§11. Проективные квадрики

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

11.1. Квадрики и их уравнения. Гиперповерхность второй степени $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, задаваемая в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ ненулевым однородным квадратичным многочленом $q \in S^2V^*$, называется *проективной квадрикой*. Проективизация $\mathbb{P}(S^2V^*)$ пространства однородных многочленов второй степени называется *пространством квадрик* в $\mathbb{P}(V)$. Квадрики на плоскости $\mathbb{P}_2$ называются *кониками*, в пространстве $\mathbb{P}_3$ — *квадратичными поверхностями*.

Упражнение 11.1. Убедитесь, что размерность пространства квадрик в $\mathbb{P}_n$ равна $n(n+3)/2$.

В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ относительно какого-нибудь базиса $e_0, e_1, \dots, e_n$ в пространстве V любой квадратичный многочлен q можно записать в виде

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = x^t A x\,,$$

где x обозначает столбец координат, $x^t = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ это транспонированная к x строка координат, а $A = (a_{ij})$ это *симметричная* матрица, имеющая при $i \neq j$ в качестве $a_{ij} = a_{ji}$ половину[1] коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$. Иначе говоря, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма

$$\widetilde{q} : V \times V \to \Bbbk\,, \quad (u, w) \mapsto \widetilde{q}(u, w)\,,$$

такая что $q(x) = \widetilde{q}(x, x)$. Она называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\widetilde{q}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = x^t A y = \frac{1}{2} \sum_j y_j \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big)\,. \tag{11-1}$$

Матрица A это *матрица Грама* билинейной формы $\widetilde{q}$ в базисе e, т. е. $a_{ij} = \widetilde{q}(e_i, e_j)$.

Упражнение 11.2. Убедитесь, что матрица Грама A' формы q в базисе[2] $e' = eC$ выражается через матрицу Грама A базиса e по формуле $A' = C^t A C$.

11.1.1. Определитель и ранг квадратичной формы. Из упр. 11.2 вытекает, что при линейной замене координат *определитель Грама* $\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)$ умножается на *ненулевой квадрат*. Тем самым, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$, не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Обратите внимание, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ класс $\det q \in \Bbbk/(\Bbbk^*)^2 = \{0, 1\}$ может принимать всего два значения: 0 и 1.

Над произвольным полем $\Bbbk$ квадрики с нулевым определителем Грама называются *вырожденными* или *особыми*, а с ненулевым — *невырожденными* или *гладкими*.

[1] Обратите внимание, что при $\mathrm{char}\Bbbk = 2$ *не все* квадратичные формы так представляются.

[2] Здесь $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e_0', e_1', \dots, e_n')$ представляют собою строки из векторов, а $C = \big(c_{ij}\big)$ это квадратная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$ по столбцам которой стоят координаты векторов из базиса e' в базисе e.

Поскольку для произвольной матрицы A и любой обратимой матрицы C выполняются равенства[1] $\operatorname{rk} CA = \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} AC$, ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* формы q и обозначается $\operatorname{rk} q$.

11.1.2. Проективная конгруэнтность. Две квадрики называются *проективно конгруэнтными*, если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства. Из предыдущего вытекает, что квадрики, имеющие различный ранг $\operatorname{rk} q$ или определитель Грама $\det q \in \Bbbk/(\Bbbk^*)^2$, не могут быть проективно конгруэнтны.

Теорема 11.1 (теорема Лагранжа)
Над произвольным полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ для любой квадратичной формы q существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. При $\dim V \leqslant 1$ или $q = 0$ доказывать нечего. Пусть существует вектор $e \in V$ с $q(e) = \widetilde{q}(e,e) \neq 0$. Обозначим через $e^{\perp} = \{u \in V \mid \widetilde{q}(u,e) = 0\}$ ортогональное дополнение к e относительно билинейной формы $\widetilde{q}$.

Упражнение 11.3. Убедитесь, что $V = (\Bbbk \cdot e) \oplus e^{\perp}$ при $\dim V \geqslant 2$.

По индукции в подпространстве $e^{\perp}$ есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему вектор e, получаем искомый базис во всём пространстве. □

Следствие 11.1
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любая квадрика q задаётся в подходящих однородных координатах уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{r-1}^2 = 0$, где $r = \operatorname{rk} q$. В частности, две квадрики проективно конгруэнтны , если и только если у них одинаковый ранг.

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов e_i на $e_i / \sqrt{q(e_i)}$. □

Пример 11.1 (квадрики на $\mathbb{P}_1$)
Из теор. 11.1 вытекает, что бинарная[2] квадратичная форма над любым полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2 + ax_1^2 = 0$, где $a \neq 0$, либо уравнением $x_0^2 = 0$. В первом случае класс $\det(q)$ по модулю умножения на ненулевые квадраты совпадает с классом коэффициента a, и форма невырождена. Во втором случае $\det(q) = 0$, и форма вырождена.

Особая квадрика $x_0^2 = 0$ называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение — это квадрат линейной формы x_0, задающей точку $(0 : 1)$.

Гладкая квадрика $x_0^2 + ax_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-a$ не является квадратом в $\Bbbk$, и над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это невозможно. Если же $-a = \delta^2$, то $x_0^2 + ax_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ два разных корня $(\pm\delta : 1)$, т. е. гладкая квадрика состоит в этом случае из двух различных точек

Итак, геометрия квадрики $V(q) \subset \mathbb{P}_1$, задаваемой бинарной квадратичной формой

$$q(x) = a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$$

[1] Левое (соотв. правое) умножение матрицы A на любую матрицу задаёт линейное преобразование строк (соотв. столбцов) матрицы A, что не увеличивает её ранг. Тем самым, при умножении на обратимую матрицу ранг вообще не меняется.

[2] Т. е. от двух переменных.

полностью определяется классом её *дискриминанта* $D/4 \overset{\text{def}}{=} -\det(q) = a_1^2 - a_0a_2$ по модулю умножения на ненулевые квадраты: если он нулевой, то квадрика является двойной точкой, если он единичный, то парой различных точек, если он не квадрат (что невозможно над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$), то квадрика пуста.

Следствие 11.2

Квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ может пересекать прямую $\ell \subset \mathbb{P}_n$ ровно одним из следующих четырёх способов: либо $\ell \subset Q$, либо $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, либо $\ell \cap Q$ это две различные точки, либо $\ell \cap Q = \varnothing$, причём последний случай невозможен над алгебраически замкнутым полем. □

11.1.3. Корреляция, ядро и особые точки. С каждой квадратичной формой $q \in S^2V^*$ помимо симметричной билинейной формы $\widetilde{q} : V \times V \to \Bbbk$ связан линейный *оператор корреляции* $\hat{q} : V \to V^*$, переводящий вектор $v \in V$ в ковектор $\hat{q}(v) : V \to \Bbbk$, $w \mapsto \widetilde{q}(w, v)$, действующий на векторы из V скалярным умножением на вектор v посредством билинейной формы $\widetilde{q}$.

Упражнение 11.4. Убедитесь, что матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах e и e^* пространств V и V^*, совпадает с матрицей Грама A базиса e.

В частности, невырожденность квадратичной формы q равносильна тому, что корреляция биективна. Пространство $\ker \hat{q} = \{ v \in V \mid \forall w \in V \ \widetilde{q}(w, v) = 0 \}$ называется *ядром* квадратичной формы q. Его проективизация обозначается $\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$ и называется *пространством особых точек* или *вершинным пространством* квадрики Q. Обратите внимание, что $\operatorname{Sing} Q \subset Q$. Так как $\dim \ker \hat{q} = \dim V - \operatorname{rk} A$, мы ещё раз видим, что ранг матрицы Грама квадратичной формы не зависит от выбора базиса.

Теорема 11.2

Пересечение особой квадрики Q с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собою гладкую квадрику $Q' = L \cap Q$ в подпространстве L, и исходная квадрика Q является *линейным соединением*[1] Q' и $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Пусть $K = \ker \hat{q}$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Тогда $V = U \oplus K$. Если вектор $u \in U$ лежит в ядре ограничения $\hat{q}|_U$, то $q(u, u') = 0$ для всех $u' \in U$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ как $v = u' + u''$ с $u' \in U$ и $u'' \in K$, получаем $\widetilde{q}(u, v) = \widetilde{q}(u, u'') + \widetilde{q}(u, u') = 0$ для всех $v \in V$, откуда $u \in U \cap \ker \hat{q} = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено.

Если прямая ℓ проходит через точку $p \in \operatorname{Sing} Q$ и не лежит на квадрике Q, то ограничение формы q на ℓ является ненулевой особой квадратичной формой, а значит, $Q \cap \ell$ — это двойная точка p. Тем самым, каждая прямая, пересекающая $\operatorname{Sing} Q$, либо целиком лежит на Q, либо больше нигде не пересекает квадрику. □

Пример 11.2 (особые коники)

Пространство Sing особых точек негладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$ это либо точка, либо прямая. Если $\operatorname{Sing} Q$ это одна точка $s \in \mathbb{P}_2$, то по сл. 11.2 пересечение $C \cap \ell$ с любой прямой $\ell \not\ni s$ является гладкой квадрикой в ℓ, т. е. либо пусто, либо является парой различных точек $a, b \in \ell$. В первом случае $C = s$ состоит из единственной точки s и такого не бывает над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Во втором случае $C = (sa) \cup (sb)$ представляет собою пару пересекающихся

[1] Т. е. объединением всех прямых вида (ab) с $a \in Q'$ и $b \in \operatorname{Sing} Q$.

прямых. Такую конику C называют *приводимой* или *распавшейся*. Уравнение распавшейся коники является произведением двух линейных форм, задающих прямые, на которые эта коника распадается.

Упражнение 11.5. Над полем $\mathbb{R}$ напишите уравнение особой коники, состоящей из единственной точки.

Если $\operatorname{Sing} C = \ell$ это прямая, то $\operatorname{rk} C = 1$ и матрица Грама коники C является произведением столбца и строки, пропорциональных друг другу в силу симметричности матрицы Грама. Тем самым, уравнение коники C это квадрат линейной формы, задающей прямую ℓ. Такая коника называется *двойной прямой*.

Упражнение 11.6. Убедитесь, что любая квадратичная форма ранга 1 является квадратом линейной формы.

11.1.4. Касательное пространство к квадрике. Прямая, проходящая через точку p квадрики Q, называется *касательной* к Q в p, если она либо лежит на Q целиком, либо пересекает Q по двойной точке p. Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p, называется *касательным пространством* к квадрике Q в точке $p \in Q$ и обозначается T_pQ.

Лемма 11.1
Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики $Q = V(q)$ в точке $a \in Q$, если и только если $\widetilde{q}(a,b) = 0$.

Доказательство. Пусть $\ell = \mathbb{P}(U)$. Матрица Грама ограничения $q|_U$ в базисе a, b равна

$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(a,b) \\ \widetilde{q}(b,a) & \widetilde{q}(b,b) \end{pmatrix} .$$

Поэтому $\det q|_U = 0$, если и только если $\widetilde{q}(a,b) = \widetilde{q}(b,a) = 0$. □

Следствие 11.3
Видимый из точки $b \notin Q$ контур[1] квадрики Q высекается из Q гиперплоскостью

$$\operatorname{Ann} \hat{q}(b) = \{x \mid \widetilde{q}(b,x) = 0\} .$$

Следствие 11.4
Следующие три условия на точку $p \in Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ эквиваленты друг другу:

1) точка p особа, т. е. $p \in \operatorname{Sing} Q$
2) каждая проходящая через p прямая касается квадрики Q в точке p, т. е. $T_pQ = \mathbb{P}(V)$
3) все частные производные многочлена q зануляются в точке p, т. е. $\forall\, i\ \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0$. □

Следствие 11.5
Касательное пространство $T_pQ = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(p,x) = 0\}$ к квадрике $Q \subset \mathbb{P}(V)$ в гладкой точке $p \in Q$ является гиперплоскостью коразмерности 1 в $\mathbb{P}(V)$. □

Предложение 11.1
Квадрика, имеющая хоть одну гладкую точку, не содержится в гиперплоскости.

[1] Т. е. ГМТ пересечения с квадрикой Q всевозможных касательных, опущенных на неё из точки b.

Доказательство. Пусть $Q \subset \mathbb{P}_n$ и точка $a \in Q$ неособа. Случай $n = 1$ был разобран в прим. 11.1 на стр. 190. Пусть $n \geqslant 2$. Если квадрика Q содержится в гиперплоскости H, то каждая проходящая через точку a и не содержащаяся в H прямая пересекает Q ровно в одной точке a и, стало быть, касается Q в a. Поэтому $\mathbb{P}_n = H \cup T_p Q$ является объединением двух гиперплоскостей, что невозможно. □

Упражнение 11.7. Покажите, что проективное пространство над отличным от $\mathbb{F}_2$ полем не разбивается в объединение двух гиперплоскостей.

11.2. Полярные преобразования. Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение $\langle\, \xi\,,\, v\,\rangle = 0$ на ковектор $\xi \in V^*$ и вектор $v \in V$ задаёт при фиксированном $\xi \in \mathbb{P}_n^\times$ гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в $\mathbb{P}_n^\times$, состоящую из всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$. Биекция $U \leftrightarrows \operatorname{Ann}(U)$ между векторными подпространствами дополнительных размерностей в V и V^*, которую мы обсуждали в n° 4.4.3 на стр. 64, после перехода к проективизациям становится для каждого $m = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ (n-1)$ обращающей включения биекцией между m-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-1-m)$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$, и называется *проективной двойственностью*. Она переводит проективное подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ в проективное подпространство $L^\times = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$, образованное всеми гиперплоскостями, содержащими L, и превращает пересечения подпространств в линейные соединения их образов и наоборот. Это позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения, подчас довольно сильно отличающиеся от исходных. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

11.2.1. Поляритет гладкой квадрики. Поскольку корреляция $\hat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$ невырожденной квадратичной формы q является линейным изоморфизмом, она задаёт биективное проективное преобразование $\overline{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V^*)$, $v \mapsto \mathbb{P}\left(\operatorname{Ann} \widehat{q}(v)\right)$, не меняющееся при умножении квадратичной формы q на ненулевую константу. Оно называется *полярным преобразованием* или просто *поляритетом* относительно гладкой квадрики $Q = V(q)$ и переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\widetilde{q}(p, x) = 0$. Такие точка p и гиперплоскость L называются, соответственно, *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики Q. Геометрически, поляра точки $p \notin Q$ представляет собою гиперплоскость, высекающую видимый из точки p контур квадрики[1] Q, а поляра точки $p \in Q$ это касательная гиперплоскость $T_p Q$. Таким образом, квадрика однозначно восстанавливается по своему полятирету как ГМТ, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие $\widetilde{q}(a, b) = 0$ симметрично по a и b, точка a лежит на поляре точки b , если и только если точка b лежит на поляре точки a. Такие точки a и b называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q, а предыдущее наблюдение известно как *полярная двойственность*.

Упражнение 11.8. Постройте[2] поляру данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно заданной окружности. Особое внимание уделите случаям, когда заданная прямая не пересекает окружности, а заданная точка лежит внутри очерчиваемого этой окружностью круга.

[1] Ср. с сл. 11.3 на стр. 192.

[2] Желающие могут пользоваться линейкой и циркулем, но рис. 11◇12 на стр. 204 показывает, что последний не нужен.

Предложение 11.2
Пусть $a, b \notin Q$ и прямая (ab) пересекает Q в двух различных точках c, d. Точки a, b тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики Q, когда они гармоничны по отношению к точкам c, d.

Доказательство. Обозначим проходящую через точки a, b, c, d прямую через ℓ. Сопряжение относительно квадрики Q задаёт на прямой ℓ инволюцию $\sigma_Q : \ell \to \ell,\ x \mapsto \ell \cap \overline{q}(x)$, которая переводит точку $x \in \ell$ в точку пересечения её поляры с прямой ℓ. Точки c и d неподвижны относительно инволюции σ_Q. Если инволюция σ_Q меняет местами точки a и b, то $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]$, откуда $[a, b, c, d] = -1$. Наоборот, если $[a, b, c, d] = -1$, то отображение $\sigma_{c,d} : \ell \to \ell$, переводящее точку $x \in \ell$ в единственную такую точку $y \in \ell$, что $[x, y, c, d] = -1$, является инволютивной гомографией.

Упражнение 11.9. Убедитесь в этом, и покажите, что для любых двух точек $c, d \in \ell$ существует единственная инволюция $\sigma_{c,d} : \ell \to \ell$, для которой точки c и d являются неподвижными, причём в любой аффинной карте, где $d = \infty$, эта инволюция выглядит как центральная симметрия относительно c.

Так как гомографии $\sigma_{c,d}$ и σ_Q одинаково действуют на 4 точки a, b, c, d, они совпадают, а значит, точки a и b сопряжены относительно Q. □

Упражнение 11.10. Дайте чисто алгебраическое доказательство предл. 11.2.

Предложение 11.3
Для неособой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ и произвольной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ множество гиперплоскостей, полярных относительно квадрики G точкам $p \in Q$, образуют в двойственном проективном пространстве $\mathbb{P}_n^\times$ квадрику в Q^Γ того же ранга, что и квадрика Q. Если Q и G имеют в некоторых однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ матрицы Грама A и Γ соответственно, то квадрика Q^Γ имеет в двойственных однородных координатах на $\mathbb{P}_n^\times$ матрицу $\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$.

Доказательство. Поляритет $\hat{g} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$ гладкой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ переводит точку из $\mathbb{P}_n$ со столбцом координат x в точку двойственного пространства $\mathbb{P}_n^\times$ со строкой координат $\xi = x^t\Gamma$ и является биекцией. Полярные гиперплоскости ξ точек $x \in Q$ задаются в $\mathbb{P}_n^\times$ уравнением, которое получается подстановкой в задающее квадрику Q уравнение $x^tAx = 0$ точек $x = \Gamma^{-1}\xi^t$. Это даёт на ξ уравнение $\xi\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}\xi^t = 0$. □

Следствие 11.6
Касательные пространства гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют в $\mathbb{P}_n^\times$ гладкую квадрику $Q^\times$. Матрицы Грама квадрик Q и $Q^\times$ в двойственных базисах пространств $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$ обратны друг другу.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ и $\Gamma = A$, и заметим, что гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно самой же квадрики Q — это в точности касательные пространства T_pQ. □

11.2.2. Поляритеты над незамкнутыми полями. Над алгебраически незамкнутыми полями имеются квадратичные формы q, задающие *пустые* квадрики Q. Все такие формы автоматически невырождены, и их поляритеты вполне наблюдаемы геометрически, а пустота квадрики означает лишь то, что ни одна точка не лежит на своей поляре.

Упражнение 11.11. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно «мнимой» окружности $x^2 + y^2 = -1$.

Из теор. 10.1 на стр. 181 вытекает, что два поляритета $\overline{q}_1, \overline{q}_2 : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ совпадают тогда и только тогда, когда задающие их квадратичные формы $q_1, q_2 \in S^2(V^*)$ пропорциональны.

Теорема 11.3
Две непустые гладкие квадрики над бесконечным полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ совпадают, если и только если их уравнения пропорциональны.

Доказательство. Если $V(q_1) = V(q_2)$ в $\mathbb{P}(V)$, то поляритеты $\overline{q}_1, \overline{q}_2 : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V^*)$ совпадают во всех точках квадрики $Q = V(q_1) = V(q_2)$.

Упражнение 11.12. Покажите, что в условиях теоремы на любой непустой гладкой квадрике в $\mathbb{P}_n$ найдутся $n+2$ точки, никакие $(n+1)$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

Из упр. 11.12 и теор. 10.1 на стр. 181 вытекает, что корреляции $\hat{q}_1, \hat{q}_2 : V \simeq V^*$ пропорциональны. Тем самым, формы q_1 и q_2 имеют пропорциональные матрицы Грама. □

11.3. Коники. Квадрики на плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ называются *кониками*. Они образуют пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$, называемое *пространством коник*. Над алгебраически замкнутым полем есть ровно три проективно не конгруэнтных коники[1]:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ (ранг 1, все точки особые)
- *распавшаяся коника*[2] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2, одна особая точка)
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

11.3.1. Параметризация гладкой коники. Всякая непустая гладкая коника $C \subset \mathbb{P}_2$ над любым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 0$ допускает квадратичную *рациональную параметризацию* — вложение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2, \quad (t_0, t_1) \mapsto \big(\varphi_0(t_0,t_1) : \varphi_1(t_0,t_1) : \varphi_2(t_0,t_1)\big),$$

которое задаётся тремя взаимно простыми в совокупности однородными многочленами второй степени $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \Bbbk[t_0, t_1]$ и биективно отображает прямую $\mathbb{P}_1$ на конику C. Геометрически такую параметризацию можно получить проектируя конику C из любой точки $p \in C$ на любую не проходящую через p прямую ℓ. Каждая отличная от касательной прямая (px) с $x \in \ell$ пересекает конику C по двум различным точкам, одной из которых является p. Если вторая точка пересечения $p' = p'(x)$ имеет в базисе p, x на прямой (px) однородные координаты $(\lambda_0 : \lambda_1)$, то это отношение является отличным от $p = (1 : 0)$ корнем уравнения

$$(\lambda_0, \lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} q(p,p) & q(p,x) \\ q(x,p) & q(x,x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad 2q(p,x)\cdot\lambda_0\lambda_1 + q(x,x)\cdot\lambda_1^2 = 0$$

и равно $(\lambda_0 : \lambda_1) = \big(q(x,x) : -2q(p,x)\big)$. Отображение

$$\ell \to \mathbb{P}_2, \quad x \mapsto q(x,x)\cdot p - 2q(p,x)\cdot x \in C \tag{11-2}$$

и задаёт искомую квадратичную параметризацию коники C точками $x \in \ell$.

Упражнение 11.13. Убедитесь, что три координаты точки $q(x,x)\cdot p - 2q(p,x)\cdot x$ на $\mathbb{P}_2$ являются однородными квадратичными полиномами от пары внутренних однородных координат

[1] Ср. с прим. 11.1 на стр. 190.
[2] А именно, объединение двух прямых $x_0 = \pm i\, x_1$, пересекающихся в особой точке $(0 : 0 : 1)$.

точки x на прямой ℓ в любом базисе этой прямой, и что формула (11-2) корректно сопоставляет точке $x = T_pC \cap \ell$ точку $p \in C$.

Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ квадратичную параметризацию гладкой коники можно получить преобразовав её уравнение линейной заменой координат к виду Веронезе[1]

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0a_2 - a_1^2 = 0 \tag{11-3}$$

и воспользовавшись рациональной параметризацией коники Веронезе по формуле[2]

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : a_2) = (\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2). \tag{11-4}$$

Упражнение 11.14. Убедитесь, что проекция коники $a_0a_2 - a_1^2 = 0$ из точки $(1 : 1 : 1)$ на прямую $a_1 = 0$, переводит точку $(\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2)$ в точку $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$.

Предложение 11.4
Гладкая коника и заданная однородным уравнением степени d кривая на $\mathbb{P}_2$ либо пересекаются не более, чем по $2d$ точкам, либо коника целиком содержится в кривой в качестве компоненты.

Доказательство. Запараметризуем конику однородными квадратичными полиномами от $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$. Значения t, при которых коника пересекает кривую с уравнением $f(x) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f\big(q(t)\big) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень $2d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2d$ различных корней. □

Предложение 11.5
Каждые пять точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие четыре из точек не коллинеарны, такая коника единственна, а если никакие три не коллинеарны, то она ещё и гладкая.

Доказательство. При фиксированном $p \in V$ уравнение $q(p) = 0$ линейно по $q \in S^2V^*$. Поэтому коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по предл. 11.4. □

Следствие 11.7
Каждые пять прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, касаются единственной гладкой коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: пять точек на $\mathbb{P}_2^\times$, двойственные пяти заданным прямым на $\mathbb{P}_2$, лежат на единственной гладкой конике $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$. Двойственная ей коника $C \subset \mathbb{P}_2$ и является искомой. □

[1]См. прим. 10.6 на стр. 178.
[2]См. формулу (10-6) на стр. 179.

Пример 11.3 (геометрическая классификация гомографий между прямыми)
Пусть гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между двумя несовпадающими прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ переводит три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$, отличные от точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$, соответственно, в точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Возникают две возможности, представленные на рис. 11◇1 и рис. 11◇2: либо соединяющие соответственные точки три прямые (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) пересекаются в одной точке p, либо нет. Как мы видели в прим. 10.10, первое означает, что φ является перспективой с центром в p, и это равносильно равенству $\varphi(q) = q$. Во втором случае пять прямых ℓ_1, ℓ_2, (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) удовлетворяют сл. 11.7, т. е. существует единственная гладкая коника C, касающаяся всех этих пяти прямых. Преобразование $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, переводящее точку $x \in \ell_1$ в точку пересечения прямой ℓ_2 с отличной от ℓ_1 касательной, опущенной из x на C, является гомографией ℓ_1 на ℓ_2, ибо оно биективно и рационально. В самом деле, коэффициенты уравнений касательных, опущенных из x на C, суть точки пересечения двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ с прямой $x^\times = \operatorname{Ann}(x)$. Одна из них, задающая прямую ℓ_1, известна. Поэтому вторая, т. е. набор коэффициентов уравнения прямой (x, y), рационально через неё выражается. Поскольку C и φ одинаково действуют на a_1, b_1, c_1, гомография $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ совпадает φ. Обратите внимание, что образом и прообразом точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$ в этом случае являются точки пересечения $\ell_2 \cap C$ и $\ell_1 \cap C$ соответственно.

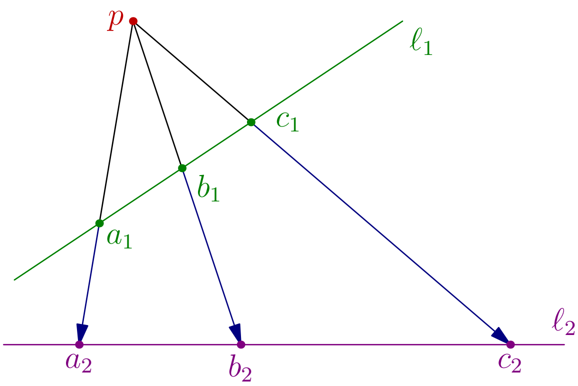

Рис. 11◇1. Перспектива $p : \ell_1 \to \ell_2$.

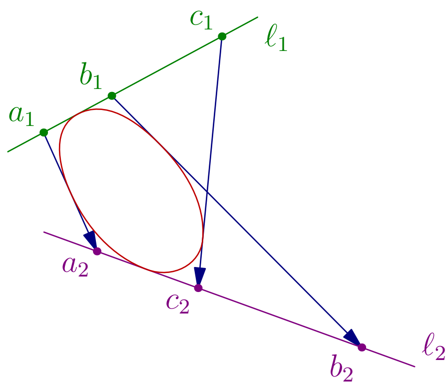

Рис. 11◇2. Гомография $C : \ell_1 \to \ell_2$.

Итак, каждая гомография $\ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ либо является перспективой, либо высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике. В обоих случаях центр p и коника C определяются по гомографии *однозначно*. Перспектива может рассматриваться как вырожденный случай гомографии $C : \ell_1 \to \ell_2$, отвечающий особой конике C, распавшейся в объединение двух прямых, пересекающихся в центре перспективы. Однако такие прямые можно выбирать многими способами: годится любая пара прямых, соединяющих соответственные точки гомографии.

Пример 11.4 (геометрическая классификация гомографий между пучками прямых)
Этот пример двойствен предыдущему. Пусть гомография $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^2$ пучка прямых с центром в точке p_1 в пучок прямых с центром в точке $p_2 \neq p_1$ переводит три различные прямые $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$, отличные от прямой $(p_1 p_2)$, в прямые $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_1$. Обозначим три точки пересечения соответственных прямых через $q_i = \ell'_i \cap \ell''_i$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку никакие четыре из точек p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 не коллинеарны, через них проходит единственная коника C_φ. Она представляет собою ГМТ точек пересечений соответственных прямых $\ell \cap \varphi(\ell)$ гомографии φ, поскольку отображение, переводящее прямую $(p_1 p)$ в прямую $(p_2 p)$ для всех $p \in C_\varphi$, тоже задаёт гомографию $p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^2$, действующую на три прямые ℓ'_i точно также, как φ, см. рис. 11◇4.

Если коника C_φ гладкая, то она переводит касательную прямую $T_{p_1}C_\varphi$ в прямую (p_1p_2), а прямую (p_1p_2) — в касательную $T_{p_2}C_\varphi$. Если коника C_φ не гладкая, то $C_\varphi = (p_1p_2) \cup (q_iq_j)$, точки q_1, q_2, q_3 коллинеарны, и гомография φ переводит прямую (p_1p_2) в себя, т. е. является перспективой, см. рис. 11◇3. В отличие от предыдущего прим. 11.3 задающая перспективу вырожденная коника здесь определяется этой перспективой однозначно.

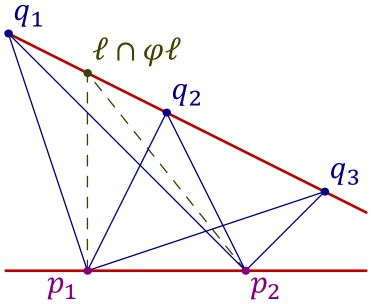

Рис. 11◇3. Перспектива $\varphi : p_1^\times \to p_2^\times$.

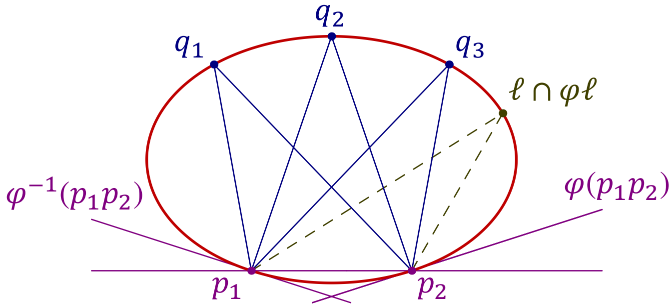

Рис. 11◇4. Гомография $\varphi : p_1^\times \to p_2^\times$.

Предложение 11.6 (теорема о вписанно-описанных треугольниках)
Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вписаны в одну и ту же гладкую конику Q', если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники Q''.

Доказательство. Пусть точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на конике Q', как на рис. 11◇5. Рассмотрим прямые $\ell_1 = (A_1B_1)$, $\ell_2 = (A_2B_2)$ и обозначим через $C_2 : \ell_1 \simeq Q'$ и $C_1 : Q' \simeq \ell_2$ проекцию прямой ℓ_1 из точки C_2 на конику Q' и проекцию коники Q' на прямую ℓ_2 из точки C_1. Композиция этих двух проекций $[C_1 : Q' \simeq \ell_2] \circ [C_2 : \ell_1 \simeq Q'] : \ell_1 \simeq \ell_2$ переводит $A_1 \mapsto M$, $K \mapsto B_2$, $L \mapsto A_2$, $B_1 \mapsto N$ и является неперспективой гомографией. Значит, она задаётся семейством касательных к некоторой гладкой конике Q'', вписанной в оба треугольника. Обратная импликация проективно двойственна только что доказанной. □

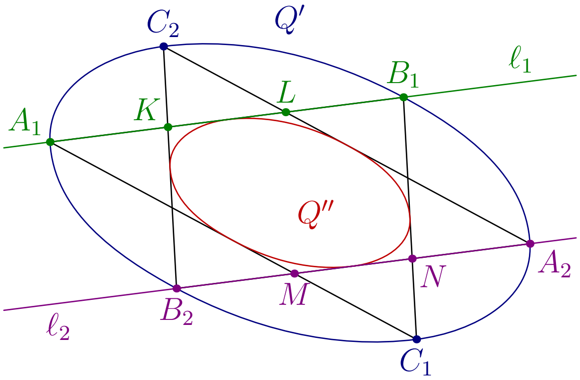

Рис. 11◇5. Вписанно-описанные треугольники.

Следствие 11.8 (поризм Понселе для треугольников)
Если пара коник Q' и Q'' такова, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, одновременно вписанный в Q' и описанный около Q'', то такой же треугольник $A_2B_2C_2$ (одновременно вписанный в Q и описанный около Q') можно нарисовать стартовав *с любой* точки $A_2 \in Q' \smallsetminus Q''$.

Доказательство. В самом деле, проведём из A_2 две касательных (A_2B_2) и (A_2C_2) к конике Q'' до их пересечения с Q' в точках $B_2, C_2 \in Q'$, как на рис. 11◇5. По предл. 11.6, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых (AB), (BC), (CA), (A_2B_2), (A_2C_2), эта коника и есть Q''. □

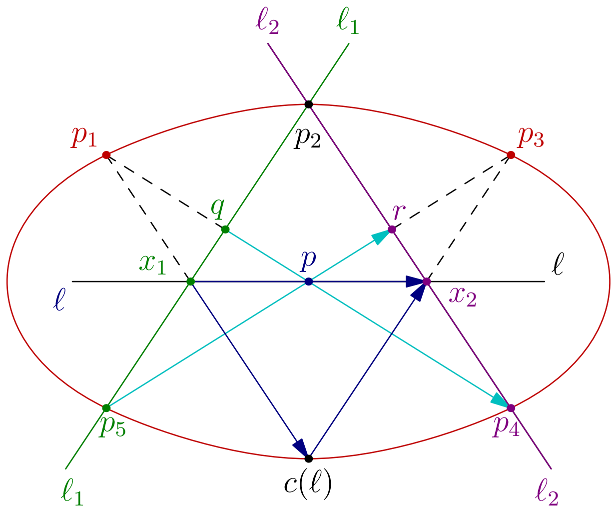

Рис. 11◇6. Трассировка коники линейкой.

Пример 11.5 (трассировка коники линейкой)

Точки гладкой коники C, проходящей через пять данных точек $p_1, p_2, \dots, p_5$, никакие 3 из которых не коллинеарны, можно эффективно строить одной линейкой следующим образом. Рассмотрим прямые $\ell_1 = (p_2p_5)$, $\ell_2 = (p_2p_4)$ и точку $p = (p_1p_4) \cap (p_3p_5)$, как на рис. 11◇6. Перспектива $p : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ действует на лежащие на прямой ℓ_1 три точки p_2, p_5 и $q = \ell_1 \cap (p_2p_4)$ так же, как композиция проекции $p_1 : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C$ прямой ℓ_1 на конику C из точки $p_1 \in C$ и проекции $p_3 : C \xrightarrow{\sim} \ell_2$ коники C на прямую ℓ_2 из точки $p_3 \in C$. Стало быть, они совпадают. Поэтому для любой прямой ℓ, проходящей через p и пересекающейся с прямыми ℓ_1 и ℓ_2 в точках x_1 и x_2 соответственно, точка $c(\ell) = (p_1x_1) \cap (p_2x_2)$ лежит на конике C, см. рис. 11◇6. Если ℓ пробежит пучок прямых с центром в p, точка $c(\ell)$ нарисует конику C.

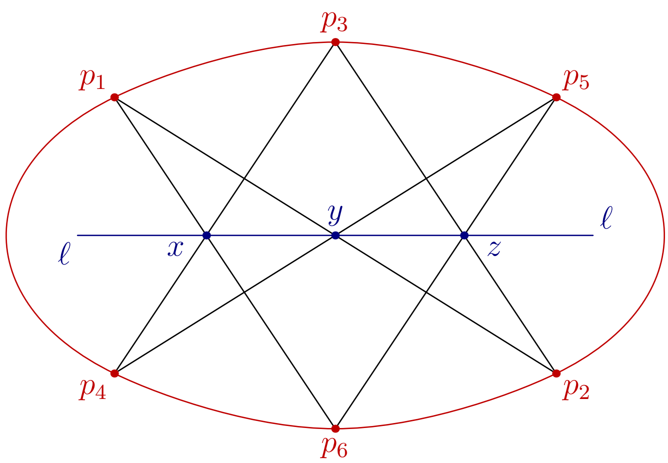

Рис. 11◇7. Гексограмма Паскаля.

Теорема 11.4 (теорема Паскаля)
Шесть точек $p_1, p_2, \dots, p_6$, никакие 3 из которых не коллинеарны, тогда и только тогда лежат на одной гладкой конике, когда коллинеарны три точки пересечений

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1), \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5), \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

пар «противоположных сторон» шестиугольника $p_1, p_2, \dots, p_6$, см. рис. 11◇7 и рис. 11◇8.

Доказательство. Полагая $\ell_1 = (p_3p_4)$ и $\ell_2 = (p_3p_2)$, как на рис. 11◇6 на стр. 199, мы видим, что условие $z \in (xy)$ означает, что x переходит в z при перспективе

$$y : \ell_1 \to \ell_2, \tag{11-5}$$

которая, согласно прим. 11.5, раскладывается в композицию проекций

$$\big(p_5 : C \xrightarrow{\sim} \ell_2\big) \circ (p_1 : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C) \tag{11-6}$$

где C — гладкая коника, проходящая через $p_1, p_2, \dots, p_5$. Но тогда $p_6 = (p_5z) \cap (p_3x) \in C$. Наоборот, если $(p_5z) \cap (p_3x) \in C$, то точка $z \in \ell_2$ является образом точки $x \in \ell_1$ при композиции проекций (11-6), а значит, и при перспективе (11-5), откуда $z \in (xy)$. □

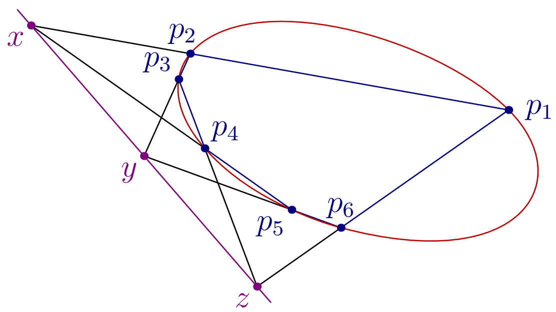

Рис. 11◇8. Вписанный шестиугольник.

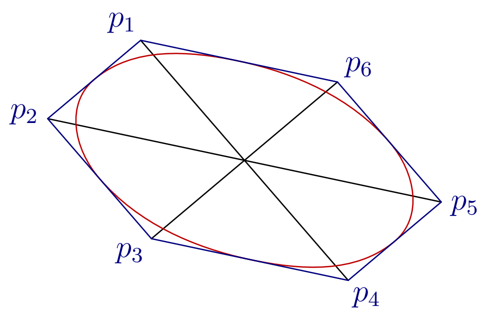

Рис. 11◇9. Описанный шестиугольник.

Следствие 11.9 (теорема Брианшона)
Шестиугольник $p_1, p_2, \dots, p_6$ тогда и только тогда описан вокруг некоторой гладкой коники, когда его главные диагонали (p_1p_4), (p_2p_5), (p_3p_6) пересекаются в одной точке (см. рис. 11◇9).

Доказательство. Эта теорема проективно двойственна к теореме Паскаля. □

11.4. Внутренняя геометрия гладкой коники. Двойственные прямые $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ канонически изоморфны друг другу посредством биекции $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1^\times$, $v \mapsto \operatorname{Ann} v$, которая на языке координат сопоставляет точке $(p_0 : p_1) \in \mathbb{P}_1$ точку $p_1x_0 - p_0x_1 \in \mathbb{P}_1^\times$, координаты которой в двойственном базисе на $\mathbb{P}_1^\times$ суть $(p_1 : -p_0)$.

В прим. 10.6 на стр. 178 мы видели, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$, плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ параметризует неупорядоченные пары точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Точкам $p = (p_0 : p_1)$, $q = (q_0 : q_1)$ отвечает одномерное пространство в S^2U^*, порождённое квадратичной формой $f_{p,q}(x) \overset{\text{def}}{=} \det(x,p) \cdot \det(x,q) = a_0(p,q) \cdot x_0^2 + 2\,a_1(p,q) \cdot x_0x_1 + a_2(p,q) \cdot x_1^2$ с коэффициентами $a_0(p,q) = p_1q_1$, $a_1(p,q) = -\big(p_1q_0 + p_0q_1\big)/2$, $a_2(p,q) = p_0q_0$. Допуская известную вольность, мы будем обозначать эту точку на $\mathbb{P}_2$ как $\{p,q\}$. Пары совпадающих точек $\{p,p\} \in \mathbb{P}_2$ изображаются гладкой коникой Веронезе C_{ver}, состоящей из всех ненулевых квадратичных форм от (x_0, x_1) с нулевым определителем или, что то же самое, из квадратичных форм вида $f_p(x) \overset{\text{def}}{=} \det^2(x, p)$, где $p \in \mathbb{P}_1$. В развёрнутом виде[1]

$$\begin{gathered} f_p(x) = a_0(p) \cdot x_0^2 + 2\,a_1(p) \cdot x_0 x_1 + a_2(p) \cdot x_1^2\,, \quad \text{где} \\ a_0(p) = p_1^2\,, \quad a_1(p) = -p_0 p_1\,, \quad a_2(p) = p_0^2\,. \end{gathered} \tag{11-7}$$

Пары $\{p, t\} \in \mathbb{P}_2$, в которых точка $p \in \mathbb{P}_1$ фиксирована, а точка t пробегает прямую $\mathbb{P}_1$, изображаются на плоскости $\mathbb{P}(S^2 U^*)$ в виде *прямой*, которая состоит из всех зануляющихся в точке p квадратичных форм f на $\mathbb{P}_1$ и задаётся линейным по f уравнением $f(p) = 0$. Так, касательные к конике Веронезе C_{ver}, восстановленные в точках $\{p, p\}$ и $\{q, q\}$, суть прямые, состоящие из точек вида $\{p, t\}$ и $\{q, s\}$ соответственно. Они пересекаются в точке $\{p, q\}$.

Упражнение 11.15. Покажите, что прямая на $\mathbb{P}_2$ тогда и только тогда имеет вид $\{p, t\}$, где p фиксирована, а t пробегает $\mathbb{P}_1$, когда она касается коники Веронезе, и опишите, из каких точек $\{x, y\} \in \mathbb{P}_2$ состоит прямая, соединяющая две различные точки $\{a, b\}, \{c, d\} \in \mathbb{P}_2$, в терминах двойных отношений между точками a, b, c, d, x, y.

Над алгебраически замкнутым полем все гладкие коники проективно конгруэнтны друг другу, и произвольную гладкую конику C на $\mathbb{P}_2$ можно записать в подходящих однородных координатах $(a_0 : a_1 : a_2)$ уравнением $a_1^2 = a_0 a_2$, после чего воспринимать её как конику Веронезе, а объемлющую плоскость — как множество неупорядоченных пар точек на проективной прямой. Иначе говоря, над алгебраически замкнутым полем характеристики $\neq 2$ проективная плоскость с заданной на ней гладкой коникой может быть отождествлена с множеством неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1$ так, что коника будет изображать пары совпадающих точек.

11.4.1. Двойное отношение и внутренние координаты на конике. Назовём *двойным отношением* четырёх точек p_1, p_2, p_3, p_4 на гладкой конике C двойное отношение проекций этих точек на произвольную прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$ из любой пятой точки $p_5 \in C$, отличной от всех четырёх и не лежащей на ℓ, или, что то же самое, двойное отношение четырёх прямых $(p_5 p_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, в пучке прямых с центром в p_5.

Упражнение 11.16. Убедитесь, что это двойное отношение не зависит ни от выбора прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$, ни от выбора точки $p_5 \in C$, и что любая биекция между кониками $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}_2$, индуцированная линейным проективным преобразованием $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ объемлющей плоскости, сохраняет двойное отношение точек на этих кониках.

На конике Веронезе $C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U^*)$ введённое только что двойное отношение любых четырёх точек $\{p_i, p_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, совпадает с двойным отношением четырёх точек p_i на прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, поскольку композиция отображения Веронезе $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} C_{\text{ver}}$, $p \mapsto \{p, p\}$, и проекции коники C_{ver} из любой её точки на любую не проходящую через эту точку прямую является рациональной биекцией между двумя проективными прямыми, а стало быть[2], линейна и сохраняет двойные отношения.

Упражнение 11.17. Убедитесь, что эта композиция и в самом деле рациональна.

Таким образом, любая гладкая коника C может быть с сохранением двойного отношения отождествлена с проективной прямой, и по предл. 10.2 на стр. 186 любые два таких отождествления

[1]Обратите внимание что написанная в формуле (11-7) параметризация коники Веронезе отличается от той, что была в форм. (11-4) на стр. 196: параметризация (11-7) является композицией квадратичного вложения Веронезе $\mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2 U^*)$, $\psi(x) \mapsto \psi^2(x)$, из формулы (11-4) и предыдущего изоморфизма двойственных прямых $\mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(U^*)$, $(p_0 : p_1) \mapsto (p_1 : -p_0)$.

[2]См. теор. 10.2 на стр. 183.

отличаются на гомографию этой прямой. В частности, на гладкой конике имеются внутренние однородные координаты, которые переносятся с $\mathbb{P}_1$ при помощи произвольной сохраняющей двойные отношения биекции $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} C$, и любые две таких координатных системы получаются друг из друга линейным проективным преобразованием.

Предложение 11.7

Гладкая коника C, проходящая через пять точек $p_1, p_2, \dots, p_5$, никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою ГМТ p, таких что в пучке прямых с центром в p двойное отношение четырёх прямых (p, p_i), $1 \leqslant i \leqslant 4$, равно двойному отношению четырёх прямых (p_5, p_i), $1 \leqslant i \leqslant 4$, в пучке прямых с центром в точке p_5.

Доказательство. Из упр. 11.16 вытекает, что все точки $p \in C$ обладают этим свойством. Для любой другой точки p, обладающей этим свойством, обозначим через Q конику, проходящую через точки p, p_1, p_2, p_3 и p_5. Отображение $\gamma_Q : p^\times \to p_5^\times$ из пучка прямых с центром в точке p в пучок прямых с центром в p_5, переводящее прямую (pq) в прямую (p_5q) для всех $q \in Q$, биективно и рационально, а значит является гомографией. Гомография γ_Q переводит три прямые (pp_i), $1 \leqslant i \leqslant 3$, в три прямые (p_5p_i), $1 \leqslant i \leqslant 3$. Поскольку $[(p, p_1), (p, p_2), (p, p_3), (p, p_4)] = [(p_5, p_1), (p_5, p_2), (p_5, p_3), (p_5, p_4)]$, прямая (pp_4) переходит в прямую (p_5p_4), откуда $p_4 \in Q$. Но единственная коника, проходящая через пять точек $p_1, p_2, \dots, p_5$, это коника C. Поэтому $Q = C$ и $p \in C$. □

Упражнение 11.18. Пусть никакие три из пяти различных точек $p, q, a, b, c \in \mathbb{P}_2$ не коллинеарны. Обозначим через $\gamma : p^\times \to q^\times$ единственную гомографию пучка прямых с центром в p в пучок прямых с центром в q, переводящую прямые (pa), (pb), (pc) в прямые (qa), (qb), (qc) соответственно. Опишите ГМТ пересечения $\ell \cap \gamma(\ell)$ по всем $\ell \in p^\times$.

11.4.2. Гомографии на гладкой конике. Биективное преобразование $\varphi : C \xrightarrow{\sim} C$ гладкой коники C называется *гомографией*, если оно сохраняет двойные отношения. Это равносильно тому, что во внутренних однородных координатах на C преобразование φ линейно, а также тому, что при какой-либо (а следовательно, и при любой) сохраняющей двойное отношение биекции $\psi : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ преобразование $\psi\varphi\psi^{-1} : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ является гомографией на $\mathbb{P}_1$. По теор. 10.2 любое биективное (всюду или за исключением конечного множества точек) отображение $\varphi : C \to C$, которое во внутренних однородных координатах на конике задаётся рациональной формулой вида $\varphi(\alpha_0 : \alpha_1) = \big(f(\alpha_0/\alpha_1) : g(\alpha_0/\alpha_1)\big)$, где $f, g \in \Bbbk[t]$, является гомографией. Для любых двух упорядоченных троек различных точек на гладкой конике C существует единственная гомография $C \xrightarrow{\sim} C$, переводящая первую тройку точек во вторую с сохранением порядка.

Предложение 11.8

Каждая гомография $\gamma : C \xrightarrow{\sim} C$ гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$ однозначно продолжается до линейного проективного автоморфизма $\widetilde{\gamma} : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, ограничение которого на C совпадает с γ, и наоборот, любой линейный проективный автоморфизм $\widetilde{\gamma} : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, переводящий конику C в себя, задаёт на ней гомографию.

Доказательство. Выберем на конике C пять точек $p_1, p_2, \dots, p_5$, и пусть $\gamma(p_i) = q_i$. Существует единственный линейный проективный автоморфизм $\widetilde{\gamma} : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, такой что $\widetilde{\gamma}(p_i) = q_i$ при $1 \leqslant i \leqslant 4$. Поскольку он сохраняет двойные отношения в пучках прямых, двойное отношение четырёх прямых (q_5, q_i), $1 \leqslant i \leqslant 4$, в пучке $q_5^\times$ равно двойному отношению четырёх прямых

(p_5, p_i), $1 \leqslant i \leqslant 4$, в пучке $p_5^{\times}$. Последнее двойное отношение равно двойному отношению четырёх прямых (p_5, q_i), $1 \leqslant i \leqslant 4$, из того же пучка, т. к. отображение $\gamma : C \simeq C$, $p_i \mapsto q_i$, является гомографией и сохраняет определённое в начале n° 11.4.1 двойное отношение точек на конике. Таким образом, для любых пяти точек $p_1, p_2, \dots, p_5 \in C$ двойные отношения прямых проходящих через точки p_1, p_2, p_3, p_4 в пучках прямых с центрами в точках p_5 и $\widetilde{\gamma}(p_5)$ равны другу. По предл. 11.7 $\widetilde{\gamma}(p_5) \in C$, что доказывает первое утверждение предложения. Второе утверждение вытекает из упр. 11.16. □

Пример 11.6 (инволюции)
Гомография $\sigma : C \to C$ называется *инволюцией*, если она обратна самой себе, т. е. $\sigma^2 = \mathrm{Id}_C$. Тождественная инволюция $\sigma = \mathrm{Id}_C$ называется *тривиальной*. Пусть точки a_1, a_2, b_1, b_2 на конике C различны и инволюция $\sigma : C \to C$ переставляет одноимённые точки $a_1 \leftrightarrow a_2$ и $b_1 \leftrightarrow b_2$ как на рис. 11⋄10. Обозначим точку пересечения прямых (a_1a_2) и (b_1b_2) через s. Пучок прямых с центром в s задаёт биективное преобразование $\sigma_s : C \simeq C$, переставляющее точки пересечения коники C с каждой проходящей через s прямой.

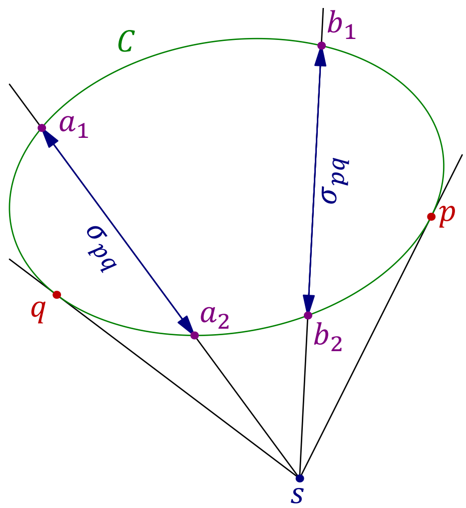

Рис. 11⋄10. Инволюция на конике.

Упражнение 11.19. Убедитесь, что это преобразование рационально.

Следовательно, σ_s является гомографией, а значит, совпадает с инволюцией σ, поскольку действует на четыре точки a_1, a_2, b_1, b_2 также, как и σ. В частности, неподвижными точками инволюции σ являются две точки, образующие видимый из точки s контур коники C.

Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ каждая нетривиальная инволюция на проективной прямой или на гладкой конике имеет ровно две различных неподвижных точки, и для любой пары различных точек существует единственная инволюция оставляющая каждую из точек на месте. Геометрически, инволюция $\sigma_{pq} : \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$ с неподвижными точками $p, q \in \mathbb{P}_1$ переставляет друг с другом такие точки a, b, что точки $\{a, a\}$ и $\{b, b\}$ коники Веронезе $C_{\mathrm{ver}} \subset \mathbb{P}_2$ лежат на одной прямой с точкой $\{p, q\} \in \mathbb{P}_2$.

Упражнение 11.20. Убедитесь, что $\sigma_{pq}(a) = b$ для точек $a, b \notin \{p, q\}$, если и только если $[p, q, a, b] = -1$, и напишите явную формулу для координат неподвижных точек p, q инволюции σ_{pq}, если известны координаты точек a, b, $\sigma_{pq}(a)$, $\sigma_{pq}(b)$ и все эти точки различны.

Пример 11.7 (перекрёстная ось гомографии на конике)
Гомография $\varphi : C \to C$, переводящая три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in C$ в точки $a_2, b_2, c_2 \in C$ является композицией проекций $b_2 : C \to \ell$ и $b_1 : \ell \to C$, где прямая ℓ соединяет точки пересечения $(a_1b_2) \cap (b_1a_2)$ и $(c_1b_2) \cap (b_1c_2)$ пар перекрёстных прямых на рис. 11⋄11. Поскольку неподвижные точки гомографии φ суть точки пересечения $\ell \cap C$, прямая ℓ не зависит от выбора точек $a_1, b_1, c_1 \in C$, а φ имеет либо ровно две неподвижные точки, либо ровно одну, и последнее означает, что прямая ℓ касается коники C в этой неподвижной точке. Таким образом, прямая ℓ представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегают конику C. Отсюда получается ещё одно доказательство теоремы

Паскаля: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в C шестиугольника $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$, будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, которая переводит точки a_1, b_1, c_1 в точки a_2, b_2, c_2, лежат на перекрёстной оси ℓ этой гомографии.

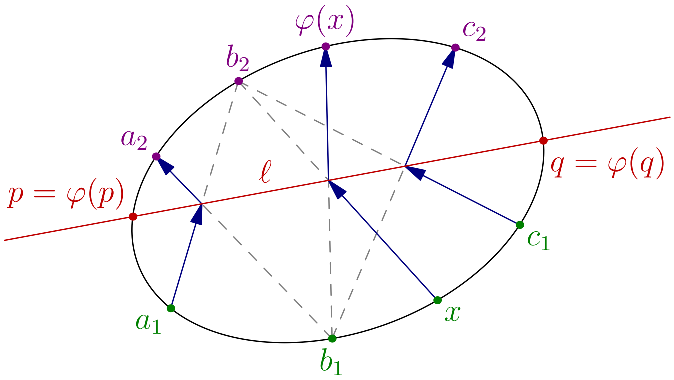

Рис. 11⋄11. Перекрёстная ось гомографии на конике.

Перекрёстная ось гомографии $\varphi : C \to C$ легко строится одной линейкой, если известно действие φ на какие-нибудь три точки. Это позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(z)$ любой точки $z \in C$, а также указать неподвижные точки гомографии φ. В частности, две касательные к гладкой конике $C \subset \mathbb{P}_2$, опущенные из заданной точки $s \in \mathbb{P}_2$, тоже можно построить одной линейкой, найдя неподвижные точки инволюции $\sigma_s : C \to C$, задаваемой пучком прямых с центром в s, см. рис. 11⋄12. Более простое построение можно извлечь из упр. 11.21.

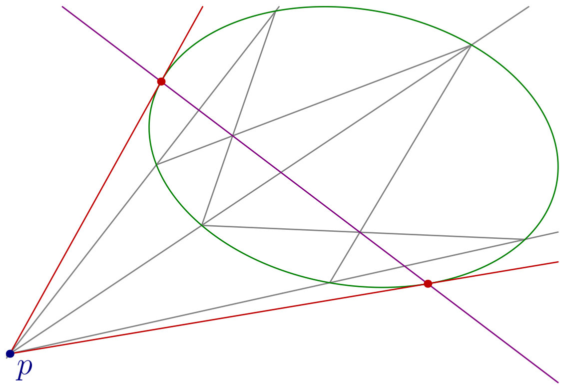

Рис. 11⋄12. Построение касательных.

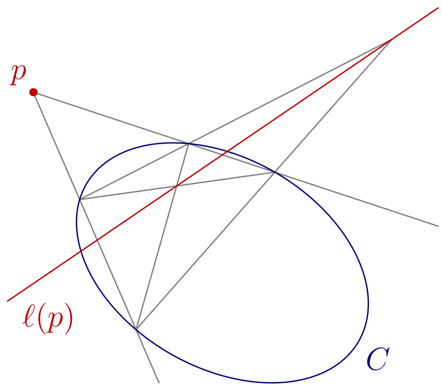

Рис. 11⋄13. Построение поляры.

Упражнение 11.21 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 11⋄13 построение[1] одной линейкой поляры $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C.

Пример 11.8 (пары коммутирующих инволюций)
Две сопряжённые относительно гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$ точки $a, b \in \mathbb{P}_2 \setminus C$ задают на конике C коммутирующие друг с другом инволюции $\sigma_a, \sigma_b : C \xrightarrow{\sim} C$, см. рис. 11⋄14. В самом деле,

[1] Принадлежащее Якобу Штейнеру (1796 – 1863), см. *Я. Штейнер*. «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга», Харьковская математическая библиотека, Харьков, 1910 (или любое другое издание).

запараметризуем пучок прямых с центром в b точками полярной к b прямой ℓ_b и рассмотрим на нём инволюцию $\alpha : \ell_b \xrightarrow{\sim} \ell_b$ с неподвижными точками a и p, отвечающими прямой (ba) и полярной к точке a прямой ℓ_a, как на рис. 11⋄14. Точки $c, d \in \ell_q$ находятся в инволюции α, если и только если они гармоничны точкам a, p. Пусть прямая (bc) пересекает конику C в точке c'. Тогда на прямой (ac') точки a и $p' = (ac') \cap \ell_p$ гармоничны точкам c и $d' = (ac) \cap (bd)$, поскольку четвёрка точек a, p', c', d' является образом четвёрки точек a, p, c, d при перспективе $\gamma_b : \ell_b \xrightarrow{\sim} (ac')$. С другой стороны, по предл. 11.2 на стр. 194 сопряжённые друг другу относительно коники C точки a и p' прямой (ac') гармоничны точкам пересечения этой прямой с коникой C. Поэтому отличная от c' точка пересечения прямой (ac') с коникой C совпадает с d'. Таким образом, любые две пары находящихся в инволюции σ_a точек коники C одновременно являются и двумя парами точек, находящихся в инволюции σ_b, см. рис. 11⋄14.

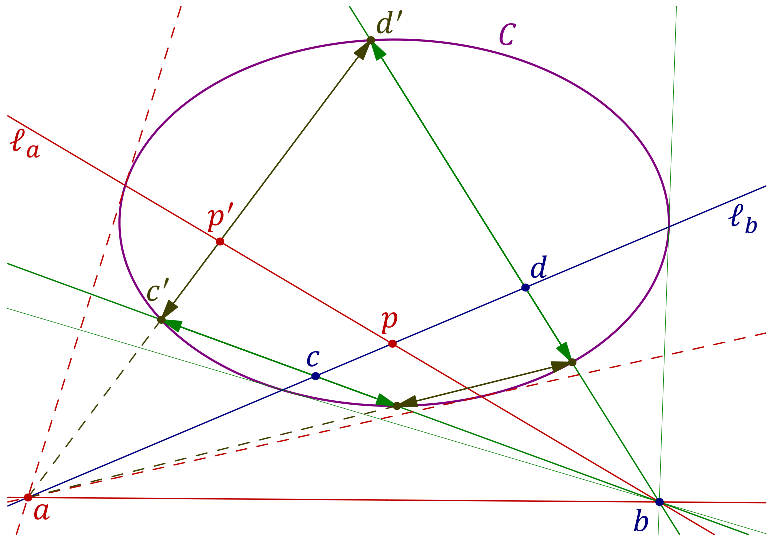

Рис. 11⋄14. Инволюции с центрами в сопряжённых точках перестановочны.

Упражнение 11.22. Убедитесь, что и наоборот, центры $p, q \in \mathbb{P}_2$ любых двух перестановочных друг с другом инволюций $\sigma_p, \sigma_q : C \xrightarrow{\sim} C$ гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$ сопряжены друг другу относительно C.

11.5. Квадратичные поверхности. Квадрики в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, где $\dim V = 4$, образуют проективное пространство $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поэтому любые 9 точек в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на квадрике, проходящей через три тройки различных точек, выбранных каждая на своей прямой. Над алгебраически замкнутым полем есть ровно четыре проективно не конгруэнтных друг другу квадрики:

- *двойная плоскость* $x_0^2 = 0$ (ранг 1)
- *распавшаяся квадрика*[1] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2)
- *простой конус*[2] $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (ранг 3)

[1]Или объединение двух плоскостей $x_0 = \pm i x_1$, т. е. линейное соединение особой прямой (e_2, e_3) и пары точек $(1 : \pm i : 0 : 0)$, образующих гладкую квадрику на дополнительной прямой (e_0, e_1), ср. с теор. 11.2 на стр. 191.

[2]Или линейное соединение одной особой точки с гладкой коникой в дополнительной плоскости.

- *гладкая квадрика* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (ранг 4).

Упражнение 11.23. Покажите, что особая квадрика в $\mathbb{P}_3$ над произвольным полем $\Bbbk$ не может содержать трёх попарно не пересекающихся прямых и выведите отсюда, что любые три такие прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на гладкой квадрике.

11.5.1. Квадрика Сегре. Удобной геометрической моделью гладкой квадрики в $\mathbb{P}_3$ является *квадрика Сегре* в проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk)\right)$, состоящая из ненулевых матриц A ранга 1 и задаваемая квадратным уравнением $\det(A) = 0$. Она называется *квадрикой Сегре* и обозначается

$$Q_S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \tag{11-8}$$

С каждым ненулевым линейным оператором $F : U \to U$ ранга 1 связаны единственный с точностью до пропорциональности вектор $v \in U$, порождающий одномерный образ оператора F, и однозначно определяемый оператором F и вектором v ковектор $\xi \in U^*$, такой что $F(u) = \xi(u) \cdot v$ для всех $u \in U$. Ядро оператора F совпадает с ядром функционала $\xi : U \to \Bbbk$, и при умножении вектора v на λ, функционал ξ умножается на λ^{-1}. В этой ситуации мы пишем, что $F = v \otimes \xi$, и говорим, что оператор F является *тензорным произведением* вектора v и ковектора ξ. Любые вектор $v \in U$ и ковектор $\xi \in U^*$ задают линейный оператор ранга 1 на U

$$v \otimes \xi : U \to U, \quad u \mapsto v \cdot \xi(u). \tag{11-9}$$

В ситуации, когда $U = \Bbbk^2$, а v и ξ имеют в стандартных двойственных базисах пространств $\Bbbk^2$ и $\Bbbk^{2^*}$ координаты $v = (x_0 : x_1)$ и $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, матрица оператора $v \otimes \xi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \tag{11-10}$$

Сопоставляя паре точек $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U^*) \times \mathbb{P}(U)$ одномерное подпространство в $\mathrm{End}(U)$, натянутое на оператор (11-9) с матрицей (11-10), мы получаем *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\Big(\mathrm{End}\,(U)\Big),$$

которое биективно отображает $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_S \subset \mathbb{P}_3$ и переводит два семейства «координатных прямых» на $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ в два семейства прямых на Q_S, поскольку для каждого $\xi \in \mathbb{P}_1^\times$ прямая $\xi \times \mathbb{P}_1$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а для каждого $v \in \mathbb{P}_1$ прямая $\mathbb{P}_1^\times \times v$ изобразится матрицами с фиксированным отношением $v = (x_0 : x_1)$ между строками. Все прямые в каждом из этих двух семейств попарно не пересекаются друг с другом, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, причём каждая точка квадрики Q_S является точкой пересечения единственной пары прямых из различных семейств. Никаких других прямых на квадрике Сегре нет, т. к. проходящая через произвольную точку $p \in Q_S$ и целиком лежащая на квадрике Q_S прямая содержится в пересечении $Q_S \cap T_p Q_S$, которое представляет собою плоскую конику, а значит, полностью исчерпывается парой проходящих через p прямых из описанных выше двух семейств.

Предложение 11.9
Над алгебраически замкнутым полем[1] через любые три попарно не пересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ проходит единственная, автоматически гладкая квадрика. Она является объединением всех прямых, пересекающих каждую из трёх заданных.

Доказательство. Поскольку ни на одной из перечисленных в начале n° 11.5 особых квадрик над алгебраически замкнутым полем нет трёх попарно не пересекающихся прямых, любая квадрика Q, проходящая через такие прямые, автоматически является гладкой, т. е. проективно конгруэнтна квадрике Сегре и заметается двумя семействами прямых. Три заданные прямые, будучи попарно не пересекающимися, принадлежат одному из этих семейств, и любая прямая из второго семейства пересекает каждую из них. С другой стороны, любая прямая, пересекающая каждую из трёх данных имеет три разных точки на квадрике Q и поэтому лежит на ней целиком, т. е. является одной из прямых второго семейства. □

Упражнение 11.24. Покажите, что касательное пространство к квадрике Сегре в точке $v \otimes \xi$ состоит из таких линейных операторов $F : U \to U$, что $F(\operatorname{Ann} \xi) \subset \Bbbk \cdot v$.

11.6. Подпространства, лежащие на квадриках. Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$, называется *планарностью* квадрики Q. Планарность пустой квадрики по определению равна -1. Таким образом, 0-планарные квадрики суть непустые квадрики, не содержащие прямых.

Лемма 11.2
Планарность гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ над произвольным полем $\Bbbk$, $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, не превышает половины размерности квадрики Q, т. е. не больше целой части $[(n-1)/2]$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $\dim V = n+1$, и $L = \mathbb{P}(W) \subset Q = V(q)$, где $q \in S^2V^*$. Поскольку ограничение формы q на подпространство $W \subset V$ тождественно нулевое, оператор корреляции $\hat{q} : V \to V^*$ переводит подпространство W внутрь подпространства $\operatorname{Ann}(W) \subset V^*$. В силу невырожденности формы q этот оператор инъективен, откуда

$$\dim(W) = \dim \hat{q}(W) \leqslant \dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W\,.$$

Таким образом, $2\dim W \leqslant \dim V$, т. е. $2\dim L \leqslant n-1$. □

Лемма 11.3
Сечение гладкой квадрики Q произвольной гиперплоскостью Π либо является гладкой квадрикой в гиперплоскости Π, либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$. Последнее равносильно тому, что $\Pi = T_pQ$ касается квадрики в точке p.

Доказательство. Пусть $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ и $\Pi = \mathbb{P}(W)$. Первое утверждение вытекает из включения $\ker \hat{q}|_W \subset \hat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W)$ и равенства $\dim \hat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W) = \dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W = 1$. Пусть $\ker \hat{q}|_W \neq 0$ порождается ненулевым вектором p. Тогда $p \in Q \cap \Pi$ и $\operatorname{Ann}(\hat{q}(p)) = W$, откуда $T_pQ = \Pi$. Наоборот, если $\Pi = T_pQ = \mathbb{P}(\operatorname{Ann} \hat{q}(p))$, то $p \in \operatorname{Ann} \hat{q}(p)$ лежит в ядре ограничения оператора $\hat{q}$ на подпространство $\operatorname{Ann} \hat{q}$. □

[1] Ниже мы увидим, что это условие можно существенно ослабить. Скажем, над полем $\mathbb{R}$ предл. 11.9 тоже верно.

Предложение 11.10
Над произвольным полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ проективные подпространства L размерности m, лежащие на n-мерной гладкой квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ и проходящие через заданную точку $p \in Q$, биективно соответствуют всевозможным $(m-1)$-мерным проективным подпространствам L', лежащим на $(n-2)$-мерной гладкой квадрике $Q'_{n-2} = \mathbb{P}_{n-1} \cap Q$, которую квадрика Q высекает из произвольной не проходящей через точку p гиперплоскости $\mathbb{P}_{n-1} \subset T_pQ$.

Доказательство. Всякая m-мерная плоскость $L \subset Q$, проходящая через точку $p \in Q$, лежит в пересечении $Q \cap T_Q$. Согласно лем. 11.3 это пересечение является особой квадрикой с единственной особой точкой p, а значит, по теор. 11.2 на стр. 191 представляет собою конус с вершиной в точке p над гладкой квадрикой Q', которая высекается квадрикой Q из любой не проходящей через p гиперплоскости $H \subset T_pQ$. Поэтому $(m-1)$-мерная плоскость $L' = L \cap H = L \cap Q'$ лежит на Q'. Наоборот, линейное соединение точки p с произвольной $(m-1)$-мерной плоскостью $L' \subset Q'$ содержит p и лежит в Q. □

Следствие 11.10
Мощность множества k-мерных плоскостей, лежащих на гладкой квадрике Q и проходящих через заданную точку $p \in Q$, одинакова для всех точек $p \in Q$. В частности, через каждую точку гладкой m-планарной квадрики можно провести лежащую на квадрике m-мерную плоскость.

Доказательство. Если $a, b \in Q$ и $b \notin T_aQ$, то $H = T_aQ \cap T_bQ$ одновременно является не проходящей через a гиперплоскостью в T_aQ и не проходящей через b гиперплоскостью в T_bQ. По предл. 11.10 множество проходящих через точку a k-мерных плоскостей, лежащих на Q, и множество проходящих через точку a k-мерных плоскостей, лежащих на Q, оба находятся в биекции с множеством всех $(k-1)$-мерными плоскостей, лежащих на гладкой квадрике $Q \cap H$ в H. Тем самым, эти два множества равномощны. Если $b \in T_aQ$, рассмотрим любую точку $c \in Q \smallsetminus (T_aQ \cup T_bQ)$. По уже доказанному, множество k-мерных плоскостей, лежащих на Q и проходящих через точку c, равномощно и такому же множеству плоскостей, проходящих через a, и такому же множеству плоскостей, проходящих через b. □

Следствие 11.11
Гладкая n-мерная квадрика $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ над алгебраически замкнутым полем $[n/2]$-планарна.

Доказательство. Это так при $n = 0, 1, 2$. Поскольку все гладкие n-мерные квадрики над алгебраически замкнутым полем проективно конгруэнтны, общий случай получается из предл. 11.10 по индукции. □

Упр. 11.2. Если под произведением векторов $u, w \in V$ понимать число $uw \overset{\text{def}}{=} \widetilde{q}(u,w)$, то матрицу Грама базиса $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ можно записать как $A = e^t \cdot e$ (произведение столбца векторов e^t и строки векторов e). Поэтому $A' = (e')^t \cdot e = (C^t e^t)(eC) = C^t(e^t e)C = C^t AC$.

Упр. 11.3. Поскольку $\widetilde{q}(e,e) \neq 0$, подпространства $\Bbbk \cdot e$ и $e^\perp$ трансверсальны. Так как подпространство $e^\perp$ является аннулятором ненулевого линейного функционала $v \mapsto \widetilde{q}(w,e)$ на пространстве V, его коразмерность равна единице.

Упр. 11.5. Коника $x_0^2 + x_1^2 = 0$ на $\mathbb{P}_2$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ состоит из единственной точки $(0 : 0 : 1)$, порождающей ядро оператора корреляции.

Упр. 11.6. У матрицы A ранга 1 есть ненулевая строка, и все остальные строки ей пропорциональны. Поэтому $a_{ij} = \lambda_i \mu_j$ для некоторых ненулевых наборов чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$. Так как $\lambda_i \mu_j = \lambda_j \mu_i$ для всех $i \neq j$, имеется равенство отношений

$$(\lambda_0 : \lambda_1 : \ \dots \ : \lambda_n) = (\mu_0 : \mu_1 : \ \dots \ : \mu_n).$$

Упр. 11.7. Если $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}\xi) \cup \mathbb{P}(\operatorname{Ann}\eta)$ для каких-то ненулевых ковекторов $\xi, \eta \in V^*$, то квадратичная форма $q(v) = \xi(v)\eta(v)$ тождественно зануляется на векторном пространстве V. Индукцией по $\dim V$ выведите отсюда, что все коэффициенты многочлена q нулевые.

Упр. 11.10. Пересечение квадрики Q с прямой (cd) задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса c, d квадратичной формой $q(x) = \det(x,c) \cdot \det(x,d)$, поляризация которой

$$\widetilde{q}(x,y) = \tfrac{1}{2}\left(\det(x,c) \cdot \det(y,d) + \det(y,c) \cdot \det(x,d)\right).$$

Условие сопряжённости $\widetilde{q}(a,b) = 0$ означает, что $\det(a,c) \cdot \det(b,d) = -\det(b,c) \cdot \det(a,d)$, т. е. $[a,b,c,d] = -1$.

Упр. 11.12. С помощью предл. 11.1 на стр. 192 докажите, что непустая гладкая квадрика над бесконечным полем не может содержаться в объединении конечного числа гиперплоскостей.

Упр. 11.16. Для другой прямой ℓ' проекция $C \simeq \ell'$ из точки p_5 является композицией проекции $C \simeq \ell$ из точки p_5 с перспективой $p_5 : \ell \simeq \ell'$, которая сохраняет двойные отношения. Аналогично, проекция $C \simeq \ell$ из другой точки $p_5' \in C$ это композиция проекции $C \simeq \ell$ из p_5 с отображением $\gamma : \ell \to \ell$, возникающем как композиция проекции прямой ℓ на конику C из точки p_5 с последующей проекцией коники C на прямую ℓ из точки p_5'. Так как отображение γ биективно и рационально, оно является гомографией и сохраняет двойные отношения. По той же причине линейные проективные автоморфизмы плоскости сохраняют двойные отношения в пучках прямых и на самих прямых, лежащих в этой плоскости, а значит, и двойные отношения на кониках.

Упр. 11.18. Ответ: гладкая коника, проходящая через пять точек p, q, a, b, c.

Упр. 11.24. Базисом пространства $T_{v \otimes \xi}$ являются операторы $v \otimes \xi$, $u \otimes \xi$ и $v \otimes \eta$, где $u \in U$ и $\eta \in U^*$ суть любые вектор и ковектор, не пропорциональные v и ξ соответственно. Применение любого из этих операторов к вектору $w \in \operatorname{Ann}\xi$ даёт либо 0, либо вектор, пропорциональный v. Поскольку операторы $F : U \to U$ со свойством $F(\operatorname{Ann}\xi) \subset \Bbbk \cdot v$ тоже составляют трёхмерное векторное пространство, последнее совпадает с $T_{v \otimes \xi}$.