotplus W_2$, $(u, w) \mapsto (f(u), g(w))$, является требуемым изометричеким изоморфизмом. Оставшиеся два случая симметричны, и мы разберём один из них. Пусть имеются изометрические изоморфизмы

$$f : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \quad \text{и} \quad h : U_1 \dotplus W_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \dotplus W_2 \,,$$

Изометрический изоморфизм $g : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$ строится индукцией по $\dim U_1 = \dim U_2$. Если пространство U_1 одномерно с базисом u, то вектор u анизотропен. Поэтому векторы $f(u)$ и $h(u, 0)$ тоже анизотропны и имеют одинаковые скалярные квадраты. Обозначим через σ отражение пространства $U_2 \dotplus W_2$, переводящее $h(u, 0)$ в $\big(\pm f(u), 0\big)$. Композиция

$$\sigma h : U_1 \dotplus W_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \dotplus W_2$$

изометрично отображает одномерное подпространство U_1 первой суммы на одномерное подпространство U_2 второй, а значит, изометрично отображает ортогональное дополнение к U_1 в первой сумме на ортогональное дополнение к U_2 во второй, что и даёт требуемый изоморфизм $\sigma h|_{W_1} : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$. Пусть теперь $\dim U_1 > 1$. Выберем в U_1 любой анизотропный вектор u и рассмотрим ортогональные разложения

$$U_1 \dotplus W_1 = \Bbbk \cdot u \dotplus u^\perp \dotplus W_1 \quad \text{и} \quad U_2 \dotplus W_2 = \Bbbk \cdot f(u) \dotplus f(u)^\perp \dotplus W_2 \,,$$

в которых $u^\perp \subset U_1$ и $f(u)^\perp \subset U_2$ означают ортогональные дополнения к анизотропным векторам u и $f(u)$ внутри U_1 и U_2 соответственно. Так как пространства $\Bbbk \cdot u$ и $\Bbbk \cdot f(u)$ изометрически изоморфны, по уже доказанному существуют изометрии

$$f' : u^\perp \xrightarrow{\sim} f(u)^\perp \quad \text{и} \quad h' : u^\perp \dotplus W_1 \xrightarrow{\sim} f(u)^\perp \dotplus W_2 \,,$$

к которым применимо индуктивное предположение. □

Теорема 12.4
Построенное в теор. 12.1 разложение пространства V со скалярным произведением в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений $V = H_{2k} \dotplus U = H_{2m} \dotplus W$ имеет место равенство $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \simeq W$.

Доказательство. Пусть $m \geqslant k$, так что $H_{2m} = H_{2k} \dotplus H_{2(m-k)}$. Тождественное отображение $\mathrm{Id} : V \to V$ задаёт изометрический изоморфизм $H_{2k} \dotplus U \xrightarrow{\sim} H_{2k} \dotplus H_{2(m-k)} \dotplus W$. По лемме Витта существует изометрический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} H_{2(m-k)} \dotplus W$. Так как U анизотропно, $H_{2(m-k)} = 0$ (иначе в U будет ненулевой изотропный вектор), откуда $k = m$ и $U \simeq W$. □

Следствие 12.3
Если скалярное произведение на пространстве V невырожденно ограничивается на подпространства $U, W \subset V$ и существует изометрический изоморфизм $\varphi : U \xrightarrow{\sim} W$, то он продолжается (неоднозначно) до такого изометрического автоморфизма $f \in \mathrm{O}(V)$, что $f|_U = \varphi$.

Доказательство. Если есть хоть какой-нибудь изометрический изоморфизм $\psi : U^\perp \xrightarrow{\sim} W^\perp$, то изометрия $f = \varphi \oplus \psi : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} W \oplus W^\perp$, $(u, u') \mapsto \big(\varphi(h'), \psi(u')\big)$ является требуемым автоморфизмом пространства V. В силу сделанных предположений имеются изометрические изоморфизмы $\eta : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} V$, $(u, u') \mapsto u + u'$, и $\zeta : U \oplus W^\perp \xrightarrow{\sim} V$, $(u, w') \mapsto \varphi(u) + w'$. Композиция $\zeta^{-1}\eta : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} U \oplus W^\perp$ тоже изометрический изоморфизм. Так что по лемме Витта[1] ортогоналы $U^\perp$ и $W^\perp$ изометрически изоморфны. □

Следствие 12.4
Для каждого натурального k в диапазоне $1 \leqslant k \leqslant \dim V/2$ группа изометрий $\mathrm{O}(V)$ транзитивно действует на k-мерных изотропных и $2k$-мерных гиперболических подпространствах в V.

Доказательство. Утверждение про гиперболические подпространства вытекает непосредственно из сл. 12.3, а про изотропные — получается из него применением предл. 12.1. □

Следствие 12.5
Группа линейных проективных автоморфизмов $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$, переводящих в себя гладкую квадрику $Q \subset \mathbb{P}_n$ транзитивно действует на лежащих на Q линейных подпространствах любой фиксированной размерности (в частности, на точках квадрики). □

Следствие 12.6
Планарность гладкой проективной квадрики $Q = V(q) \subset \mathbb{P}_n$ на единицу меньше половины размерности гиперболического слагаемого в разложении из теор. 12.1 на стр. 211 для пространства V со скалярным произведением $\widetilde{q}$. □

12.4. Вещественные квадратичные формы. Из теоремы Лагранжа[2] вытекает, что любая квадратичная форма на вещественном вектором пространстве V в подходящем базисе записывается в виде

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2 . \tag{12-10}$$

Для этого надо перейти к базису с диагональной матрицей Грама и поделить каждый базисный вектор e_i с $q(e_i) \neq 0$ на $\sqrt{|q(e_i)|}$. Числа p и m в представлении (12-10) называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*, а упорядоченная пара (p, m) — *сигнатурой* вещественной квадратичной формы q. Сумма $p + m = \mathrm{rk}\, q$ равна рангу формы q и не зависит от выбора базиса. Форма q корректно задаёт невырожденную квадратичную форму q_{red} на фактор пространстве $W = V / \ker q$, поскольку $\widetilde{q}(w_1 + u_1, w_2 + u_2) = \widetilde{q}(w_1, w_2)$ для любых $u_1, u_2 \in \ker q$. В представлении (12-10) ядро $\ker q$ совпадает с линейной оболочкой всех базисных векторов e_i с номерами $i > p + m$, не задействованными в формуле (12-10), классы остальных базисных векторов по модулю $\ker q$ образуют базис пространства W, и в этом базисе форма q_{red} записывается в точности формулой (12-10). Заменяя V на W, а q на q_{red}, будем считать форму $q = q_{\mathrm{red}}$ невырожденной, а $\dim V = p + q$. Тогда каждая пара отличающихся знаком квадратов $x_i^2 - x_{p+i}^2$ в формуле (12-10), где $1 \leqslant i \leqslant \min(p, m)$, отвечает двумерному подпространству с базисом e_i, e_{p+i}, которое является гиперболической плоскостью с гиперболическим базисом $(e_i \pm e_{p+i}) / \sqrt{2}$, а всё пространство V раскладывается в прямую ортогональную сумму $\min(p, m)$ таких плоскостей и анизотропного подпространства натянутого на остальные

[1]См. теор. 12.3 на стр. 215.
[2]См. теор. 11.1 на стр. 190.

базисные векторы, форма на котором является суммой квадратов координат при $p > m$ и минус суммой квадратов координат при $p < m$. При $p = m$ форма (12-10) гиперболическая.

Мы заключаем, что разность $p - m$ в формуле (12-10) также не зависит от выбора базиса, в котором форма q имеет такой вид, и по абсолютной величине равна размерности анизотропной компоненты скалярного произведения $\widetilde{q}$, причём при $p - m > 0$ эта анизотропная компонента евклидова (форма на ней положительно определена), а при $p - m < 0$ *антиевклидова* (с отрицательно определённым скалярным произведением). В частности, для любого $n \in \mathbb{N}$ над полем $\mathbb{R}$ имеются, с точностью до изометрии, ровно два анизотропных n-мерных пространства со скалярным произведением: евклидово, с положительно определённым скалярным произведением, и антиевклидово, с отрицательно определённым скалярным произведением. Разность $p - m$ называется *индексом* квадратичной формы q. Произвольные две вещественные квадратичные формы тогда и только тогда переводятся друг в друга обратимой линейной заменой координат, когда они имеют одинаковый ранг и индекс или, что то же самое, одинаковые сигнатуры.

12.4.1. Отыскание сигнатуры. Зафиксируем в V базис и обозначим через $V_k \subset V$ линейную оболочку первых k базисных вектров $e_1, e_2, \dots, e_k$, а через $\varDelta_k$ их определитель Грама, т. е. главный угловой $k \times k$ минор матрицы Грама выбранного базиса, сосредоточенный в первых k строках и первых k столбцах, и рассматриваемый по модулю умножения на ненулевые положительные числа (ненулевые квадраты поля $\mathbb{R}$). Если он нулевой, ограничение $q|_{V_k}$ особо, и в частности, обладает изотропными векторами. Если ограничение $q|_{V_k}$ неособо, то $\varDelta_k = (-1)^{m_k}$, где показатель m_k равен отрицательному индексу инерции ограниченной формы $q|_{V_k}$. Если в последовательность $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots, \varDelta_{\dim V}$ не встречается большого числа следующих подряд нулей, то читая её слева направо, можно проследить изменение индекса формы $q|_{V_i}$ при переходе от V_i к V_{i+1} и/или появление гиперболического слагаемого при переходе от V_i к V_{i+2}, что позволяет эффективно определить индекс.

Например, пусть $\varDelta_1 < 0$, $\varDelta_2 = 0$, $\varDelta_3 > 0$, $\varDelta_4 = 0$, $\varDelta_5 = 0$, $\varDelta_6 < 0$. Поскольку форма $q|_{V_2}$ особа, пространство V_2 является прямой ортогональной суммой отрицательной анизотропной прямой $\mathbb{R}e_1$ и изотропной прямой. Поскольку ограничение на V_3 неособо, ортогональное дополнение к e_1 внутри V_3 тоже неособо и содержит изотропный вектор. Поэтому оно является гиперболической плоскостью, а $V_3 = \mathbb{R}e_1 \oplus H_2$. Обратите внимание, что $\varDelta_3$ в этом случае *обязан* отличаться знаком от $\varDelta_1$, что мы и наблюдаем[1].

Упражнение 12.8. Пусть $\varDelta_{i-1} \neq 0$, $\varDelta_i = 0$ и $\varDelta_{i+1} \neq 0$. Покажите, что $\varDelta_{i-1}\varDelta_{i+1} < 0$ и $V_{i+1} = V_{i-1} \oplus H_2$.

Итак, ограничение $q|_{V_3}$ имеет сигнатуру $(1, 2)$. Те же аргументы показывают, что ограничение формы на $V_3^{\perp}$ невырождено и содержит изотропный вектор, а значит имеет сигнатуру $(2, 1)$ или $(1, 2)$. Поскольку знаки у $\varDelta_3$ и $\varDelta_6$ противоположны, имеет место первое, и полная сигнатура q на $\mathbb{R}^6$ равна $(1, 2) + (2, 1) = (3, 3)$. Примером такой формы является форма с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] А квадратичных форм с $\varDelta_1 < 0$, $\varDelta_2 = 0$ и $\varDelta_3 < 0$ просто не существует!

Если все $\Delta_k \neq 0$, все ограничения $q|_{V_k}$ неособы, и соседние миноры Δ_i, Δ_{i+1} различаются знаком , если и только если отрицательный индекс инерции $m_{i+1} = m_i + 1$. Поэтому полный отрицательный индекс инерции m в этом случае равен числу перемен знака в последовательности $1,\ \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\dim V}$. Это наблюдение обычно называют *законом инерции*.

12.4.2. Вещественные проективные квадрики. Поскольку над полем $\mathbb{R}$ при каждом натуральном k есть единственная с точностью до изометрии и умножения на константу анизотропная форма $\alpha_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$, любая гладкая вещественная квадрика в $\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^{n+2}\right)$ в подходящих однородных координатах задаётся уравнением

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2 + x_{2m+3}^2 + \dots + x_{n+1}^2\,, \tag{12-11}$$

в котором $-1 \leqslant m \leqslant n/2$. Мы будем обозначать такую квадрику $Q_{n,m}$ и называть *n-мерной* и *m-планарной*. Квадратичная форма (12-11) имеет сигнатуру $(n+2-m, m)$, индекс $n+2-2m$, размерность её гиперболической компоненты равна $2m+2$, а её максимальные изотропные векторные подпространства $(m+1)$-мерны. Поэтому гладкая вещественная квадрика определяется числами m, n однозначно с точностью до проективной конгруэнтности, и при $m \geqslant 0$ все квадрики $Q_{n,m}$ попарно проективно не конгуэнтны друг другу. Все (-1)-планарные квадрики $Q_{n,-1}$, задаваемые анизотропными уравнениями $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$, пусты. В ортогональном базисе уравнение квадрики $Q_{n,m}$ принимает вид

$$t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_m^2 = t_{m+1}^2 + t_{m+2}^2 + \dots + t_{n+1}^2\,.$$

Гиперболические координаты x_ν связаны с ортогональными координатами t_ν формулами

$$x_{2i} = t_{m+i} + t_i\,,\ x_{2i+1} = t_{m+i} - t_i \text{ при } 0 \leqslant i \leqslant m \quad \text{и} \quad x_j = t_j \text{ при } 2m+2 \leqslant j \leqslant n+2\,.$$

Квадрики $t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2$ планарности 0 называются *эллиптическими*. Эллиптическая квадрика не содержит проективных подпространств положительной размерности. Все квадрики планарности 1 и выше принято называть *гиперболическими*, хотя, в строгом смысле слова, гиперболическими квадратичными формами среди них задаются только квадрики $Q_{2m,m}$.

Упражнение 12.9. Покажите, что пересечение гладкой вещественной m-планарной квадрики $Q_{n,m}$ с касательной гиперплоскостью является конусом над гладкой квадрикой $Q_{n-2,m-1}$ планарности $m-1$.

12.5. Аффинные квадрики. Пусть основное поле $\Bbbk$ бесконечно, и $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Множество точек

$$X = V(f) = \{v \in \mathbb{A}(V) \mid f(v) = 0\}\,,$$

задаваемое в аффинном пространстве $\subset \mathbb{A}(V)$ неоднородным многочленом второй степени

$$f = f_0 + f_1 + f_2\,, \quad \text{где} \quad f_0 \in \Bbbk,\ f_1 \in V^*,\ f_2 \in S^2V^*\,,$$

называется *аффинной квадрикой*. Две аффинных квадрики $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}(V)$ называются *аффинно эквивалентными*, если они переводятся одна в другую некоторым аффинным автоморфизмом $F : \mathbb{A}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}(V)$. Рассмотрим векторное пространство $W = \Bbbk \oplus V$ размерности $1 + \dim V$ и обозначим через $e_0 = (1, 0) \in W$ базисный вектор дополнительного одномерного слагаемого. Через $x_0 \in W^*$ обозначим такой базисный ковектор в аннуляторе $\operatorname{Ann} V \subset W^*$, что $x_0(e_0) = 1$. Вложим $\mathbb{A}(V)$ в $\mathbb{P}(W)$ в качестве стандартной аффинной карты $U_0 = U_{x_0} = e_0 + V \subset W$ и рассмотрим *проективное замыкание*[1] $Q = \overline{X} = V(q) \subset \mathbb{P}(W)$ аффинной квадрики $X \subset U_0$, задаваемое однородным квадратичным многочленом

$$q = \overline{f} = f_0 \cdot x_0^2 + f_1 \cdot x_0 + f_2 \in S^2W^* . \tag{12-12}$$

Тогда $q(e_0+v) = f(v)$ для всех $v \in V$, т. е. $Q \cap U_0 = X$. Квадратичная форма (12-12), рассматриваемая с точностью до умножения на ненулевую константу, называется *расширенной квадратичной формой* аффинной квадрики X. Например, расширенной формой окружности $x_1^2 + x_2 = 1$ является однородная квадратичная форма $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Обозначим через

$$H_\infty \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ann}(x_0) = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$$

бесконечно удалённую гиперплоскость карты U_0. Проективная квадрика

$$Q_\infty \overset{\text{def}}{=} Q \cap H_\infty = Q \smallsetminus X \subset \mathbb{P}(V)$$

называется *асимптотической квадрикой* аффинной квадрики of X. Она задаётся в $\mathbb{P}(V) = H_\infty$ однородной компонентой второй степени $q|_V = f_2 \in S^2V^*$ неоднородного многочлена f, задающего аффинную квадрику X. Изучение аффинных квадрик с точностью до аффинной конгруэртности равносильно изучению лежащих в проективном пространстве пар «проективная квадрика Q + гиперплоскость H, такая что $H \not\subset Q$ и $Q \not\subset H$» с точностью до их проективной конгруэнтности.

Предложение 12.2

Пусть непустые аффинные квадрики $X' = V(f')$, $X'' = V(f'') \subset \mathbb{A}(V)$ имеют проективные замыкания $Q' = V(q')$, $Q'' = V(q'') \subset \mathbb{P}(W)$. Тогда X' и X'' аффинно конгруэнтны , если и только если существует такой линейный проективный изоморфизм $\overline{F} : \mathbb{P}(W) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, что $\overline{F}(Q') = Q''$ и $\overline{F}(H_\infty) = H_\infty$.

Доказательство. Всякий аффинный автоморфизм $\varphi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_0$ имеет вид

$$e + v \mapsto \varphi(e) + D_\varphi v \quad \forall v \in V , \tag{12-13}$$

где $\varphi(e) \in V$, а дифференциал[2] $D_\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ является линейным изоморфизмом. Тогда линейное отображение $F : W \xrightarrow{\sim} W$, задаваемое в терминах разложения $W = \Bbbk \oplus V$ блочной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi(e) & D_\varphi \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda\varphi(e) + v \end{pmatrix} , \tag{12-14}$$

где $1 \in \Bbbk$ и $0 \in V$, переводит в себя подпространство $V \subset W$, гиперплоскость $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$ и аффинную карту U_0, причём $F|_{U_0} = \varphi$. Наоборот, всякий проективный автоморфизм $\overline{F} : \mathbb{P}(W) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, задаваемый линейным автоморфизмом $F : W \xrightarrow{\sim} W$ и переводящий в себя гиперплоскость $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$, действует на $W = \Bbbk \oplus V$ блочной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ u & \psi \end{pmatrix} ,$$

[1] См. n° 10.2.1 на стр. 177.

[2] См. n° 2.1 на стр. 24.

где $\mu \in \Bbbk$, $0, u \in V$, $f \in V$, $\psi \in \operatorname{End} V$. Поскольку F обратим, $\mu \neq 0$ и $\psi \in \mathrm{GL}(V)$. Если, не меняя проективного преобразования $\overline{F}$, перескалировать линейный изоморфизм F так, чтобы $\mu = 1$, получится в точности матрица вида (12-14), отображающая аффинную карту U_0 в себя и действующая на ней аффинным автоморфизмом (12-13) с $\varphi(e) = u$. Таким образом, аффинные автоморфизмы пространства $\mathbb{A}(V)$ это в точности проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(W)$, переводящие в себя бесконечно удалённую гиперплоскость $H_\infty = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$. Если такой проективный автоморфизм $\overline{F} : \mathbb{P}(W) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$ переводит Q' в Q'', то его ограничение на $U_0 = \mathbb{P}(W) \smallsetminus H_\infty$ переводит $X' = Q' \smallsetminus H_\infty$ в $X'' = Q'' \smallsetminus H_\infty$. Наоборот, если $\overline{F}(Q' \smallsetminus H_\infty) = Q'' \smallsetminus H_\infty$, то проективные квадрики $F(Q')$ и Q'' совпадают друг с другом всюду вне гиперплоскости H_∞. Идущая ниже лем. 12.3 утверждает, что тогда они совпадают вообще всюду. □

Лемма 12.3

Пусть гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_n$ и непустая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ над бесконечным полем $\Bbbk$ таковы, что $Q \not\subset H$ и $H \not\subset Q$. Тогда пересечение $Q \cap H$ однозначно определяется дополнением $Q \smallsetminus H$.

Доказательство. При $n = 1$ это следует из прим. 11.1 на стр. 190. Пусть $n \geqslant 2$ и $Q = V(q)$. Если Q гладкая, в дополнении $Q \smallsetminus H$ есть $n + 2$ точки, никакие $n + 1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости[1]. По ним однозначно восстанавливается поляритет[2] $\hat{q} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$, а тем самым, и матрица Грама формы q с точностью до пропорциональности. Если квадрика Q особа, но имеет гладкую точку $a \in Q \smallsetminus H$, рассмотрим любое дополнительное к $\operatorname{Sing} Q$ проективное подпространство $L \ni a$. По теор. 11.2 на стр. 191 квадрика Q является линейным соединением вершинного подпространства $\operatorname{Sing} Q$ и непустой гладкой квадрики $Q' = Q \cap L \ni a$. По уже доказанному, пересечение $Q' \cap H'$ этой квадрики с гиперплоскостью $H' = H \cap L$ в пространстве L однозначно определяется дополнением $Q' \smallsetminus H'$. Пересечение $\operatorname{Sing} Q \cap H$ также однозначно восстанавливается по $Q \smallsetminus H$, поскольку каждая прямая (a, b) с $b \in \operatorname{Sing} Q \cap H$ лежит на Q и все точки этой прямой кроме точки b лежат в $Q \smallsetminus H$. Тем самым, и пересечение $Q \cap H$, являющееся линейным соединением $Q' \cap H$ с $\operatorname{Sing} Q \cap H$, тоже однозначно восстанавливается по дополнению $Q \smallsetminus H$. Если же все точки дополнения $Q \smallsetminus H$ особы, то все точки пересечения $Q \cap H$ тоже особы, т. к. в противном случае точки любой лежащей на Q прямой (ab), соединяющей гладкую точку $a \in Q \cap H$ с особой точкой $b \in Q \smallsetminus H$, все кроме b являются гладкими и все кроме a не лежат в H. Тем самым, квадрика $Q = \operatorname{Sing} Q$ вся особа и является не содержащимся в гиперплоскости H проективным подпространством. Его собственное проективное подпространство $Q \cap H$ однозначно восстанавливается как линейная оболчка дополнения $Q \smallsetminus H$. □

Аффинные квадрики $X \subset \mathbb{A}(V)$ разбиваются на четыре класса: гладкие центральные квадрики, параболоиды, простые конусы и цилиндры, в соответствии с тем гладки или нет из проективные замыкания $Q = \overline{X} \subset \mathbb{P}(W)$ и асимптотические квадрики $Q_\infty = Q \cap H_\infty = Q \smallsetminus X \subset \mathbb{P}(V)$.

12.5.1. Гладкие центральные квадрики. Если обе квадрики Q и Q_∞ гладкие, аффинная квадрика X называется *гладкой центральной*. В этом случае бесконечно удалённая гиперплоскость H_∞ не касается квадрики Q и полюс c гиперплоскости H_∞ относительно Q находится в аффинной карте U_0 и не лежит на квадрике. Он называется *центром* аффинной квадрики X, ибо квадрика X центрально симметрична относительно c: на любой проходящей через c прямой, пересекающей квадрику X в точках a, b, а гиперплоскость H_∞ — в точке d, по предл. 11.2

[1] См. упр. 11.12 на стр. 195.

[2] См. n° 11.2.1 на стр. 193.

на стр. 194 выполняется равенство $[d, c, a, b] = -1$, означающее, что точка c является центром точек a, b.

На языке уравнений, квадрика $X = V(f_0 + f_1 + f_2)$ центральна , если и только если её расширенная квадратичная форма $q = f_0 x_0^2 + f_1 x_0 + f_2$ и квадратичная однородная компонента f_2 обе имеют ненулевые определители Грама. Если поместить начало аффинной координатной системы в центр квадрики, а в качестве базиса в V взять ортогональный базис формы f_2, линейная форма f_1 в многочлене f занулится, а свободный член f_0, напротив, будет ненулевым.

Упражнение 12.10. Убедитесь в этом.

Сокращая на f_0, приводим уравнение квадрики X к виду

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 = 1\,. \tag{12-15}$$

Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это уравнение перескалированием переменных упрощаятся до $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем все гладкие центральные аффинные квадрики аффинно конгруэнтны. Над полем $\mathbb{R}$ уравнение (12-15) упрощается до

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+m}^2 = \pm 1\,, \quad \text{где} \quad p \geqslant m\,,\ p + m = n \tag{12-16}$$

где при $p = m = n/2$ в правой части всегда можно поставить[1] $+1$. Среди квадрик (12-16) имеется ровно одна пустая. Она задаётся уравнением $\sum x_i^2 = -1$ и называется *мнимым эллипсоидом*. Также имеется ровно одна непустая квадрика без точек на бесконечности. Она задаётся уравнением $\sum x_i^2 = 1$, имеет нулевую планарность $m = 0$ и называется *эллипсоидом*. Все остальные квадрики имеют непустую асимптотическую квадрику $Q_\infty = Q \cap H_\infty \neq \varnothing$ и называются *гиперболоидами*. При $p > m$ и правой части $+1$ проективное замыкание Q квадрики (12-16) имеет сигнатуру $(p, m+1)$ и планарность m. При $p > m$ иправой части -1 квадрика Q имеет сигнатуру (p, m) и $(m-1)$-планарна. При $p = m = n/2$ квадрика Q имеет планарность $n/2$. Таким образом 0-планарные квадрики (12-16) исчерпываются эллипсоидом и *двуполостным гиперболоидом* $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = x_n^2 - 1$.

Упражнение 12.11. Убедитесь, что двуполостный гиперболоид имеет две компоненты связности, тогда как все остальные квадрики (12-16) связны.

Асимптотическая квадрика $Q_\infty = Q \cap H_\infty$ аффинной квадрики (12-16) задаётся в том же базисе пространства $H_\infty = \mathbb{P}(V)$ уравнением

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+m}^2 = 0$$

и при любом выборе знака в правой части(12-16) является m-планарной. Таким образом, все аффинные квадрики (12-16) попарно аффинно не конгруэнтны.

12.5.2. Параболоиды. Аффинная квадрика $X = V(f)$ называется *параболоидом*, если она имеет гладкое проективное замыкание Q, касающееся бесконечно удалённой гиперплоскости H_∞ в некоторой точке $c \in Q_\infty = H_\infty \cap Q$. Последнее означает[2], что $H_\infty = T_c Q$, а асимптотическая квадрика Q_∞ имеет ровно одну особую точку — точку c. На языке уравнений, квадрика

[1] При $p = m = n/2$ смена знака у обоих частей и перенумерация переменных превращает уравнение (12-16) с правой частью -1 в в уравнение с правой частью $+1$.

[2] См. лем. 11.3 на стр. 207.

$X = V(f)$ является параболоидом, если и только если её расширенная квадратичная форма $q = f_0x_0^2 + f_1x_0 + f_2$ невырождена, а однородная квадратичная компонента f_2 вырождена.

Изотропный вектор c содержится в некой гиперболической плоскости $\Pi \subset W$ и включается в гиперболический базис b, c этой плоскости. Так как $b \notin c^\perp = V = \operatorname{Ann} x_0$, значение $x_0(b) \neq 0$, и базис b, c можно перескалировать в гиперболический базис $p_0 = \lambda b$, $p_n = \lambda^{-1}c$ плоскости Π так, чтобы $x_0(p_0) = 1$. Дополняя векторы p_0, p_1 до базиса в W векторами $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$, составляющими ортогональный базис ортогонального дополнения $\Pi^\perp$ к плоскости Π в W, мы преобразуем однородное уравнение квадрики Q к виду

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}^2 = x_0x_n$$

Так как $\Pi^\perp \subset c^\perp = V$ имеет коразмерность 1 в V, векторы $p_1, p_2, \dots, p_n$ составляют базис пространства V. В аффинной системе координат на U_0 с таким базисом и началом в точке $p_0 \in U_0$ аффинное уравнение квадрики X имеет вид

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}^2 = x_n\,. \tag{12-17}$$

Над алгебраически замкнутым полем это упрощается до $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n$, и мы заключаем, что все параболоиды над алгебраически замкнут полем аффинно конгруэнтны. Над полем $\mathbb{R}$ уравнение (12-17) преобразуется к виду

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2 = x_n\,, \quad \text{где} \quad p \geqslant m\,,\ p+m = n-1\,. \tag{12-18}$$

Параболоид (12-18) имеет планарность m. Поэтому при разных параболоиды (12-18) аффинно не конгруэнтны. Нуль-планарный параболоид $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n$ называется *эллиптическим*, а все остальные — *гиперболическими*.

12.5.3. Простые конусы. Аффинная квадрика $X = V(f)$ называется *простым конусом*, если её проективное замыкание Q особо, а асимптотическая квадрика Q_∞ гладкая. На языке уравнений это означает что расширенная квадратичная форма имеет нулевой определитель Грама, а однородная компонента второй степени — ненулевой.

Упражнение 12.12. Убедитесь, что когда проективное замыкание $Q \subset \mathbb{P}(W)$ особо, гладкость квадрики $Q_\infty = Q \cap H_\infty$ равносильна тому, что $\operatorname{Sing} Q \cap H_\infty = \varnothing$.

Так как H_∞ имеет коразмерность 1 в $\mathbb{P}(W)$, из упр. 12.12 вытекает, что $\dim \operatorname{Sing} Q = 0$, т. е. квадрика Q имеет ровно одну особую точку c, и она лежит в аффинной карте U_0. Помещая в неё начало аффинной координатной системы и беря в качестве базиса в V ортогональный базис (невырожденной) квадратичной формы f_2, получаем для аффинной квадрики X уравнение

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2 = 0\,, \tag{12-19}$$

одновременно являющееся и однородным уравнением асимптотической квадрики $Q_\infty \subset \mathbb{P}(V)$. Над алгебраически замкнутым полем уравнение (12-19) приводится к виду

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0\,. \tag{12-20}$$

Тем самым, все простые конусы над алгебраически замкнутым плем аффинно конгруэнтны. Над полем $\mathbb{R}$ уравнение (12-19) приводится к виду

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+m}^2\,, \quad \text{где} \quad p \geqslant m \text{ и } p+m = n\,. \tag{12-21}$$

Это однородное уравнение задаёт в $\mathbb{P}(V)$ поективную квадрику планарности $m-1$. Поэтому аффинный конус (12-21) m-планарен. В частности, все конусы (12-21) попарно аффинно не конгруэнтны друг другу. Обратите внимание, что при $m=0$ аффинный конус (12-21) состоит из единственной точки — начала координат.

12.5.4. Цилиндры. Афинная квадрика $X = V(f)$ называется *цилиндром*, если и её проективное замыкание Q и асимптотичесая квадрика Q_∞ обе особы. Согласно упр. 12.12, это автоматически означает, что $\operatorname{Sing} Q \cap H_\infty \neq \varnothing$. В терминах уравнений, цилиндры характеризуются занулением определителей Грама расширенной квадратичной формы q и квадратичной составляющей f_2 многочлена f, задающего аффинную квадрику. Если выбрать в V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ так, чтобы векторы e_i с $i > r$ составили базис в $\ker q \cap V$, то уравнение аффинной квадрики квадрики X не будет зависеть от последних $n-r$ координат. Поэтому любой цилиндр является прямым произведением аффинного пространства $\mathbb{A}^{n-r}$, параллельного последним $n-r$ базисным векторам, и не имеющей особенностей на бесконечности аффинной квадрики в пространстве $\mathbb{A}^r$, принадлежащей к одному из уже рассмотренных выше трёх типов.

Пример 12.4 (вещественные аффинные кривые второй степени)
Полный список непустых аффинных «кривых второй степени» в $\mathbb{R}^2$ с точностью до аффинной конгруэнтности таков:

- *эллипс* $x_1^2 + x_2^2 = 1$, гладкая центральная квадрика с пустой асимптотической квадрикой на бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$
- *гипербола* $x_1^2 - x_2^2 = 1$, гладкая с центральная квадрика, асимптотическая проективная квадрика которой состоит из двух точек $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ на бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$
- *парабола* $x_1^2 = x_2$, касающаяся бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$ в точке $(0 : 0 : 1)$
- *двойная точка* $x_1^2 + x_2^2 = 0$, простой конус над гладкой пустой квадрикой на бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$
- *пара пересекающихся прямых* $x_1^2 - x_2^2 = 0$, простой конус над гладкой непустой квадрикой на бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$
- *пара параллельных прямых* $x_1^2 = 1$, цилиндр над гладкой непустой аффинной квадрикой в $\mathbb{A}^1$
- *двойная прямая* $x_1^2 = 0$, циллиндр над двойной точкой в $\mathbb{A}^1$.

Все три непустые гладкие квадрики: эллипс, гипербола, и парабола, являются различными аффинными кусками одной и той же гладкой вещественной проективной коники Веронезе сигнатуры $(2, 1)$.

Пример 12.5 (вещественные аффинные квадратичные поверхности)
Полный список непустых аффинных «квадратичных поверхностей» в $\mathbb{R}^3$ вдвое длиннее предыдущего списка кривых. Он состоит из семи цилиндров над всеми предыдущими «кривыми второго порядка». Эти цилиндры задаются ровно теми же уравнениями, но только в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3), и называются, соответственно, элиптическим, гиперболическим и параболическим цилиндрами, двойной прямой, парой пересекающихся и парой параллельных плоскостей и двойной плоскостью.

Кроме семи цилиндров есть три гладких центральных поверхности:

- *эллипсоид* $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, являющийся изображением 0-планарной проективной квадрики сигнатуры $(3,1)$ в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0=0$ которой не пересекается с квадрикой; эллипсоид компактен и 0-планарен (см. рис. 12◇4)
- *двуполостный гиперболоид* $x_1^2+x_2^2=x_3^2-1$, изображение той же самой проективной квадрики сигнатуры $(3,1)$ в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0=0$ которой пересекает квадрику по конике Веронезе; двуполостный гиперболоид 0-планарен и имеет две компоненты связности (см. рис. 12◇5)
- *однополостный гиперболоид* $x_1^2+x_2^2=x_3^2+1$, аффинное изображение проективной квадрики Сегре сигнатуры $(2,2)$ в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0=0$ которой пересекает квадрику Сегре по конике Веронезе; однополостный гиперболоид связен, 1-планарен и заметается двумя семействами прямых (см. рис. 12◇6)

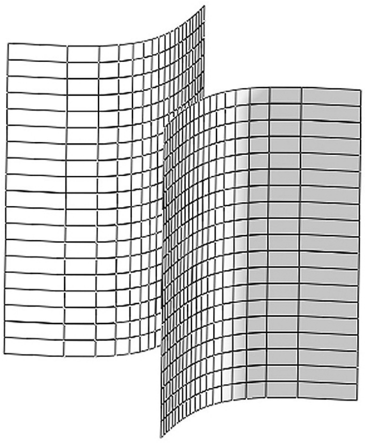

Рис. 12◇3. Гиперболический цилиндр $x_1^2-x_2^2=1$.

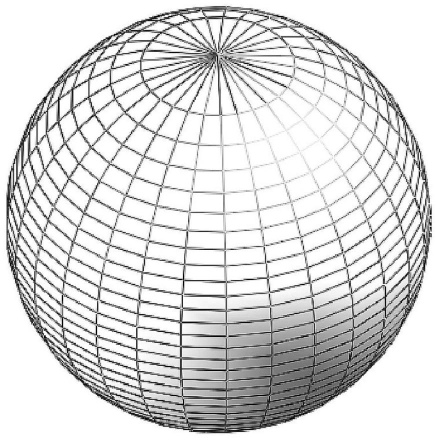

Рис. 12◇4. Эллипсоид $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$.

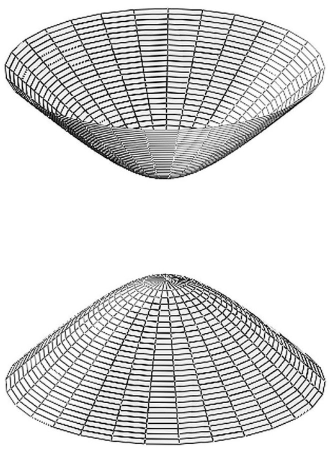

Рис. 12◇5. Гиперболоид $x_1^2+x_2^2=x_3^2-1$.

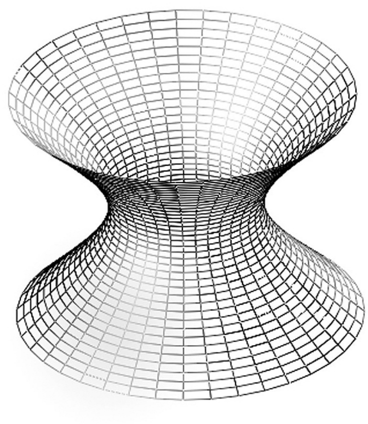

Рис. 12◇6. Гиперболоид $x_1^2+x_2^2=x_3^2+1$.

два параболоида:

- *эллиптический параболоид* $x_1^2+x_2^2 = x_3$, изображение 0-планарной проективной квадрики сигнатуры $(3, 1)$ в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0 = 0$ которой касается квадрики в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$ и больше нигде с ней пересекается; эллиптический параболоид 0-планарен (см. рис. 12◇7)

- *гиперболический параболоид* $x_1^2 - x_2^2 = x_3$, изображение проективной квадрики Сегре сигнатуры $(2, 2)$ в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0 = 0$ которой касается квадрики в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$, высекая из неё пару пересекающихся в точке касания прямых $x_1 = \pm x_2$; гиперболический параболоид 1-планарен и заметается двумя семействами прямых (см.рис. 12◇9)

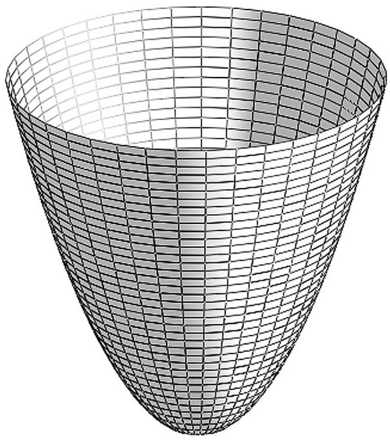

Рис. 12◇7. Параболоид $x_1^2 + x_2^2 = x_3$.

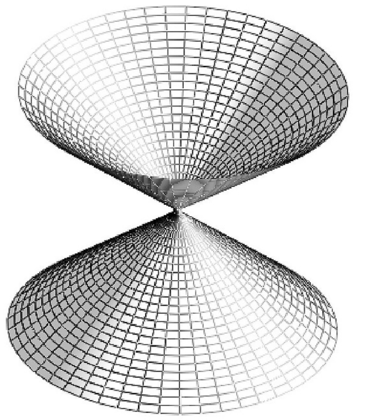

Рис. 12◇8. Конус $x_1^2 - x_2^2 = x_3^2$.

и два простых конуса над двумя различными гладкими вещественными проективными кониками:

- *двойная точка* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, конус над пустой коникой

- *эллиптический конус* $x_1^2 - x_2^2 = x_3^2$, конус над кникой Веронезе (см. рис. 12◇8)

Итого, 14 различных непустых фигур.

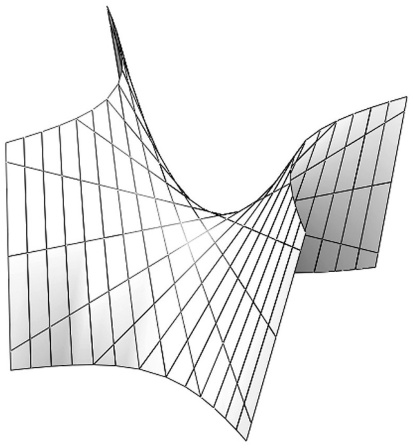

Рис. 12◇9. Гиперболический параболоид $x_1^2 - x_2^2 = x_3$.

12.6. Линейные операторы на пространстве со скалярным произведением. Рассмотрим векторное пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$, $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$, со скалярным произведением, которое обозначим через

$$(* , *) : V \times V \to \Bbbk, \quad u, w \mapsto (u, w), \tag{12-22}$$

и изоморфизмом корреляции $g : V \xrightarrow{\sim} V^*$, переводящим вектор $w \in V$ в ковектор

$$g(w) : V \to \Bbbk, \quad v \mapsto (v, w).$$

Каждому линейному оператору $f : V \to V$ сопоставим билинейную форму

$$\beta_f : V \times V \to \Bbbk, \quad \beta_f(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} (u, fw).$$

Упражнение 12.13. Проверьте, что матрица Грама B формы β_f выражается через матрицу F оператора f и матрицу Грама G скалярного произведения (12-22) по формуле $B = GF$, а оператор корреляции $\widehat{\beta}_f : w \mapsto \beta_f(*, w)$ равен композиции $\widehat{\beta}_f = gf$.

Поскольку корреляция g и матрица G обратимы, сопоставление $f \mapsto \beta_f$ устанавливает линейный изоморфизм между векторными пространствами линейных операторов $f : V \to V$ и билинейных форм $V \times V \to \Bbbk$: билинейная форма β с оператором корреляции $\widehat{\beta} : V \xrightarrow{\sim} V^*$ и матрицей Грама B получается из единственного оператора $f = g^{-1}\widehat{\beta} : V \to V$ с матрицей $F = G^{-1}B$. Если билинейная форма $\beta_f : V \times V \to \Bbbk$ симметрична, оператор $f : V \to V$ удовлетворяет при всех $u, w \in V$ равенствам $(fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u) = \beta_f(u, w) = (u, fw)$. Наоборот, если

$$\forall\, u, w \in V \quad (fu, w) = (u, fw), \tag{12-23}$$

то билинейная форма $\beta_f(u, w) = (u, fw) = (fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u)$ симметрична. Операторы $f : V \to V$, обладающие свойством (12-23), называются *автодуальными* или *самосопряжёнными* относительно скалярного произведения (12-22). Матрица F такого оператора и матрица Грама G скалярного произведения (12-22) связаны соотношением $F^t G = GF$.

Лемма 12.4
Если автодуальный линейный оператор $f : V \to V$ переводит в себя некоторое подпространство $U \subset V$, то он переводит в себя и его ортогонал $U^\perp = \{v \in V \mid \forall\, u \in U \ (u, w) = 0\}$.

Доказательство. Пусть $w \in U^\perp$, т. е. $(u, w) = 0$ для всех $u \in U$. Тогда $(u, fw) = (fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, т. к. $fu \in U$. Тем самым, $fw \in U^\perp$. □

Упражнение 12.14. Покажите, что собственные векторы с разными собственными значениями у автодуального оператора ортогональны друг другу.

Предложение 12.3
Если характеристический многочлен автодуального линейного оператора $f : V \to V$ полностью раскладывается в поле $\Bbbk$ на линейные множители и все ненулевые собственные векторы оператора f анизотропны, то в пространстве V имеется ортогональный базис из собственных векторов оператора f.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если оператор f является умножением на скаляр (что так при $\dim V = 1$), то подойдёт любой ортогональный базис пространства V. Пусть $\dim V > 1$ и оператор f не скалярен. Поскольку характеристический многочлен $\det(tE - F)$ имеет корни в $\Bbbk$, у оператора F есть ненулевое собственное подпространство $V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\} \subsetneq V$. По условию леммы, оно анизотропно, и значит, скалярное произведение ограничивается на него невырождено. Поэтому $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, и ограничение скалярного произведения на $V_\lambda^\perp$ тоже невырождено. По лем. 12.4 оператор f переводит подпространство $V_\lambda^\perp$ в себя. Тем самым, характеристический многочлен оператора f раскладывается в произведение характеристических многочленов ограничений $f|_{V_\lambda}$ и $f|_{V_\lambda^\perp}$. По предположению леммы и в силу единственности разложения на множители в $\Bbbk[t]$, оба они полностью раскладываются на линейные множители в поле $\Bbbk$. По индуктивному предположению в подпространстве $V_\lambda^\perp$ есть ортогональный базис из собственных векторов оператора f. Добавляя к нему любой ортогональный базис собственного пространства V_λ, получаем нужный базис в V. □

12.6.1. Автодуальные операторы на евклидовом пространстве. Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, а скалярное произведение на пространстве V евклидово, условия предл. 12.3 выполняются для любого автодуального оператора.

Лемма 12.5
Характеристический многочлен самосопряжённого оператора на евклидовом пространстве полностью раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{R}$.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, доказывать нечего. Если $\dim V = 2$, оператор f задаётся в ортонормальном базисе симметричной матрицей

$$F = F^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} .$$

Её характеристический многочлен $\det(tE - F) = t^2 - (a+c)\cdot t + (ac - b^2)$ имеет неотрицательный дискриминант $(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2$ и вещественные корни. При $\dim V > 2$ по лем. 7.1 на стр. 108 в V имеется одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$, которое переводится оператором f в себя. По лем. 12.4 его ортогональное дополнение $U^\perp$ также переходит в себя под действием f, а значит, $\chi_f = \chi_{f|_U} \cdot \chi_{f|_{U^\perp}}$. Первый характеристический многочлен полностью раскладывается на линейные множители над $\mathbb{R}$ по уже доказанному, второй — по предположению индукции. □

Теорема 12.5 (теорема о нормальном базисе)
Любая квадратичная форма q на евклидовом пространстве V имеет в подходящем ортонормальном базисе пространства V диагональную матрицу Грама. Её диагональные элементы с точностью до перестановки не зависят от выбора базиса и равны собственным числам того единственного автодуального оператора $f : V \to V$, для которого $q(v) = (v, fv)$. Если все эти собственные числа различны, ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы q диагональна, единственен с точностью до перестановки базисных векторов и замены их направлений на противоположные.

Доказательство. По предл. 12.3 в V есть ортонормальный базис из собственных векторов оператора f_q. Матрица Грама формы q в любом ортонормальном базисе совпадает с матрицей оператора f_q. В ортонормальном базисе из собственных векторов она диагональна, причём на её диагонали стоят собственные числа оператора f_q, и каждое собственное число λ присутствует столько раз, какова кратность корня λ в характеристическом многочлене оператора f_q. Поэтому с точностью до перестановки диагональных элементов такая матрица не зависит от выбора нормального базиса. Если все диагональные элементы различны, каждое собственное подпространство оператора f_q одномерно, все они ортогональны друг другу по упр. 12.14, и нормальные базисные векторы с точностью до знака задаются как векторы единичной длины, порождающие эти подпространства. □

12.6.2. Евклидовы квадрики. В евклидовом пространстве перечисленные в n° 12.5 классы аффинно конгруэнтных квадрик расщепляются дальше на классы евклидово конгруэнтных квадрик. Две квадрики называются *евклидово конгруэнтными*, если они переводятся одна в другую движением евклидова пространства. По теор. 12.5 любая квадратичная форма на евклидовом пространстве в подходящем ортонормальном базисе записывается в виде

$$q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_rx_r^2\,, \tag{12-24}$$

где $r = \operatorname{rk} q$, а коэффициенты a_i не зависят от выбора ортонормального базиса, в котором форма q имеет вид (12-24), и являются таким образом инвариантами формы q относительно евклидовых изометрий. Они совпадают с собственными числами матрицы $G^{-1}Q$, где G и Q суть матрицы Грама евклидова скалярного произведения и квадратичной формы q в одном и том же произвольном базисе пространства V. Ортонормальный базис, в котором форма q приобретает вид (12-24), называется *нормальным базисом* формы q.

Если квадрика $X = V(f)$ гладкая центральная, то её уравнение в аффинной системе координат с началом в центре квадрики и таким базисом в V, который является нормальным для асимптотической квадратичной формы f_2, имеет вид[1]

$$a_1^2x_1^2 + \dots + a_p^2x_p^2 - b_1^2x_{p+1}^2 - \dots - b_m^2x_{p+m}^2 = \pm 1\,, \tag{12-25}$$

где $a_i, b_i > 0$, $p \geqslant m$, $p + m = n$, и при $p = m = n/2$ в правой части стоит $+1$. Такая квадрика получается из квадрики (12-16) растяжением вдоль её нормальных осей с коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_p$, $b_1, b_2, \dots, b_m$. Эти коэффициенты называются *вещественными* и *мнимыми полуосями* гладкой центральной квадрики. Две аффинно конгруэнтных гладких центральных квадрики евклидово конгруэнтны, если и только если они имеют одинаковые наборы вещественных и мнимых полуосей.

Если квадрика $X = Z(f)$ является параболоидом[2], и её проективное замыкание $Q = \overline{X}$ касается бесконечно удалённой гиперплоскости $H_\infty = \mathbb{P}(V)$ в точке c, обозначим через $L \subset \mathbb{P}(V)$ поляру точки c относительно *евклидова* поляритета на $\mathbb{P}(V)$, задаваемого евклидовой корреляцией $V \xrightarrow{\sim} V^*$. Подпространство L имеет коразмерность 2 в $\mathbb{P}(W)$. Полярная к нему относительно квадрики $Q = \overline{X} \subset \mathbb{P}(W)$ прямая ℓ называется *осью параболоида* X. Кроме бесконечно удалённой точки c, ось пересекает параболоид ещё одной точке $d = \ell \cap X$, которая лежит в аффинной части и называется *вершиной параболоида*. Поместим начало аффинной системы координат в вершину параболоида, направим n-тую координатную ось вдоль оси параболоида[3], а в качестве первых $n-1$ координатных осей выберем нормальные оси ограничения $h = q|_{c^\perp}$ квадратичной формы q, задающей квадрику Q, на евклидово ортогональное дополнение $c^\perp \subset V$ к вектору v

[1]См. n° 12.5.1 на стр. 220.
[2]См. n° 12.5.2 на стр. 221.
[3]Т. е. вдоль вектора $c \in V$.

в пространстве V. В этой прямоугольной системе координат уравнение параболоида X принимает вид

$$a_1^2 x_1^2 + \dots + a_p^2 x_p^2 - b_1^2 x_{p+1}^2 - \dots - b_m^2 x_{p+m}^2 = x_n \,, \tag{12-26}$$

где слева стоит представление (12-24) для ограничения квадратичной формы h на пространство $c^{\perp}$, числа $a_i, b_i > 0$, $p \geqslant m$ и $p + m = n - 1$. Квадрика (12-26) получается растяжением квадрики (12-18) вдоль её нормальных осей с коэффициентами a_i, b_j. Как и в случае гладкой центральной квадрики, эти коэффициенты называются *полуосями* параболоида. Два аффинно конгруэнтных параболоида евклидово конгруэнтнытогда и только тогда, когда у них одинаковые наборы полуосей.

Полуосями конусов и цилиндров называют полуоси гладких квадрик, служащих их основаниями. Они также доставляют полную систему евклидовых инвариантов соответствующих аффинных квадрик.

Упр. 12.1. В двойственных базисах $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ оператор корреляции $\widehat{\beta}$ имеет матрицу $B = (b_{ij}) = \big(\beta(e_i, e_j)\big)$, совпадающую с матрицей Грама базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$. Поэтому (1) (2). Условия (3) и (4) равносильны условию (2) в силу того, что $\dim V = \dim V^*$. Равенства (12-1) означают, что $e_i^\times = \widehat{\beta}^{-1}(e_i^*)$ или, в матричных обозначениях, $(e_1^x, e_2^x, \dots, e_n^x) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot B^{-1}$. Равенства (12-2) суть это переписанное двумя способами равенство $v = \sum e_i^*(v) e_i$.

Упр. 12.2. См. прим. 11.1 на стр. 190.

Упр. 12.3. Так как оператор $\widehat{\beta}$ инъективен, $\dim \widehat{\beta}(U) = \dim U$ для любого подпространства $U \subset V$. Изотропность U означает, что $\widehat{\beta}(U) \subset \operatorname{Ann} U$, откуда $\dim U \leqslant \dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$, ср. с доказательством лем. 11.2 на стр. 207.

Упр. 12.7. Дословно проходят доказательства **??** и теор. 7.1 на стр. 107.

Упр. 12.9. Пусть $p \in Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$. Тогда $T_pQ \cap Q$ это конус с вершиной p над гладкой квадрикой $Q' \subset L$ в дополнительном к точке p внутри T_pQ проективном подпространстве L коразмерности 1 в T_pQ и коразмерности 2 в $\mathbb{P}(V)$. Пусть $L = \mathbb{P}(W)$. Поскольку ограничение формы q на подпространство W невырождено, $V = W \oplus W^\perp$, где $\dim W^\perp = 2$, ограничение формы q на $W^\perp$ тоже невырождено, и обладает ненулевым изотропным вектором $p \in W^\perp$. Поэтому $W^\perp$ это гиперболическая плоскость, а значит оба индекса инерции у ограничения $q|_W$ на единицу меньше, чем у q.

Упр. 12.10. Матрица Грама формы q в базисе $c, e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства $W = \Bbbk \oplus V$, где e_i составляют ортогональный базис формы f_2 в V, имеет блочный вид $\begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1^t & f_2 \end{pmatrix}$, в котором $f_0 \in \Bbbk$, $f_1 \in V^*$, а $f_2 \in S^2V^*$ диагональна. Поскольку $\widehat{q} : c \mapsto \lambda x_0$, где $\lambda \neq 0$, в этой матрице $f_1 = 0$, а $f_0 \neq 0$.

Упр. 12.12. Любая точка из пересечения $\operatorname{Sing} Q \cap H_\infty$ является особой точкой асимптотической квадрики $Q_\infty = Q \cap H_\infty$. Наоборот, если $\operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$ и $\operatorname{Sing} Q_\infty \neq \varnothing$, то при $\operatorname{Sing} Q \subset H_\infty$ пересечение $\operatorname{Sing} Q \cap H_\infty$, разумеется непусто, а при наличии точки $c \in \operatorname{Sing} Q \smallsetminus H_\infty$, пространство $W = \Bbbk \cdot c \oplus V$ и любой вектор $v \in \operatorname{Sing} Q_\infty \subset \mathbb{P}(V)$ ортогонален и подпространству V и вектору c, а значит, лежит в пересечении $\operatorname{Sing} Q \cap H_\infty$, откуда $\operatorname{Sing} Q \cap H_\infty \neq \varnothing$.

Упр. 12.14. Если $Fu = \lambda u$ и $Fw = \mu w$, то из равенства $(Fu, w) = (u, Fw)$ вытекает равенство $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$.