## §9. Выпуклые многогранники и многогранные конусы

В этом параграфе мы будем часто иметь дело с парами двойственных друг другу конечномерных векторных пространств $V, V^*$ над полем $\mathbb{R}$. Чтобы подчеркнуть симметрию между векторами и ковекторами, мы обозначаем значение (результат вычисления) ковектора $\psi \in V^*$ на векторе $v \in V$ через $\langle\, \psi\,,\, v\,\rangle \overset{\text{def}}{=} \psi(v) = \mathrm{ev}_v(\psi)$. Для аффинного функционала $\alpha\,:\,\mathbb{A}(V) \to \mathbb{R}$ мы, как и ранее, полагаем $H_\alpha = \{x \in \mathbb{A}(V) \mid \alpha(x) = 0\}$ и $H_\alpha^+ = \{x \in \mathbb{A}(V) \mid \alpha(x) \geqslant 0\}$.

**9.1. Выпуклые многогранники.** Конечное пересечение замкнутых полупространств

$$M = H^+_{\alpha_1} \cap H^+_{\alpha_2} \cap \ldots \cap H^+_{\alpha_m}\,, \tag{9-1}$$

задаваемых аффинными функционалами $\alpha_i\,:\,\mathbb{A}(V) \to \mathbb{R}$, называется *выпуклым многогранником* в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$. Например, выпуклыми многогранниками являются всё пространство $\mathbb{A}(V) = H_1^+$, задаваемое неравенством $1 \geqslant 0$ с тождественно равным единице функционалом $\alpha$, а также пустое множество $\varnothing = H^+_{-1}$, задаваемое неравенством $-1 \geqslant 0$. Любое аффинное подпространство $p + U \subset V$, где $p \in V$ и $U \subset V$ суть фиксированные вектор и подпространство, тоже является выпуклым многогранником, поскольку задающая его система неоднородных линейных уравнений $\langle\, \psi_i\,,\, v\,\rangle = \langle\, \psi_i\,,\, p\,\rangle$ на вектор $v \in V$, где ковекторы $\psi_i \in V^*$ пробегают какой-нибудь базис в $\mathrm{Ann}\, U$, может быть переписана в виде эквивалентной системы неравенств $\langle\, \psi_i\,,\, p\,\rangle - \langle\, \psi_i\,,\, v\,\rangle \geqslant 0$ и $-\langle\, \psi_i\,,\, p\,\rangle + \langle\, \psi_i\,,\, v\,\rangle \geqslant 0$. Пересечение конечного множества выпуклых многогранников является многогранником. В частности, сечение выпуклого многогранника любым аффинным подпространством является выпуклым многогранником.

**9.1.1. Перечисление граней.** Напомню, что *гранью* замкнутого выпуклого множества $M$ называется пересечение $M$ с любым его опорным полупространством. Каждый непустой выпуклый многогранник, отличный от всего пространства, имеет грани, и все они тоже являются непустыми выпуклыми многогранниками. Сам многогранник $M$ является своей гранью, если и только если он содержится в некоторой гиперплоскости. В этом случае мы будем называть совпадающую с $M$ грань *несобственной*, а все остальные грани $\Gamma \subsetneq M$ — *собственными*. Под *размерностью* многогранника мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится. В частности, размерность каждой собственной грани строго меньше размерности многогранника. Грани $\Gamma \subset M$ размерности $\dim \Gamma = \dim M - 1$ называются *гипергранями*.

Теорема 9.1

Для многогранника (9-1) и каждого непустого подмножества $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ положим $H_I = \bigcap_{i \in I} H_{\alpha_i}$. Пересечение $\Gamma_I \overset{\text{def}}{=} M \cap H_I$ либо пусто, либо является гранью $M$, и все грани многогранника $M$ получаются таким образом. Для каждой непустой грани $\Gamma_I$ аффинное подпространство $H_I \subset \mathbb{A}(V)$ является наименьшим содержащим грань $\Gamma_I$ аффинным пространством. Точка $p \in \Gamma_I$ является внутренней точкой грани[1] $\Gamma_I$, если и только если $\alpha_j(p) > 0$ для всех $j \notin I$.

Доказательство. Если многогранник $\Gamma_I = M \cap H_I$ не пуст, сумма $\alpha_I = \sum_{i \in I} \alpha_i$ является опорным функционалом[2] для $M$ и $\Gamma_I = M \cap H_{\alpha_I}$. Таким образом, все непустые многогранники $\Gamma_I$ являются

[1] В топологии подпространства $H_I$.

[2] См. опр. 8.6 на стр. 144.

гранями многогранника $M$. Покажем, что для каждой такой грани $\Gamma_I$ выполнены два последних утверждения теоремы. Пусть точка $p \in \Gamma_I = H_I \cap M$ такова, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I$. Поскольку эти строгие неравенства выполняются и на некоторой кубической окрестности точки $p$ в аффинном пространстве $H_I$, точка $p$ входит в $\Gamma_I$ вместе с этой кубической окрестностью. Это, во-первых, означает что подпространство $H_I$ является наименьшим аффинным пространством, содержащим грань $\Gamma_I$, а во-вторых, что точка $p$ является внутренней точкой грани $\Gamma_I$. Напротив, если хоть один функционал $a_k$ зануляется в точке $p$, лежащей в какой-либо грани $\Gamma' \subseteq M$, но при этом положителен в некоторой другой точке $q$ той же грани, то точка $p$ не может быть внутренней точкой грани $\Gamma'$, т. к. в противном случае, немного продлив отрезок $[q, p]$ за точку $p$, мы получим в грани $\Gamma'$ точку, где функционал $a_k$ строго отрицателен.

Рассмотрим теперь произвольную грань $\Gamma = H_b \cap M$, где $b$ — какой-либо опорный функционал многогранника $M$. Обозначим через $I = I(\Gamma) \subset \{1, 2, \dots, m\}$ множество номеров всех тех задающих $M$ функционалов $a_i$, для которых $\Gamma \subset H_{a_i}$. Поскольку для каждого $j \notin I$ найдётся такая точка $q_j \in \Gamma$, что $a_j(q_j) > 0$, все функционалы $a_j$ с $j \notin I$ строго положительны в барицентре $q_\Gamma$ всех точек $q_j$. Если $I = \varnothing$, то вообще все функционалы $a_i$ строго положительны в точке $q_\Gamma$, а значит, и на некотором кубе с центром в $q_\Gamma$. Тем самым, $q_\Gamma$ является внутренней[1] точкой многогранника $M$ и не лежит ни в какой грани. Мы заключаем, что для любой грани $\Gamma \subseteq M$ множество $I = I(\Gamma)$ непусто и $\Gamma \subseteq H_I \cap M = \Gamma_I$. В частности, и грань $\Gamma_I = H_I \cap M$, и аффинное подпространство $H_I$ тоже непусты, а точка $q_\Gamma$ является, по уже доказанному, внутренней точкой грани $\Gamma_I$. Поэтому для любой точки $p \in \Gamma_I$ отрезок $[p, q_\Gamma]$ можно немного продлить за точку $q_\Gamma$ так, чтобы его новый конец $r$ всё ещё лежал в $\Gamma_I$. Из соотношений $b(p) \geqslant 0$, $b(q_\Gamma) = 0$, $b(r) \geqslant 0$ вытекает, что $b(r) = b(p) = 0$. Следовательно, каждая точка $p \in \Gamma_I$ лежит в грани $\Gamma$, откуда $\Gamma = \Gamma_I$. □

Следствие 9.1
Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, и каждая грань любой грани является гранью самого многогранника. □

Следствие 9.2
Крайними точками любого выпуклого многогранника являются его вершины и только они. □

Следствие 9.3
Каждый ограниченный выпуклый многогранник имеет конечное множество вершин и совпадает с их выпуклой оболочкой. □

Следствие 9.4
Непустой выпуклый многогранник $M$ тогда и только тогда является цилиндром[2], когда он не имеет вершин. □

**9.1.2. Координатное описание.** Выпуклый многогранник

$$M = H^+_{a_1} \cap H^+_{a_2} \cap \dots \cap H^+_{a_m} \subset \mathbb{A}(V)$$

является прообразом положительного координатного гипероктанта $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0} \subset \mathbb{R}^m$ при аффинном отображении $a : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto \big(a_1(v), a_2(v), \dots, a_m(v)\big)$, которое мы будем коротко записывать в виде $v \mapsto b + Av$, где точка $b = a(0) \in \mathbb{R}^m$ является образом какой-либо начальной

[1] В топологии всего объемлющего пространства.

[2] См. опр. 8.7 на стр. 146. Многогранники, которые являются цилиндрами, также называют *призмами*.

точки $0 \in \mathbb{A}(V)$, а линейное отображение $A : V \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto (\alpha_1(v), \alpha_2(v), \dots, \alpha_m(v))$, задаётся дифференциалами $\alpha_i = D_{a_i} \in V^*$ аффинных функционалов $a_i$. Таким образом,

$$M = H^+_{a_1} \cap H^+_{a_2} \cap \dots \cap H^+_{a_m} = \{ v \in V \mid b + Av \geqslant 0 \} .$$

При замене вектора $b \in \mathbb{R}^m$ вектором $b' = b + Au$ с произвольным $u \in V$ многогранник $M$ параллельно сдвигается на вектор $-u$, т. к.

$$M' = \{ v \in V \mid b' + Av \geqslant 0 \} = \{ v \in V \mid b + A(u + v) \geqslant 0 \} = \{ v \in V \mid u + v \in M \} .$$

Иначе говоря, перенос начала координат в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ равносилен сдвигу вектора $b \in \mathbb{R}^m$ на вектор из подпространства $\operatorname{im} A \subset \mathbb{R}^m$.

Упражнение 9.1. Убедитесь, что положительный координатный гипероктант $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ не содержит аффинных подпространств положительной размерности.

Предложение 9.1
Многогранник $M = \{ v \in V \mid b + Av \geqslant 0 \}$ является цилиндром[1] , если и только если $\ker A \neq 0$, и в этом случае $M = \mathbb{A}(\ker A) \times M'$, где многогранник $M'$ не содержит аффинных подпространств положительной размерности и аффинно конгруэнтен многограннику $M_{\text{red}} = (b + \operatorname{im} A) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$, высекаемому положительным координатным гипероктантом $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ из аффинного пространства $b + \operatorname{im} A \subset \mathbb{R}^m$ ассоциированного с векторным пространством $\operatorname{im} A$.

Доказательство. Если многогранник $M$ содержит аффинное подпространство $p + W$, то

$$b + A(p + W) = b + A(p) + A(W) \subset \mathbb{R}^m_{\geqslant 0} .$$

По упр. 9.1 такое возможно лишь при $A(W) = 0$, т. е. когда $W \subset \ker A$. С другой стороны, для любой точки $p \in M$ аффинное пространство $p + \ker A$ целиком лежит в многограннике $M$, т. к. для всех $u \in \ker A$ имеем $b + A(p + u) = b + A(p) \geqslant 0$. Пусть подпространство $U \subset V$ таково, что $V = \ker A \oplus U$. Положим $M' = M \cap \mathbb{A}(U)$. Тогда

$$M = \{ (t, u) \in \ker A \oplus U \mid b + Au \geqslant 0 \} = \mathbb{A}(\ker A) \times M' ,$$

а ограничение аффинного отображения $v \mapsto b + Av$ на подпространство $U$ задаёт аффинный изоморфизм между $\mathbb{A}(U)$ и аффинным подпространством $b + \operatorname{im} A \subset \mathbb{R}^m$. Он биективно отображает многогранник $M'$ на многогранник $M_{\text{red}}$. □

**9.1.3. Приведённые многогранники.** Не содержащие аффинных подпространств положительной размерности многогранники называются *приведёнными*. Если многогранник

$$M = \{ v \in V \mid b + Av \geqslant 0 \}$$

приведён, то линейное отображение $A : V \to \mathbb{R}^m$ инъективно и позволяет отождествить векторное пространство $V$ с подпространством $\operatorname{im} A \subset \mathbb{R}^m$. Таким образом, каждое приведённое пересечение $m$ полупространств может быть описано как пересечение положительного координатного гипероктанта в $\mathbb{R}^m$ с аффинным подпространством вида $b + V \subset \mathbb{R}^m$

$$M = (b + V) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0} . \tag{9-2}$$

[1] См. опр. 8.7 на стр. 146.

Вектор $b$ удобно считать начальной точкой аффинного пространства $b+V$. Сдвиг вектора $b$ на вектор из $V$ приводит к параллельному переносу многогранника $M$ внутри $\mathbb{A}(V)$. С точностью до такого параллельного переноса, приведённый многогранник (9-2) определяется классом $[b]_V = b + V \in \mathbb{R}^m / V$ вектора $b \in \mathbb{R}^m$ в фактор пространстве[1] $\mathbb{R}^m / V$.

На практике вектор $b$ обычно задаётся столбцом своих координат

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

а подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ — либо как линейная оболочка $k$ столбцов $v_1, v_2, \dots, v_n$ какой-нибудь $m \times k$ матрицы $A$, либо как пространство решений системы из $k$ линейных уравнений $A^t y = 0$ на столбец $y \in \mathbb{R}^m$. В первом случае многогранник $M$ образован всеми такими линейными комбинациями $\sum v_j x_j$ столбцов матрицы $A$, коэффициенты $x \in \mathbb{R}^k$ которых удовлетворяют неравенствам $b + Ax \geqslant 0$. При этом $\dim M \leqslant \dim V = \operatorname{rk} A$. Во втором случае многогранник $M$ состоит из всех столбцов $z = b + y \in \mathbb{R}^m$, которые лежат в положительном координатном гипероктанте $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ и удовлетворяют системе из $k$ неоднородных линейных уравнений $Az = Ab$. При этом $\dim M \leqslant \dim V = m - \operatorname{rk} A$.

**9.2. Выпуклые многогранные конусы.** Множество всех неотрицательных линейных комбинаций векторов из заданного непустого конечного множества $R$ в векторном пространстве $V$ называется *выпуклым многогранным конусом*, порождённым множеством $R$, и обозначается

$$\sigma_R = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ v_i \in R\}. \tag{9-3}$$

Упражнение 9.2. Убедитесь, что $\sigma_R$ является замкнутой выпуклой фигурой в $\mathbb{A}(V)$.

Очевидно, что всякий конус $\sigma_R$ не пуст, содержит нулевой вектор $O \in V$ и вместе с каждым ненулевым вектором $v \in \sigma_R$ содержит весь замкнутый луч $[0, v) = \{vt \mid t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}$.

Лемма 9.1
Все опорные гиперплоскости любого выпуклого многогранного конуса $\sigma$ проходят через нуль.

Доказательство. Пусть опорная гиперплоскость $H_\alpha$ проходит через ненулевую точку $p \in \partial\sigma$. Если $\alpha(0) > 0$, то ограничение опорного функционала $\alpha$ на луч $[0, p) \subset \sigma$ должно менять в точке $p$ знак, что невозможно. □

Лемма 9.2 (лемма Фаркаша)
Если вектор $u \in V$ не лежит в многогранном конусе $\sigma_R$, то существует такой *линейный* функционал $\alpha \in V^*$, что $\langle\, \alpha\,,\, u\,\rangle < 0$ и $\langle\, \alpha\,,\, v\,\rangle \geqslant 0$ для всех $v \in \sigma_R$.

Доказательство. Согласно теор. 8.4 на стр. 144, любой многогранный конус $\sigma_R$ является пересечением своих опорных полупространств. По лем. 9.1 каждое такое полупространство имеет вид $\alpha^+ = \{v \in V \mid \langle\, \alpha\,,\, v\,\rangle \geqslant 0\}$ для подходящего ковектора $\alpha \in V^*$. Следовательно, для каждого $u \notin \sigma_R$ существует такой линейный функционал $\alpha \in V^*$, что $u \notin \alpha^+$, а $\sigma_R \subset \alpha^+$. □

[1] См. n° 4.6 на стр. 67.

Теорема 9.2 (теорема Фаркаша – Минковского – Вейля)
Подмножество $\sigma \subset V$ является выпуклым многогранным конусом, если и только если оно является пересечением конечного множества *векторных* полупространств

$$\alpha^+ = \{v \in V \mid \langle \alpha, v \rangle \geqslant 0\}, \quad \alpha \in V^*. \tag{9-4}$$

Соглашение 9.1. Для упрощения формулировок мы разрешаем ковектору $\alpha$ в формуле (9-4) принимать и нулевое значение. Соответствующее «полупространство» $0^+ = V$ называется *несобственным*.

Доказательство теор. 9.2. Пусть множество векторов $\sigma \subset V$ является пересечением конечного числа полупространств (9-4). Тогда $\sigma$ является выпуклым многогранником в $\mathbb{A}(V)$, содержит нуль $0 \in V$, и вместе с каждой точкой $p \neq 0$ содержит весь замкнутый луч $[0, p)$. Пересечение многогранника $\sigma$ со стандартным единичным кубом $B_1(0) \subset \mathbb{A}(V)$ является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 9.3 на стр. 148 совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин — конечного множества векторов $R \subset \sigma$. Поэтому для любого ненулевого вектора $v \in \sigma$ вектор $v / \|v\|_{\mathrm{st}} \in \sigma \cap B_1(0)$ является выпуклой комбинацией векторов из $R$, а значит, и сам вектор $v$ это неотрицательная линейная комбинация ненулевых векторов из $R$.

Наоборот, любой многогранный конус $\sigma_R \subset V$, будучи замкнутым выпуклым множеством, является пересечением полупространств (9-4) по всем таким $\alpha \in V^*$, что $\langle \alpha, v \rangle \geqslant 0$ для каждого $v \in R$. Множество этих ковекторов $\alpha$ является пересечением конечного числа векторных полупространств $v^+ = \{\alpha \in V^* \mid \langle \alpha, v \rangle \geqslant 0\}$, где $v$ пробегает множество $R$. По уже доказанному, такое пересечение представляет собою выпуклый многогранный конус $\sigma_{R^\vee} \subset V^*$ для некоторого конечного множества ковекторов $R^\vee \subset V^*$. Так как каждый ковектор $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$ является неотрицательной линейной комбинацией ковекторов $\psi \in R^\vee$, все неравенства $\langle \alpha, v \rangle \geqslant 0$, $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$, следуют из конечного набора неравенств $\langle \psi, v \rangle \geqslant 0$, $\psi \in R^\vee$, т. е. $\sigma = \bigcap\limits_{\psi \in R^\vee} \psi^+$. □

Пример 9.1 (проективный конус многогранника)
Рассмотрим векторное пространство $W = \mathbb{R} \oplus V = \{(t, v) \mid t \in \mathbb{R}, v \in V\}$ и вложим в него аффинное пространство $\mathbb{A}(V)$ в качестве аффинной гиперплоскости

$$H_{(t-1)} = e + V = \{(1, v) \in W \mid v \in V\}, \tag{9-5}$$

где $e = (1, 0) \in W$, а $t \in W^* : (t, v) \mapsto t$. Всякий выпуклый многогранник в $\mathbb{A}(V)$

$$M = \{v \in V \mid b + Av \geqslant 0\} = \{(1, v) \in W \mid b + Av \geqslant 0\}$$

высекается из гиперплоскости (9-5) выпуклым многогранным конусом

$$\pi_M \overset{\text{def}}{=} \{(t, v) \in W \mid bt + Av \geqslant 0\} \subset W, \tag{9-6}$$

который называется *проективным конусом* многогранника $M \subset \mathbb{A}(V)$ и представляет собою прообраз положительного координатного гипероктанта $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ при *линейном* отображении

$$W \to \mathbb{R}^m, \quad (t, v) \mapsto bt + Av,$$

или, что то же самое, пересечение векторных полупространств $\beta_i^+ = \{w \in W \mid \langle \beta_i, w \rangle \geqslant 0\}$, задаваемых ковекторами $\beta_i : W \to \mathbb{R}$, $(t, v) \mapsto b_i t + \langle \alpha_i, v \rangle$, которые продолжают дифференциалы $\alpha_i : V \to \mathbb{R}$ аффинных функционалов $a_i : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{R}$ до линейных форм на пространстве $W = \mathbb{R}\, e \oplus V$ по правилу $\langle \beta_i, e \rangle \overset{\text{def}}{=} a_i(0) = b_i$.

Упражнение 9.3. Покажите, что проективный конус $\pi_M \subset W$ непустого выпуклого многогранника $M \subset e + V \subset W$ является замыканием объединения всех лучей $[0, w)$, проходящих через точки $w = (1, v) \in M$ (см. рис. 9◇1).

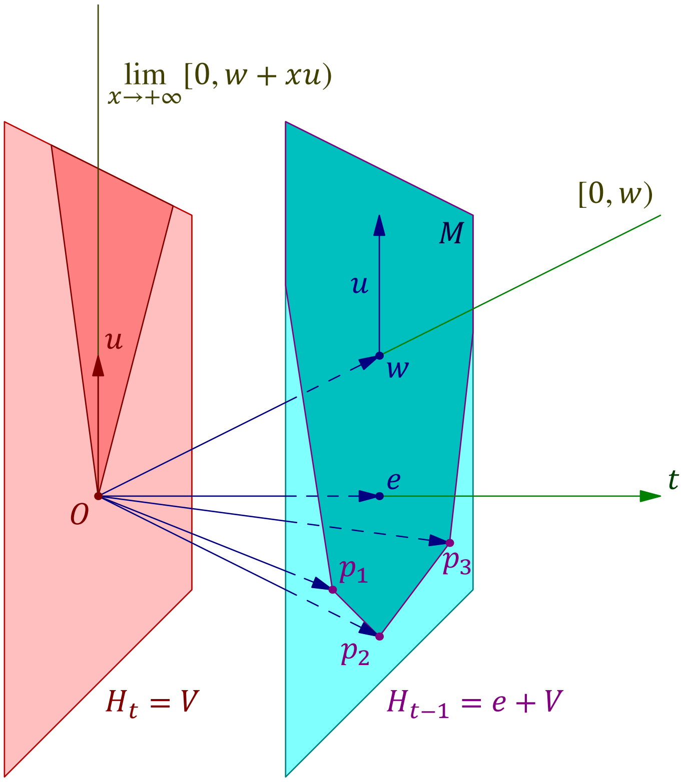


**Рис. 9◇1.** Предельное положение луча $[0, w + xu) = \{s(w + xu) \mid s \geqslant 0\}$ при $x \to +\infty$.

Упражнение 9.4. Убедитесь, что выпуклая оболочка любого конечного множества точек $P$ аффинной гиперплоскости $e + V \subset W$ высекается из неё конусом $\sigma_P \subset W$.

Теорема 9.3 (теорема Минковского – Вейля)
Выпуклая оболочка любого конечного набора точек является ограниченным выпуклым многогранником, и наоборот, всякий компактный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного множества точек, а именно, своих вершин.

Доказательство. Выпуклая оболочка любого конечного набора точек $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}(V)$ ограничена, ибо содержится в кубе, содержащем все точки $p_i$. Чтобы задать её конечным числом линейных неравенств, вложим $\mathbb{A}(V)$ в векторное пространство $W = \mathbb{R}\, e \oplus V$ в качестве аффинной гиперплоскости $e + V$, как в предыдущем прим. 9.1. Согласно упр. 9.4 выпуклая оболочка точек $p_i = (e, v_i)$ является пересечением гиперплоскости $e + V$ с порождённым векторами $v_i$ выпуклым многогранным конусом $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m} \subset W$, который является выпуклым многогранником по теор. 9.2. Это доказывает первое утверждение. Второе утверждение уже было установлено нами в сл. 9.3 на стр. 148. □

**9.2.1. Двойственность.** Рассмотрим выпуклый многогранный конус $\sigma_R \subset V$, порождённый конечным множеством векторов $R \subset V$. Множество всех его опорных функционалов

$$\sigma_R^\vee \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in V^* \mid \forall v \in \sigma_R \; \langle\, \alpha\,,\, v\,\rangle \geqslant 0\} = \bigcap_{v\in R} v^+ \subset V^*$$

по теор. 9.2 также является выпуклым многогранным конусом, порождённым неким конечным набором ковекторов $R^\vee \subset V^*$. Конус $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ называется *двойственным* к конусу $\sigma_R \subset V$. По лемме Фаркаша[1] исходный конус

$$\sigma_R = \{v \in V \mid \forall \alpha \in \sigma_{R^\vee} \; \langle\, \alpha\,,\, v\,\rangle \geqslant 0\} = \bigcap_{\alpha\in R^\vee} \alpha^+ \subset V$$

двойствен к своему двойственному конусу. Таким образом, для любого выпуклого многогранного конуса $\sigma$ выполняется равенство $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$.

Пример 9.2 (двойственные многогранники)
Пусть в аффинных пространствах $\mathbb{A}(V)$ и $\mathbb{A}(V^*)$, ассоциированных с двойственными векторными пространствами $V$ и $V^*$ отмечены точки $e \in \mathbb{A}(V)$ и $\xi \in \mathbb{A}(V^*)$. Вложим $\mathbb{A}(V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $e{+}V$ в векторное пространство $W = \mathbb{R}\, e{\oplus}V$, как в прим. 9.1 на стр. 151, и точно также вложим $\mathbb{A}(V^*)$ в качестве аффинной гиперплоскости $\xi{+}V^*$ в векторное пространство $W^\vee = \mathbb{R}\,\xi \oplus V^*$, которое отождествим с $W^*$, полагая $\langle\, x\xi + \alpha\,,\, te+v\,\rangle = xt + \langle\, \alpha\,,\, v\,\rangle$ для всех $x, t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in V^*$, $v \in V$. Многогранники

$$M = (e+V)\cap \pi_M \subset \mathbb{A}(V) \quad \text{и} \quad M^\vee = (\xi + V^*)\cap \pi_M^\vee \subset \mathbb{A}(V^*),$$

с двойственными проективными конусами $\pi_M \subset W$ и $\pi_M^\vee \subset W^*$, называются *двойственными* относительно точек $e \in \mathbb{A}(V)$ и $\xi \in \mathbb{A}(V^*)$. Если точка $e$ внутренняя для многогранника $M$, то все задающие $M$ аффинные функционалы $a_i$ имеют строго положительные свободные члены и могут быть умножены на положительные константы[2] так, чтобы их свободные члены стали равны единице. Тогда все ковекторы $\beta_i \in W^*$, задающие проективный конус $\pi_M$ многогранника $M$, примут вид $\beta_i = \xi + \alpha_i$, где $\alpha_i \in V^*$ это дифференциалы перескалированных функционалов $a_i$. Двойственный конус $\pi_M^\vee = \sigma_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m} \subset W^*$ пересекает аффинную гиперплоскость $\xi + V^*$ по выпуклой оболочке точек $\xi + \alpha_i$.

Например, стандартный куб $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ задаётся неравенствами $1 + x_i \geqslant 0$ и $1 - x_i \geqslant 0$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Двойственный к нему относительно нулей в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n*}$ многогранник представляет собою выпуклую оболочку стандартных базисных векторов $\pm e_i^* \in \mathbb{R}^{n*}$, т. е. является стандартным кокубом.

**9.2.2. Грани конусов.** Удобно считать, что каждый конус $\sigma \subset V$ имеет *несобственную грань* $\sigma = 0^+ \cap \sigma$ размерности $\dim \sigma$. Рассмотрим пару двойственных конусов

$$\sigma_R = \sigma_{R^\vee}^\vee \subset V \quad \text{и} \quad \sigma_{R^\vee} = \sigma_R^\vee \subset V^*. \tag{9-7}$$

Для каждой грани $\Gamma \subset \sigma_R$ обозначим через $L_\Gamma \subset V$ её линейную оболочку и положим

$$R_\Gamma \overset{\text{def}}{=} R \cap L_\Gamma \quad \text{и} \quad R_\Gamma^\vee \overset{\text{def}}{=} R^\vee \cap \operatorname{Ann} L_\Gamma\,. \tag{9-8}$$

[1] См. лем. 9.2 на стр. 150.

[2] При умножении аффинного функционала $a$ на положительную константу полупространство $H_a^+$ не меняется.

Первое множество состоит из всех образующих конуса $\sigma_R$, лежащих в линейной оболочке грани $\Gamma$, второе — из всех образующих двойственного конуса, аннулирующих грань $\Gamma$.

Лемма 9.3
Для каждой грани $\Gamma$ любого выпуклого многогранного конуса $\sigma_R \subset V$ выполняются равенства

$$\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} = \sigma_R \cap L_\Gamma \,,$$

и множество векторов $R_\Gamma$ линейно порождает линейную оболочку $L_\Gamma$ грани $\Gamma$.

Доказательство. По теор. 9.1 каждая грань $\Gamma \subset \sigma_R$ имеет вид $\Gamma = \sigma_R \cap \operatorname{Ann} R^\vee_\Gamma$ и содержит некоторый открытый в пространстве $\operatorname{Ann} R^\vee_\Gamma$ куб. Поэтому $L_\Gamma = \operatorname{Ann} R^\vee_\Gamma$ и $\Gamma = \sigma_R \cap L_\Gamma$. В частности, $\sigma_{R_\Gamma} \subset \Gamma$. Для доказательства обратного включения достаточно убедиться, что в разложении произвольного вектора $w \in \Gamma$ в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из $R$ ненулевые коэффициенты могут иметь лишь векторы из $R_\Gamma$. Но для каждой образующей $v \in R \smallsetminus R_\Gamma$ найдётся такой функционал $\alpha \in R^\vee_\Gamma$, что $\langle \alpha , v \rangle > 0$, и если бы образующая $v$ входила в разложение вектора $w \in \Gamma$ с положительным коэффициентом, то значение $\langle \alpha , w \rangle$ было бы положительным, а не нулевым, как это должно быть для ковектора $\alpha \in R^\vee_\Gamma$. □

Упражнение 9.5. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество $I \subset R$ порождает конус, являющийся гранью конуса $\sigma_R$.

Теорема 9.4
Для любой пары двойственных конусов $\sigma_R = \sigma^\vee_{R^\vee}$, $\sigma_{R^\vee} = \sigma^\vee_R$ в $n$-мерных пространствах $V$, $V^*$ при $k = 0, 1, \dots , \dim \sigma_R$ имеется оборачивающая включения биекция между $k$-мерными гранями $\Gamma \subset \sigma_R$ и $(n-k)$-мерными гранями $\Gamma^\vee \subset \sigma^\vee_R$. Она переводит каждую грань в пересечение двойственного конуса с аннулятором этой грани или, т. е. переводит грань $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} \subset \sigma_R$ в грань $\Gamma^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{R^\vee_\Gamma} \subset \sigma_{R^\vee}$, где $R^\vee_\Gamma = R^\vee \cap \operatorname{Ann} \Gamma$. В частности, одномерные рёбра любого конуса являются уравнениями гиперграней двойственного конуса и наоборот.

Доказательство. Для каждой грани $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} = \sigma_R \cap \operatorname{Ann} R^\vee_\Gamma$ все векторы $v \in R_\Gamma$ являются опорными функционалами для двойственного конуса $\sigma_{R^\vee}$. Поэтому подпространство $\operatorname{Ann} \Gamma = \operatorname{Ann} L_\Gamma$ высекает из $\sigma_{R^\vee}$ грань, которую мы обозначим $\Gamma^\vee$. По построению, $\Gamma^\vee \supset R^\vee_\Gamma$. Линейная оболочка множества $R^\vee_\Gamma$ совпадает с двойным аннулятором $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} R^\vee_\Gamma = \operatorname{Ann} L_\Gamma = \operatorname{Ann} \Gamma$. Следовательно, по лем. 9.3 множество $R^\vee_\Gamma$ линейно порождает линейную оболочку грани $\Gamma^\vee$, и $\Gamma^\vee = \sigma_{R^\vee_\Gamma}$. По построению, $\operatorname{Ann} \Gamma^\vee = \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} \Gamma = L_\Gamma$. Поэтому $\Gamma^{\vee\vee} = \Gamma$, т. е. отображение $\Gamma \mapsto \Gamma^\vee$ обратно самому себе, а значит, биективно. □

Замечание 9.1. В теор. 9.4 *не предполагается* равенства $\dim \sigma_R = \dim V$. Например, одномерный конус $\sigma_v = \{tv \mid t \geqslant 0\}$ представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении вектора $v$ и имеет две грани — нульмерную грань 0 и одномерную грань, совпадающую с самим этим лучом. Соответственно, двойственный ему конус $\sigma^\vee_v = v^+ \subset V^*$ представляет собою полупространство и тоже имеет две грани: $n$-мерную грань $\sigma^\vee_v \cap \operatorname{Ann} 0 = v^+ \cap V^* = v^+$ и $(n-1)$-мерную грань $\sigma_v \cap \operatorname{Ann} v = H_v$.

Упражнение 9.6. Покажите, что для каждой грани $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$ конуса $\sigma_R$ выполняется равенство $\sigma_{R_\Gamma} = \sigma \cap -\sigma^\vee_{R^\vee_\Gamma}$, где $-\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{v \mid -v \in \sigma\}$ обозначает конус, центрально симметричный конусу $\sigma$ относительно начала координат.

**9.2.3. Асимптотический конус многогранника.** Пусть выпуклый многогранник

$$M = \{v \in V \mid b + Av \geqslant 0\} = H^+_{a_1} \cap H^+_{a_2} \cap \ldots \cap H^+_{a_m} \subset \mathbb{A}(V), \tag{9-9}$$

задаётся аффинными функционалами $a_i = b_i + \alpha_i$, где $b_i = a_i(0) \in \mathbb{R}$, $\alpha_i = D_{a_i} \in V^*$. Конус

$$\alpha_M = \{v \in V \mid Av \geqslant 0\} = \alpha_1^+ \cap \alpha_2^+ \cap \ldots \cap \alpha_m^+ = \sigma^\vee_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \subset V,$$

двойственный к конусу $\sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \subset V^*$, порождённому дифференциалами аффинных функционалов $a_i$, называется *асимптотическим конусом*[1] многогранника $M$. Иначе асимптотический конус можно описать как пересечение $\alpha_M = \pi_M \cap H_t$ проективного конуса[2]

$$\pi_M = \{(t, v) \in \mathbb{R} \oplus V \mid bt + Av \geqslant 0\}$$

с векторным подпространством $H_t = \{(0, v) \in \mathbb{R} \oplus V\} \simeq V$, заданным в $\mathbb{R} \oplus V$ уравнением $t = 0$, см. рис. 9◇2. Обратите внимание, что асимптотический конус определён и не пуст[3] для любого, в том числе и пустого, многогранника (9-9) и зависит только от линейного отображения $A : V \to \mathbb{R}^m$, но не от вектора $b \in \mathbb{R}^m$.

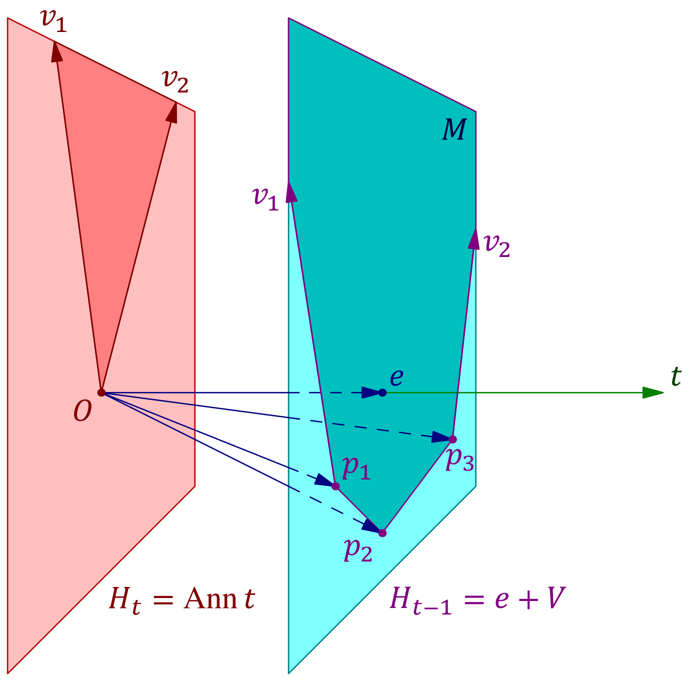


**Рис. 9◇2.** Асимптотический конус и направления рецессии.

Предложение 9.2

Если многогранник (9-9) не пуст, то ненулевой вектор $v \in V$ тогда и только тогда лежит в асимптотическом конусе $\alpha_M$ многогранника $M$, когда он обладает следующими эквивалентными друг другу свойствами[4]:

[1] Или *конусом рецессии*.

[2] См. прим. 9.1 на стр. 151.

[3] Ибо по крайней мере содержит нулевой вектор.

[4] Направления таких векторов называют *асимптотическими*, или *направлениями рецессии* (по-английски: *recession directions*).

1) $M$ целиком содержит какой-нибудь луч $[p,q)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{pq}=v$

2) $p+v\in M$ для любой точки $p\in M$.

Доказательство. Если для вектора $v\in V$ при каком-либо $i$ выполнено неравенство $\langle\, \alpha_i\,,\,v\,\rangle<0$, то для любой точки $p\in\mathbb{A}(V)$ при всех $t\gg 0$ справедливо неравенство

$$a_i(p+tv)=a_i(p)+t\cdot\langle\, a_i\,,\,v\,\rangle<0\,,$$

а значит ни свойство (1), ни свойство (2) не имеют места. Напротив, если $\langle\, \alpha_i\,,\,v\,\rangle\geqslant 0$ для всех $i$, то для любой точки $p\in M$ при всех $t\geqslant 0$ выполняются неравенства

$$a_i(p+tv)=a_i(p)+t\langle\, \alpha_i\,,\,v\,\rangle\geqslant a_i(p)\geqslant 0\,,$$

т. е. весь луч $p+tv$, $t\geqslant 0$, лежит в $M$. □

Теорема 9.5 (разложение Моцкина)
Всякий выпуклый многогранник $M$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ является объединением семейства своих асимптотических конусов $\alpha_M\subset V$, отложенных от точек некоторого компактного выпуклого многогранника $M'\subset\mathbb{A}(V)$. Иначе говоря, существуют такие конечные множества точек $P\subset\mathbb{A}(V)$ и векторов $R\subset V$, что

$$M=\operatorname{conv}(P)+\sigma_R=\{\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\cdots+\lambda_kp_k+\mu_1v_1+\mu_2v_2+\cdots+\mu_\ell v_\ell\}\,,\qquad(9\text{-}10)$$

где $p_i\in P$, $v_i\in R$, $\lambda_i,\mu_j\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ и $\sum\lambda_i=1$.

Доказательство. Вложим $\mathbb{A}(V)$ в векторное пространство $W=\mathbb{R}\,e\oplus V$ в качестве аффинной гиперплоскости $e+V$ с уравнением $t=1$, как в прим. 9.1 на стр. 151. По теор. 9.2 на стр. 151 проективный конус $\pi_M$ порождается некоторым конечным множеством векторов $S\subset W$, а асимптотический конус $\alpha_M\subset\pi_M$ является гранью проективного конуса, высекаемой векторным подпространством $V=\operatorname{Ann}t\subset W$. По лем. 9.3 на стр. 154 конус $\alpha_M=\sigma_R$ порождается множеством векторов $R=S\cap\operatorname{Ann}t$, а все остальные образующие $v\in S\smallsetminus R$ аффинного конуса $\pi_M$ удовлетворяют строгим неравенствам $\langle\, t\,,\,v\,\rangle>0$, см. рис. 9⋄2 на стр. 155. Обозначим через $P\subset e+V$ множество всех точек вида $p=v/\langle\, t\,,\,v\,\rangle$, где $v\in S\smallsetminus R$. Тогда $\pi_M=\sigma_{P\sqcup R}=\{p+r,\mid p\in\sigma_P, r\in\sigma_R\}$. Луч $[0,p+r)$, где $p\in\sigma_P$, $r\in\sigma_R$, пересекает аффинную гиперплоскость $t=1$, если и только если $p\neq 0$, и в этом случае точка пересечения $(p+r)/\langle\, t\,,\,p+r\,\rangle=(p+r)/\langle\, t\,,\,p\,\rangle$ является суммой точки $p/\langle\, t\,,\,p\,\rangle\in\operatorname{conv}P$ и вектора $r/\langle\, t\,,\,p\,\rangle\in\sigma_R=\alpha_M$. □

Следствие 9.5
Следующие свойства непустого многогранника $M=\{v\in V\mid c+Av\geqslant 0\}$ эквивалентны:

1) многогранник $M$ ограничен

2) асимптотический конус $\alpha_M=\{v\in V\mid Av\geqslant 0\}=0$

3) двойственный к асимптотическому конус $\sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m}=V^*$. □

Следствие 9.6
Линейный функционал $\xi \in V^*$ тогда и только тогда достигает на многограннике $M \in \mathbb{A}(V)$ своего минимального значения, когда он является опорным для асимптотического конуса многогранника $M$, т. е. когда $\xi \in \alpha_M^\vee = \sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m}$. В этом случае минимальное значение $\xi$ на $M = \operatorname{conv} P + \alpha_M$ равно минимальному значению $\xi$ на $\operatorname{conv} P$.

Доказательство. Если линейный функционал $\xi \in V^*$ принимает отрицательное значение на каком-нибудь ненулевом векторе из конуса $\sigma$, то он не ограничен снизу на $\sigma$. Таким образом, если $\xi$ ограничен снизу на $\sigma$, то $\xi \in \sigma^\vee$, и в этом случае минимальное значение $\xi$ на $\sigma$ равно нулю и достигается на грани $\sigma \cap \operatorname{Ann} \xi$. Поскольку $M = \operatorname{conv} P + \alpha_M$ и $\xi$ ограничен на компакте $\operatorname{conv} P$, $\xi$ ограничен на $M$ , если и только если $\xi \in \alpha_M^\vee$, и в этом случае минимальное значение $\xi$ на $M$ равно минимальному значению $\xi$ на $\operatorname{conv} P$. □

**9.2.4. Коасимптотический конус многогранника.** Пусть выпуклый многогранник

$$M = \{v \in V \mid b + Av \geqslant 0\} = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \ldots \cap H_{a_m}^+ \subset \mathbb{A}(V) \tag{9-11}$$

задан аффинными функционалами $a_i = b_i + \alpha_i$, где $b_i = a_i(0) \in \mathbb{R}$ и $\alpha_i = D_{a_i} \in V^*$. Двойственное к линейному отображению[1] $A : V \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto \big(\langle \alpha_1 , v \rangle, \langle \alpha_2 , v \rangle, \dots , \langle \alpha_m , v \rangle\big)$, отображение $A^* : \mathbb{R}^{m*} \to V^*$, $e_i^* \mapsto \alpha_i$, переводит стандартные базисные ковекторы $e_i^* \in \mathbb{R}^{m*}$ в линейные функционалы $\alpha_i = D_{a_i}$. Его ядро $\ker A^* \subset V^*$ состоит из всех *линейных соотношений*[2] между образующими $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ конуса $\alpha_M^\vee = \sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m} = A^*(\sigma_{e_1^*,e_2^*,\dots,e_m^*})$. Пересечение ядра $\ker A^*$ с положительным гипероктантом $\mathbb{R}^{m\,*}_{\geqslant 0}$ обозначается

$$\varkappa_M \overset{\text{def}}{=} \ker A^* \cap \mathbb{R}^{m\,*}_{\geqslant 0}$$

и называется *коасимптотическим конусом* многогранника $M$. Как и асимптотический конус, он никогда не пуст и зависит только от линейного отображения $A : V \to \mathbb{R}^m$, но не от вектора $b \in \mathbb{R}^m$ свободных членов функционалов $a_i$. Как мы уже отмечали, с точностью до параллельных переносов многогранник (9-11) зависит только от класса $[b]_{\operatorname{im} A} = b + \operatorname{im} A$ в фактор пространстве $\mathbb{R}^m / \operatorname{im} A$, которое канонически двойственно пространству $\ker A^*$, ибо[3]

$$(\ker A^*)^* \simeq \mathbb{R}^{m**} / \operatorname{Ann} \ker A^* = \mathbb{R}^m / \operatorname{im} A\,.$$

Таким образом, класс $[b]_{\operatorname{im} A}$ может рассматриваться как линейный функционал

$$[b]_{\operatorname{im} A} : \ker A^* \to \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \langle \xi , b \rangle.$$

Лемма 9.4
Двойственный к коасимптотическому конус $\varkappa_M^\vee \subset \mathbb{R}^m / \operatorname{im} A$ образован всеми такими классами $b + \operatorname{im} A \in \mathbb{R}^m / \operatorname{im} A$, что многогранник $M_b = \{v \in V \mid b + Av \geqslant 0\}$ не пуст.

Доказательство. Каждый вектор $v \in M$ удовлетворяет неравенствам $\langle e_i^* , b + Av \rangle \geqslant 0$ при всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Поэтому для любого ковектора $\xi = \sum y_i e_i^*$ с $y_i \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\langle \xi , b + Av \rangle = \sum_i y_i \langle e_i^* , b + Av \rangle \geqslant 0\,. \tag{9-12}$$

[1] См. n° 4.7 на стр. 69.
[2] В том смысле, что строка $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m*}$ лежит в $\ker A^*$, если и только если в пространстве $V^*$ выполняется равенство $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m = 0$.
[3] См. предл. 4.13 на стр. 68 и форм. (4-18) на стр. 69.

Если вдобавок $A^*\xi = 0$, то $\langle\, \xi\,,\, b + Av\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, b\,\rangle + \langle\, A^*\xi\,,\, v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, b\,\rangle$. Следовательно, при $M \neq \varnothing$ для всех $\xi \in \varkappa_M$ справедливо неравенство $\langle\, \xi\,,\, b\,\rangle \geqslant 0$, т. е. класс $[b]_{\mathrm{im}\,A}$ лежит в двойственном к коасимптотическому конусе $\varkappa_M^\vee$. Наоборот, если $[b]_{\mathrm{im}\,A} \notin \varkappa_M^\vee$, то по лемме Фаркаша[1] найдётся такой ковектор $\xi \in \varkappa_M$, что $\langle\, \xi\,,\, b\,\rangle < 0$, а значит, для всех $v \in V$

$$\langle\, \xi\,,\, b + Av\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, b\,\rangle < 0\,.$$

Поскольку для каждого вектора $v \in M$ выполняется противоположное неравенство (9-12), мы заключаем, что $M = \varnothing$. □

**9.3. Линейная оптимизация и двойственность Гейла.** Задача *линейной оптимизации*[2] заключается в отыскании тех точек выпуклого многогранника $M \subset \mathbb{A}(V)$, где данный линейный функционал $\xi : V \to \mathbb{R}$ принимает своё минимальное на многограннике $M$ значение. В самом общем случае многогранник $M = \{v \in V \mid b + Av \geqslant 0\} = \mathbb{A}(\ker A) \times M_{\mathrm{red}}$ является цилиндром[3] над приведённым[4] многогранником $M_{\mathrm{red}} = (b + \mathrm{im}\,A) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$, который с точностью до сдвига задаётся классом $[b]_{\mathrm{im}\,A} = b + \mathrm{im}\,A \in \mathbb{R}^m / \mathrm{im}\,A$. Если функционал $\xi$ ограничивается на векторное подпространство $\ker A \subset V$ в ненулевой ковектор на этом подпространстве, т. е. если $\xi \notin \mathrm{Ann}\ker A = \mathrm{im}\,A^* \subset V^*$, то $\xi$ не ограничен на $M = \mathbb{A}(\ker A) \times M_{\mathrm{red}}$ ни сверху, ни снизу. Поэтому задача линейной оптимизации может иметь решение только для функционалов вида $\xi = A^*\gamma$, где $\gamma \in \mathbb{R}^{m*}$. Такой функционал однозначно определяется классом

$$[\gamma]_{\ker A^*} = \gamma + \ker A^* \in \mathbb{R}^{m*} / \ker A^* = \mathbb{R}^{m*} / \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,A \simeq (\mathrm{im}\,A)^*$$

и имеет нулевое ограничение на векторное подпространство $\ker A \subset V$, а его минимум на цилиндре $M = \mathbb{A}(\ker A) \times M_{\mathrm{red}}$, буде он существует, достигается на цилиндре вида $\mathbb{A}(\ker A) \times \Gamma_\gamma$, где $\Gamma_\gamma \subset M_{\mathrm{red}}$ это множество тех точек, где достигает своего минимума на многограннике $M_{\mathrm{red}}$ ограничение функционала $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ на аффинное подпространство $b + \mathrm{im}\,A \subset \mathbb{R}^m$.

Таким образом, любая претендующая на наличие решения задача линейной оптимизации сводится к задаче оптимизации по приведённому многограннику. Последняя допускает следующую *стандартную формулировку*. Даны векторное подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ и классы

$$[b]_V = b + V \in \mathbb{R}^m / V \quad \text{и} \quad [\beta]_{\mathrm{Ann}\,V} = \beta + \mathrm{Ann}\,V \in \mathbb{R}^{m*} / \mathrm{Ann}\,V \simeq V^*\,. \tag{9-13}$$

Эти данные определяют приведённый выпуклый многогранник

$$M_b = (b + V) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0} \tag{9-14}$$

в ассоциированном с векторным пространством $V$ аффинном пространстве $b+V \subset \mathbb{R}^m$ и линейный функционал $\beta|_V : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle\, \beta\,,\, v\,\rangle$, на векторном пространстве $V$. Скажем, что точки $p, q \in b + V$ удовлетворяют неравенству[5] $\beta(p) \leqslant \beta(q)$, если $\langle\, \beta\,,\, \overrightarrow{pq}\,\rangle \geqslant 0$. Задача заключается в том, чтобы описать множество $\beta$-минимальных точек

$$\Gamma_\beta = \{p \in M_b \mid \forall q \in M_b\ \langle\, \beta\,, \overrightarrow{pq}\,\rangle \geqslant 0\}\,.$$

[1] См. лем. 9.2 на стр. 150.
[2] Или *линейного программирования*.
[3] См. предл. 9.1 на стр. 149 и опр. 8.7 на стр. 146.
[4] См. n° 9.1.3 на стр. 149.
[5] Обратите внимание, что сами *значения* функционала $\beta$ в точках $p$, $q$ при этом *не определены* корректно.

Например, если подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ задано как линейная оболочка столбцов

$$v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$$

какой-нибудь $m \times n$-матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$, вектор $b \in \mathbb{R}^m$ задан столбцом своих координат, а класс $\beta + \operatorname{Ann} V$ задан строкой $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ значений $\beta_i = \langle\, \beta\,,\, v_i\,\rangle$ ковектора $\beta$ на столбцах матрицы $A$, то стандартная задача линейной оптимизации заключается в описании всех тех решений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неоднородной системы линейных неравенств $b + Ax \geqslant 0$, т. е. системы

$$\begin{cases} \quad b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant 0 \\ \quad b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant 0 \\ \quad b_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \geqslant 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vdots\,\vdots\,\vdots \\ b_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant 0\,, \end{cases} \tag{9-15}$$

для которых число $\beta x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n \in \mathbb{R}$ имеет минимальное возможное значение.

С векторным подпространством $V \subset \mathbb{R}^m$ канонически связано[1] векторное подпространство $\operatorname{Ann} V \subset \mathbb{R}^{m*}$, и те же самые классы (9-13)

$$[\beta]_{\operatorname{Ann} V} = \beta + \operatorname{Ann} V \in \mathbb{R}^{m*} / \operatorname{Ann} V \quad \text{и} \quad [b]_V = b + V \in \mathbb{R}^m / V = \operatorname{Ann}^* V$$

задают лежащий в ассоциированном с $\operatorname{Ann} V$ аффинном пространстве $\beta + \operatorname{Ann} V \subset \mathbb{R}^{m*}$ выпуклый многогранник

$$M_\beta^\times = (\beta + \operatorname{Ann} V) \cap \mathbb{R}^{m\;*}_{\geqslant 0} \tag{9-16}$$

и линейный функционал $b|_{\operatorname{Ann} V} : \operatorname{Ann} V \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \langle\, \xi\,,\, b\,\rangle$, на векторном пространстве $\operatorname{Ann} V$. Многогранник (9-16) называется *двойственным по Гейлу* к многограннику (9-14), а задача описания множества $b$-минимальных точек многогранника $M_\beta^\times$, т. е. множества

$$\Gamma_b^\times = \{\xi \in M_\beta^\times \mid \forall \eta \in M_\beta^\times \; \langle \overrightarrow{\xi\eta}, b\rangle \geqslant 0\}\,,$$

называется *двойственной по Гейлу* стандартной задачей линейной оптимизации для векторного подпространства $V \subset \mathbb{R}^m$ и классов (9-13) .

Если, как в предыдущем примере, пространство $V \subset \mathbb{R}^m$ порождено столбцами $m \times n$-матрицы $A$, вектор $b \in \mathbb{R}^m$ задан столбцом своих координат, а класс $\beta + \operatorname{Ann} V$ представлен строкой значений функционала $\beta$ на столбцах матрицы $A$, то двойственная задача линейной оптимизации заключается в отыскании такого решения $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ неоднородной системы линейных уравнений $\xi A = \beta$, т. е. системы[2]

$$\begin{cases} \; a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \cdots + a_{m1}\xi_m = \beta_1 \\ \; a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{m2}\xi_m = \beta_2 \\ \; a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 + \cdots + a_{m3}\xi_m = \beta_3 \\ \qquad\qquad\quad \vdots\,\vdots\,\vdots \\ a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \cdots + a_{mn}\xi_m = \beta_n\,, \end{cases} \tag{9-17}$$

[1] См. n° 4.4.3 на стр. 64.

[2] Матрица коэффициентом которой транспонирована матрице коэффициентов системы (9-15).

что $\xi_i \geqslant 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и число $\xi c = \xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + \dots + \xi_m c_m$ имеет минимальное возможное значение.

Упражнение 9.7. Убедитесь в этом.

Для каждого непустого подмножества $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subsetneq \{1, 2, \dots, m\}$ обозначим через

$$\begin{aligned} H_I &= \operatorname{Ann}(e^*_{i_1}, e^*_{i_2}, \dots, e^*_{i_k}) = \bigoplus_{j \notin I} \mathbb{R} \cdot e_j \subset \mathbb{R}^m, \\ H^\times_I &= \operatorname{Ann}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = \bigoplus_{j \notin I} \mathbb{R} \cdot e^*_j \subset \mathbb{R}^{m*} \end{aligned} \tag{9-18}$$

линейные оболочки стандартных базисных векторов $e_j \in \mathbb{R}^m$ с $j \notin I$ и двойственных им базисных ковекторов $e^*_j \in \mathbb{R}^{m*}$ соответственно. Если множество минимальных точек $\Gamma_\beta \subset M_b$ функционала $\beta$ на многограннике $M_b$ непусто, то для любой точки $p \in \Gamma_\beta$ аффинный функционал $\beta_p : p + v \mapsto \langle \beta, v \rangle$ является опорным для многогранника $M_b$ и не зависит от выбора точки $p \in \Gamma_\beta$, поскольку из равенства $\langle \beta, \overrightarrow{pq} \rangle = 0$ для всех $p, q \in \Gamma_\beta$ вытекает равенство

$$\beta_q(r) = \langle \beta, \overrightarrow{qr} \rangle = \langle \beta, \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} \rangle = \langle \beta, \overrightarrow{pr} \rangle = \beta_q(r)$$

для всех $r \in b + V$. Тем самым, множество $\Gamma_\beta = M_b \cap H_{a_\beta}$ является гранью многогранника $M$ и по теор. 9.1 на стр. 147 имеет вид $\Gamma_I = H_I \cap M_b$ для некоторого непустого подмножества $I \subsetneq \{1, 2, \dots, m\}$.

Теорема 9.6
Многогранник $M_b \subset \mathbb{A}(V)$ не пуст тогда и только тогда, когда функционал $b$ достигает своего минимума на всех непустых двойственных по Гейлу многогранниках $M^\times_\beta \subset \mathbb{A}(\operatorname{Ann} V)$. В этом случае каждый функционал $\beta$, для которого $M^\times_\beta \neq \varnothing$, тоже достигает минимума на многограннике $M_b$, а множества $I$ и $J$ всех тех координат, что аннулируют грани $\Gamma_\beta = H_I \cap M_b$ и $\Gamma^\times_b = H^\times_J \cap M^\times_\beta$, где достигаются минимумы, покрывают всю линейку координат, т. е.

$$I \cup J = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Доказательство. Асимптотический конус многогранника $M_b = \{v \in V \mid c + u \geqslant 0\}$ высекается из подпространства $V \subset \mathbb{R}^m$ положительным гипероктантом:

$$\alpha_{M_b} = \{v \in V \mid v \geqslant 0\} = V \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}.$$

Поскольку двойственное к вложению $V \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ линейное отображение представляет собою эпиморфизм $\mathbb{R}^{m*} \twoheadrightarrow V^* = \mathbb{R}^{m*} / \operatorname{Ann} V$ с ядром $\operatorname{Ann} V$, коасимптотический конус многогранника $M_b$ совпадает с асимптотическим конусом двойственного по Гейлу многогранника:

$$\varkappa_{M_b} = \operatorname{Ann} V \cap \mathbb{R}^{m\,*}_{\geqslant 0} = \alpha_{M^\times_\beta}.$$

Заменяя здесь $M_b$ на $M^\times_\beta = \{\xi \in \operatorname{Ann} V \mid \beta + \xi \in \mathbb{R}^{m\,*}_{\geqslant 0}\}$, получаем двойственное равенство $\alpha_{M_b} = \varkappa_{M^\times_\beta}$. Теперь первые два утверждения теоремы следуют из сл. 9.6 на стр. 157 и лем. 9.4 на стр. 157. Если оба множества $\Gamma_\beta$ и $\Gamma^\times_b$ непусты, мы можем выбрать вектор $b \in \mathbb{R}^m$ внутри грани $\Gamma_\beta = \Gamma_I \subset M_b$, а ковектор $\beta \in \mathbb{R}^{m*}$ — внутри грани $\Gamma^\times_b = \Gamma_J \subset M^\times_\beta$. Тогда по теор. 9.1 на стр. 147

$$\langle e^*_k, b \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } k \in I \\ > 0 & \text{при } k \notin I \end{cases} \quad \text{и} \quad \langle \beta, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } k \in J \\ > 0 & \text{при } k \notin J, \end{cases}$$

а значение $\langle\, \beta\,,\, b\,\rangle$ является минимальным как для линейной формы $\beta$ на многограннике $M_b$, и для линейной формы $b$ на многограннике $M^{\times}_{\beta}$. Если имеется индекс $k \notin I \cap J$, то значение $\langle\, \beta\,,\, b\,\rangle > 0$, и его можно уменьшить, немного уменьшая $k$-тые координаты вектора $b$ и ковектора $\beta$ так, чтобы они продолжали оставаться внутри граней $\Gamma^{\times}_b$ и $\Gamma_{\beta}$. □

Следствие 9.7

Стандартная задача (9-15) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение двойственная ей стандартная задача (9-17), причём если $i$-тая координата какого-нибудь решения одной из этих задач ненулевая, то $i$-тая координата любого решения двойственной задачи нулевая.

**9.4. Симплекс-метод** эффективно решает задачу линейной оптимизации в случае, когда аффинное подпространство $b + V \subset \mathbb{R}^m$ описывается следующим набором данных:

(S1) разбиение $\{1, 2, \dots, m\} = I \sqcup J$ на состоящие из $\#J = n = \dim V$ и $\#I = k = m - n$ элементов подмножества, такие что $\mathbb{R}^m = V \oplus H_J$, где[1] $H_J = \bigcap\limits_{j\in J} \operatorname{Ann}(e^*_j)$,

(S2) базис пространства $V$, состоящий из векторов $v_j = e_j + u_j$, где $j \in J$ и $u_j \in H_J$, которые переводятся в стандартные базисные векторы $e_j \in H_I$ проекцией

$$\pi_J : \mathbb{R}^m = H_I \oplus H_J \twoheadrightarrow H_I \tag{9-19}$$

вдоль координатного подпространства $H_J$,

(S3) вектор $b = M \cap H_J \in \mathbb{R}^m$, являющийся вершиной многогранника $M = (b + V) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$.

Разбиение (S1) всегда существует, т. к. по лемме о замене[2] какие-нибудь $n = \dim V$ стандартных базисных векторов $e_j$ пространства $\mathbb{R}^m$ можно заменить векторами произвольного выбранного базиса $w_1, w_2, \dots, w_n$ пространства $V$ так, чтобы оставшиеся векторы $e_i$ вместе с векторами $w_j$ составили базис в $\mathbb{R}^m$. Последнее означает, что $V \cap H_J = 0$ и $V \oplus H_J = \mathbb{R}^m$.

Для любого разбиения вида (S1) проекция (9-19) изоморфно отображает подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ на координатную гиперплоскость $H_I$, порождённую стандартными базисными векторами $e_j \in \mathbb{R}^m$ с $j \in J$, и базисные векторы из (S2) суть прообразы векторов $e_j$ при этом изоморфизме. Тем самым, для любого разбиения (S1) базис (S2) существует и единствен.

Ограничения координатных функционалов $e^*_j$, $j \in J$, на подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ составляют двойственный к (S2) базис пространства $V^*$. Гиперплоскости $\operatorname{Ann} e^*_j$ с $j \in J$ суть координатные гиперплоскости пространства $V$ относительно базиса (S2). Так как они трансверсально пересекаются по нулевому вектору, пересечение $H_J \cap M$ либо пусто, либо является вершиной многогранника $M$ по теор. 9.1 на стр. 147. Таким образом, вектор $b \in \mathbb{R}^m$ тоже однозначно определяется разбиением (S1), если только существует[3].

[1] См. формулу (9-18) на стр. 160.

[2] См. лем. 4.2 на стр. 56.

[3] Существует он, вообще говоря, не для всякого разбиения (S1). Однако, любую задачу линейной оптимизации можно сравнительно легко переформулировать так, что вектор $b$, удовлетворяющий свойству (S3), тоже будет явно задан (примеры см. в n° 9.4.2 на стр. 167).

**9.4.1. Симплекс таблица.** Данные (S1) – (S3) принято записывать в виде так называемой *симплекс-таблицы* $T = \left(t_{ij}\right)$ размера $(k+1)\times(n+1)$, первая строка и первый столбец которой выделены и имеют нулевые номера, а все остальные клетки нумеруются по вертикали элементами множества $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, а по горизонтали — элементами множества $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$, причём эти элементы не предполагаются упорядоченными[1]. В клетки $t_{ij}$, отвечающие элементам $i \in I \sqcup 0$ и $j \in J \sqcup 0$, заносятся числа

$$\begin{aligned} &t_{00} = \langle\, \beta\,,\, b\,\rangle && t_{0j} = \langle\, \beta\,,\, v_j\,\rangle \quad (\text{при } j \in J) \\ &t_{i0} = \langle\, e_i^*\,,\, b\,\rangle \quad (\text{при } i \in I) && t_{ij} = \langle\, e_i^*\,,\, v_j\,\rangle \quad (\text{при } i \in I,\, j \in J) \end{aligned} \tag{9-20}$$

В развёрнутом виде симплекс-таблицу принято записывать следующим образом:

$$T = \begin{array}{|c|cccc|c} \hline \langle\, \beta\,,\, b\,\rangle & \langle\, \beta\,,\, v_{j_1}\,\rangle & \langle\, \beta\,,\, v_{j_2}\,\rangle & \cdots & \langle\, \beta\,,\, v_{j_n}\,\rangle & \\ \hline \langle\, e_{i_1}^*\,,\, b\,\rangle & \langle\, e_{i_1}^*\,,\, v_{j_1}\,\rangle & \langle\, e_{i_1}^*\,,\, v_{j_2}\,\rangle & \cdots & \langle\, e_{i_1}^*\,,\, v_{j_n}\,\rangle & i_1 \\ \langle\, e_{i_2}^*\,,\, b\,\rangle & \langle\, e_{i_2}^*\,,\, v_{j_1}\,\rangle & \langle\, e_{i_2}^*\,,\, v_{j_2}\,\rangle & \cdots & \langle\, e_{i_2}^*\,,\, v_{j_n}\,\rangle & i_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle\, e_{i_k}^*\,,\, b\,\rangle & \langle\, e_{i_k}^*\,,\, v_{j_1}\,\rangle & \langle\, e_{i_k}^*\,,\, v_{j_2}\,\rangle & \cdots & \langle\, e_{i_k}^*\,,\, v_{j_n}\,\rangle & i_k \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & j_1 & j_2 & \cdots & j_n & \end{array}\ . \tag{9-21}$$

Снизу и справа от таблицы проставлены элементы множеств $I$ и $J$, нумерующие соответствующие столбцы и строки таблицы[2]. В левом верхнем углу представлено значение функционала в вершине $b$. Мы собираемся минимизировать его, заменяя при необходимости вершину $b$ на другую, соединённую с $b$ ребром вершину, где значение функционала будет строго меньше. Для этого в остальных клетках верхней строки симплекс-таблицы написаны координаты ограничения линейной формы $\beta$ на подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ в двойственном к $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n}$ базисе пространства $V^*$. Клетки под горизонтальной чертой симплекс-таблицы суть столбцы $I$-координат векторов $b$ и $u_j = v_j - e_j$ с $j \in J$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^m$. Так как все $J$-координаты у векторов $b$ и $u_j$, $j \in J$, зануляются, симплекс таблица однозначно задаёт вектор $b \in \mathbb{R}^m$, базисные векторы $v_j = e_j + u_j$ векторного пространства $V \subset \mathbb{R}^m$ и аффинный функционал $b + v \mapsto \langle\, \beta\,,\, b + v\,\rangle$ на аффинном пространстве $b + V \subset \mathbb{R}^m$.

Неотрицательность всех коэффициентов справа от черты в верхней строке таблицы $T$, т. е. неравенства

$$t_{0j} = \langle\, \beta\,,\, v_j\,\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех } j \in J\,, \tag{9-22}$$

означают, что минимум линейного функционала $\beta|_V : V \to \mathbb{R}$ на конусе $\sigma_{v_1,v_2,\dots,v_n} \subset V$ равен нулю и достигается в вершине конуса. Поскольку многогранник $M$ лежит в аффинном конусе $b + \sigma_{v_1,v_2,\dots,v_n}$, вершина $b$ является $\beta$-минимальной точкой многогранника $M$, и минимальное значение ковектора $\beta \in \mathbb{R}^m$ на многограннике $(b+V) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ равно $\langle\, \beta\,,\, b\,\rangle = t_{00}$.

Если при каком-то $\nu \in J$ выполняется строгое неравенство $t_{0\nu} = \langle\, \beta\,,\, v_\nu\,\rangle < 0$, то значение функционала $\beta$ на конусе $\sigma_{v_1,v_2,\dots,v_n}$ строго убывает при движении вдоль ребра $v_\nu$. Зафиксируем один из таких элементов $\nu \in J$ и назовём соответствующий ему столбец таблицы $T$ *отмеченным*. Если все стоящие под чертою элементы в этом столбце неотрицательны, т. е.

$$t_{i\nu} = \langle\, e_i^*\,,\, v_\nu\,\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех } i \in I\,, \tag{9-23}$$

[1]Т. е. порядковые номера индексов $i \in I$ и $j \in J$ в базисе пространства $\mathbb{R}^m$ никак не коррелируют с положением клетки $t_{ij}$ относительно того или иного угла симплекс-таблицы.

[2]Подчеркну ещё раз, что порядок, в котором они стоят, произволен.

то луч $\{b+tv_\nu \mid t \geqslant 0\}$ целиком содержится в многограннике $M$, и функционал $\beta$ не ограничен на $M$ снизу. Если же под чертою в отмеченном столбце есть элементы $t_{i\nu} = \langle\, e_i^* \,,\, v_\nu \,\rangle < 0$, точка $b + tv_\nu$ лежит в многограннике $M$ только при $0 \leqslant t \leqslant t^*$, где

$$t^* = \min_{i \in I\,:\,t_{i\nu}<0} -t_{i0}\,/\,t_{i\nu} = -\langle\, e_i^* \,,\, b \,\rangle / \langle\, e_i^* \,,\, v_\nu \,\rangle\,. \tag{9-24}$$

Зафиксируем элемент $\mu \in I$, на котором достигается значение (9-24), и назовём отвечающую ему строку таблицы $T$ *отмеченной*. Пусть все координаты вектора $b$, стоящие в самом левом столбце таблицы $T$, строго положительны. Тогда в вершине $b$ пересекается в точности $n$ гиперграней многогранника[1] $M$, и эти гиперграни суть $\operatorname{Ann} e_j^*$ для $j \in J$, а исходящие из вершины $b$ рёбра многогранника направлены в точности вдоль векторов $v_j$. Точка

$$b' \stackrel{\text{def}}{=} b + t^* v_\nu = b - \frac{t_{\mu 0}}{t_{\mu\nu}} \cdot v_\nu \tag{9-25}$$

также является вершиной многогранника $M = M_{b'}$ и высекается гиперплоскостями $\operatorname{Ann} e_j^*$ с $j \in J \smallsetminus \nu$ и гиперплоскостью $\operatorname{Ann} e_\mu^*$, причём значение функционала $\beta$ в вершине $b'$ строго меньше, чем в $b$. Теперь мы можем заменить вершину $b$ на вершину $b'$, пересчитать симплекс-таблицу $T$ в новую симплекс-таблицу $T'$, аккумулирующую данные (S1) – (S3) для вершины $b'$, и повторить предыдущий анализ.

Новые множества $I' \stackrel{\text{def}}{=} \nu \cup (I \smallsetminus \mu)$ и $J' \stackrel{\text{def}}{=} \mu \cup (J \smallsetminus \nu)$ получаются из $I$ и $J$ перестановкой друг с другом элементов $\mu \in I$ и $\nu \in J$. Отвечающий новому разбиению $\{1,\, 2,\, \dots\,,\, m\} = I' \sqcup J'$ базис $v_1', v_2', \dots, v_n'$ пространства $V$ состоит из векторов вида $v_{j'}' = e_{j'} + u_{j'}'$, где $j' \in J'$ и $u_j' \in H_{J'}$. Очевидно, что таковыми являются векторы

$$\begin{aligned}
v_\mu' &= \frac{1}{t_{\mu\nu}} v_\nu = e_\mu + \frac{1}{t_{\mu\nu}} e_\nu + \sum_{i \neq \mu,\nu} e_i \cdot \frac{t_{i\nu}}{t_{\mu\nu}} && (\text{при } j' = \mu)\\
v_j' &= v_j - \frac{t_{\mu j}}{t_{\mu\nu}} v_\nu = e_j - \frac{t_{\mu j}}{t_{\mu\nu}} e_\nu + \sum_{i \neq \mu,\nu} \left( t_{ij} - \frac{t_{i\nu} t_{\mu j}}{t_{\mu\nu}} \right) \cdot e_i && (\text{при } j' = j \neq \mu, \nu)\,.
\end{aligned} \tag{9-26}$$

Функционал $\beta$ принимает на них значения

$$\begin{aligned}
\langle\, \beta \,,\, v_\mu' \,\rangle &= \frac{1}{t_{\mu\nu}} \langle\, \beta \,,\, v_\nu \,\rangle = \frac{t_{0\nu}}{t_{\mu\nu}} && (\text{при } j' = \mu)\\
\langle\, \beta \,,\, v_j' \,\rangle &= \langle\, \beta \,,\, v_j \,\rangle - \frac{t_{\mu j}}{t_{\mu\nu}} \langle\, \beta \,,\, v_j \,\rangle = t_{0j} - \frac{t_{0\nu} t_{\mu j}}{t_{\mu\nu}} && (\text{при } j' = j \neq \mu, \nu)\,.
\end{aligned} \tag{9-27}$$

Вершина $b' = b - t_{\mu 0} v_\nu \,/\, t_{\mu\nu}$ имеет $I'$-координаты

$$\langle\, e_{i'}^* \,,\, b' \,\rangle = \begin{cases} -t_{\mu 0}\,/\,t_{\mu\nu} & \text{при } i' = \nu \\ t_{i0} - t_{i\nu} t_{\mu 0}\,/\,t_{\mu\nu} & \text{при } i' = i \neq \mu, \nu \end{cases} \tag{9-28}$$

и $\langle\, \beta \,,\, b' \,\rangle = \langle\, \beta \,,\, b \,\rangle - t_{\mu 0} \langle\, \beta \,,\, v_\nu \,\rangle / t_{\mu\nu} = t_{00} - t_{\mu 0} t_{0\nu} \,/\, t_{\mu\nu} > t_{00}$. Таким образом, элементы симплекс таблицы $T'$ выражаются через элементы симплекс-таблицы $T$ по формулам

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu}' &= \frac{1}{t_{\mu\nu}} & t_{\nu j}' &= -\frac{t_{\mu j}}{t_{\mu\nu}} \quad \text{при } j \neq \mu, \nu\\
t_{i\mu}' &= \frac{t_{i\nu}}{t_{\mu\nu}} \quad \text{при } i \neq \mu, \nu & t_{ij}' &= t_{ij} - \frac{t_{i\nu} t_{\mu j}}{t_{\mu\nu}} \quad \text{при } i, j \neq \mu, \nu\,.
\end{aligned} \tag{9-29}$$

[1] Такие вершины называются *симплициальными*. Например, у додекаэдра и куба все вершины симплициальны, а у октаэдра и икосаэдра — нет.

Если записать отвечающий элементу $\mu \in J'$ столбец таблицы $T'$ на место отмеченного столбца таблицы $T$, а отвечающую элементу $\nu \in I'$ строку таблицы $T'$ на место отмеченной строки таблицы $T$, то правило пересчёта таблицы можно сформулировать так:

- элемент в клетке $(\mu, \nu)$ заменяется на обратный
- все остальные элементы отмеченного столбца делятся на $t_{\mu\nu}$
- все остальные элементы отмеченной строки делятся на $-t_{\mu\nu}$
- из каждого элемента $t_{ij}$, расположенного вне отмеченных строки и столбца, вычитается делённое на $t_{\mu\nu}$ произведение двух элементов, расположенных в отмеченной строке и в отмеченном столбце на той же вертикали и на той же горизонтали, что и элемент $t_{ij}$.

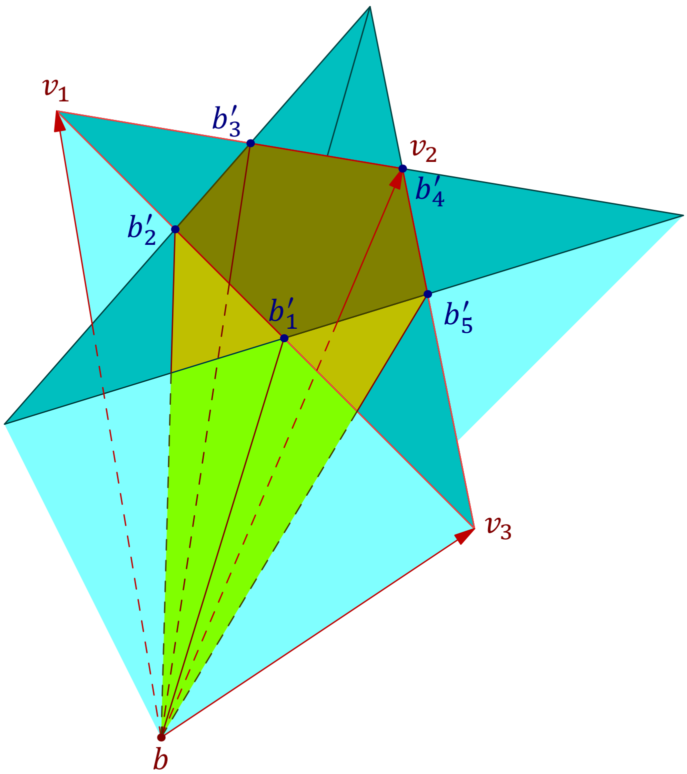


**Рис. 9◇3.** Рёбра $v_1$ и $v_3$ симплициального конуса $b + \sigma_{v_1,v_2,v_3}$ не являются рёбрами пятигранного угла многогранника $M$ при вершине $b$.

Если вершина $b$ не симплициальная, т. е. в самом левом столбце таблицы $T$ под чертою встречаются элементы $t_{i0} = \langle e_i^*, b \rangle = 0$, то кроме координатных гиперплоскостей $\operatorname{Ann} e_j^*$ с $j \in J$ через вершину $b$ проходят ещё и все те гиперплоскости $\operatorname{Ann} e_i^*$, для которых $t_{i0} = 0$. Если в пересечении отвечающей такому элементу $i$ строки с отмеченным столбцом стоит отрицательное число $t_{i\nu} < 0$, мы получим в (9-24) значение $t^* = 0$. Это говорит о том, что ребро $b + v_\nu t$ симплициального конуса $b + \sigma_{v_1,v_2,\dots,v_n}$ не является ребром многогранника $M$, как это происходит, к примеру, с рёбрами $v_1$ и $v_3$ на рис. 9◇3, где в вершине $b$ сходится сразу пять граней трёхмерного многогранника. В этом случае всё равно следует обменять элемент $\nu \in J$ с одним из тех элементов $\mu \in I$, для которых $t_{\mu\nu} < 0$, а $t_{\mu 0} = 0$. При этом в координатном симплексе при вершине $b$ гиперплоскость $\operatorname{Ann} e_\nu^*$ заменится на гиперплоскость $\operatorname{Ann} e_\mu^*$, и мы получим другой набор из $n$ трансверсально пересекающихся в вершине $b$ гиперграней многогранника. Поскольку каждое выходящее из вершины $b$ ребро многогранника является ребром симплициального конуса, образованного какими-нибудь $n$ трансверсально пересекающимися в вершине $b$ гипергранями многогранника $M$, перебрав все такие конусы, мы либо убедимся, что вдоль всех выходящих из вершины $b$ рёбер функционал $\beta$ не убывает, а значит, его значение в вершине $b$ минимальное на многограннике $M$, либо отыщем такое ребро, вдоль которого $\beta$ убывает, и тогда мы либо сможем перейти в другую вершину $b'$ с $\langle \beta , b' \rangle < \langle \beta , b \rangle$, либо убедимся, что функционал $\beta$ не ограничен снизу на многограннике $M$.

Чтобы избежать зацикливания при переборе координатных симплексов с вершиной в $b$, введём на множестве строк таблицы $T$ *лексикографический порядок*, при котором строка $\tau'$ лексикографически меньше строки $\tau''$, что записывается как $\tau' \underset{\text{lex}}{<} \tau''$, если самый левый из не совпадающих элементов этих строк меньше в строке[1] $\tau'$. Кроме того, помимо условий (S1) – (S3) наложим на таблицу $T$ дополнительное условие

(S4) каждая стоящая под горизонтальной чертою симплекс-таблицы $T$ строка

$$\tau_i = \left(t_{i0} \,|\, t_{i1}, t_{i2}, \dots , t_{in}\right) , \quad \text{где} \quad i \in I ,$$

*лексикографически положительна*, т. е. самый левый её ненулевой элемент больше нуля.

Это условие автоматически выполнено в любой симплициальной вершине $b$, поскольку для такой вершины $t_{i0} = \langle e_i^* , b \rangle > 0$ при всех $i \in I$.

Упражнение 9.8. Убедитесь, что для произвольных строк $\tau$, $\tau'$, $\tau''$ и положительного числа $x \in \mathbb{R}$ имеют место импликации

$$x\tau' \underset{\text{lex}}{\leqslant} x\tau'' \iff \tau' \underset{\text{lex}}{\leqslant} \tau'' \iff \tau' + \tau \underset{\text{lex}}{\leqslant} \tau'' + \tau$$
$$\tau' \underset{\text{lex}}{\leqslant} \tau'' \iff -\tau' \underset{\text{lex}}{\geqslant} -\tau'' .$$

Если отмеченный столбец $\nu \in J$ таблицы $T$ уже выбран, в качестве отмеченной строки таблицы $T$ выберем ту строку $\tau_\mu$, у которой $t_{\mu\nu} < 0$ и отношение $-\tau_\mu / t_{\mu\nu}$ лексикографически минимально среди всех отношений

$$-\frac{\tau_i}{t_{i\nu}} = \left(-\frac{t_{i0}}{t_{i\nu}} \,\middle|\, -\frac{t_{i1}}{t_{i\nu}}, -\frac{t_{i2}}{t_{i\nu}}, \dots , -\frac{t_{in}}{t_{i\nu}}\right) \tag{9-30}$$

соответствующих элементам $i \in I$ с $t_{i\nu} < 0$. Обратите внимание, что это делает выбор элемента $\mu \in I$ однозначным.

Лемма 9.5
Если симплекс таблица $T$ удовлетворяет условиям (S1) – (S4) и в ней имеются элементы $t_{0\nu} < 0$ и $t_{i\nu} < 0$, то преобразованная по указанным выше правилам симплекс-таблица $T' = \left(t'_{ij}\right)$ тоже удовлетворяет условиям (S4) – (S4), а её верхняя строка $\tau'_0$ строго лексикографически меньше верхней строки $\tau_0$ таблицы $T$.

[1] Например, $(0, 1, 10, 5) \underset{\text{lex}}{<} (0, 2, -1, 0)$.

Доказательство. Свойства (S1) – (S3) очевидным образом наследуются при преобразовании симплекс таблицы. Далее, из формул (9-26) вытекает, что строки $\tau'_{i'}$ таблицы $T'$ выражаются через строки $\tau_i$ таблицы $T$ по правилам

$$\begin{aligned}\tau'_\nu &= -t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu + \left(t_{\mu\nu}^{-1} - 1\right)\delta_\nu \qquad &&(\text{при } i' = \mu)\\ \tau'_i &= \tau_i - t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu + t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\delta_\nu\,, &&(\text{при } i' = i \neq \mu, \nu)\,,\end{aligned}$$

где через $\delta_\nu$ обозначена строка, содержащая 1 в отмеченном столбце и нули во всех остальных местах. Поскольку $t_{\mu\nu} < 0$, но при этом $\tau_\mu \underset{\text{lex}}{>} 0$ по свойству (S4), отмеченная строка содержит положительный элемент, стоящий строго левее отмеченного столбца. Поэтому $\tau'_\nu \underset{\text{lex}}{>} 0$, и при $i \neq \mu, \nu$ и $t_{i\nu} \geqslant 0$ выполняется неравенство $-t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu + t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\delta_\nu \underset{\text{lex}}{\geqslant} 0$, из которого $\tau'_i \underset{\text{lex}}{\geqslant} \tau_i \underset{\text{lex}}{>} 0$. При $i \neq \mu, \nu$ и $t_{i\nu} < 0$ в силу выбора $\mu$ выполняется неравенство $-t_{i\nu}^{-1}\tau_i \underset{\text{lex}}{>} -t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu$. Значит, $\tau_i - t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu \underset{\text{lex}}{>} 0$ и самый левый положительный элемент этой разности стоит строго левее отмеченного столбца. Поэтому при добавлении к этой разности любой кратности строки $\delta_\nu$ она останется строго положительной. Тем самым, $\tau'_{i'} \underset{\text{lex}}{>} 0$ при всех $i' \in I'$. Поскольку $t_{0\nu}t_{\mu\nu}^{-1} > 0$ и $\tau_\mu \underset{\text{lex}}{>} \delta_\nu$, верхняя строка $\tau'_0 = \tau_0 - t_{0\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\left(\tau_\mu - \delta_\nu\right) \underset{\text{lex}}{>} \tau_0$. □

Теорема 9.7

Если начальная таблица $T$ удовлетворяет условиям (S1) – (S4), то после конечного числа преобразований получится либо таблица, в которой все $t_{0j} \geqslant 0$, и тогда значение функционала $\beta$ достигает в вершине $b$ своего минимума на многограннике $M$, либо таблица, в которой $t_{0\nu} < 0$ и $t_{i\nu} \geqslant 0$ для всех $i \in I$ при некотором $\nu \in J$, и тогда функционал $\beta$ не ограничен снизу на многограннике $M$.

Доказательство. Поскольку симплекс-таблица однозначно определяется разбиением (S1) и таких разбиений конечное число, обеспечиваемый предыдущей леммой перебор симплекс-таблиц, удовлетворяющих условиям (S1) – (S4), при котором верхняя строка таблицы строго лексикографически убывает, в конце концов приведёт к выполнению одного из двух перечисленных в теореме альтернативных условий, запрещающих применение лем. 9.5. □

Замечание 9.2. (о симплициальных многогранниках) Приведённый многогранник $M \subset \mathbb{A}(V)$ называется *симплициальным*, если все его вершины симплициальны, т. е. все исходящие из любой вершины рёбра образуют базис векторного пространства $V$. Непустой многогранник

$$M_b = (b + V) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$$

симплициален тогда и только тогда, когда класс $[b]_V \in \mathbb{R}^m/V$ не лежит в объединении конечного числа координатных гиперплоскостей $(V + \operatorname{Ann} e_i^*)/V \subset \mathbb{R}^m/V$, где $i$ пробегает объединение дополнений ко всем таким подмножествам $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$, что $\mathbb{R}^m = V \oplus H_J$. В самом деле, такой класс $[b]$ при любом удовлетворяющем условиям (S1) – (S3) разбиении координат пространства $\mathbb{R}^m$ задаст вершину $b \in M$, все координаты которой ненулевые. Таким образом, натолкнуться на несимплициальный многогранник в реальных «производственно-бытовых» задачах линейной оптимизации практически невероятно. Поэтому при программировании вычислений для ускорения работы можно исключить из описанного выше алгоритма лексикографическое сравнение строк при выборе отмеченной строки $\mu$, заменив его разумным ограничением на число итераций и малым шевелением начальных данных в случае, когда зацикливание паче чаяния случится.

**9.4.2. Решение стандартной задачи.** Опыт показывает, что любая задача линейной оптимизации сравнительно легко переформулируется так, что выполняются условия (S1) – (S4). Рассмотрим, к примеру, стандартную задачу (9-17), где для заданного столбца $c \in \mathbb{R}^n$ требуется найти такое решение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \vdots\,\vdots\,\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k\,, \end{cases} \tag{9-31}$$

что все $x_i \geqslant 0$ и число $xc = x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n$ имеет минимальное возможное значение. Меняя при необходимости знаки в обеих частях уравнений, добьёмся того, чтобы все строки $(-b_i, a_1, a_2, \dots, a_n)$ стали лексикографически положительны. Введём дополнительные переменные $y_1, y_2, \dots, y_k$ по формулам

$$\begin{aligned} y_1 &= -b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= -b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ y_3 &= -b_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \\ &\qquad\qquad \vdots\,\vdots\,\vdots \\ y_k &= -b_k + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{aligned}$$

и рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{k+n}$ с координатами $(y_1, y_2, \dots, y_k, x_1, x_2, \dots, x_n)$ подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$, порождённое векторами $v_j = e_j + u_j$, где $e_j \in \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, суть стандартные базисные векторы, двойственные ковекторам $x_j = e_j^*$, а векторы $u_j$ имеют координаты $\langle\, y_i\,,\, u_j\,\rangle = a_{ij}$ при $1 \leqslant i \leqslant k$ и $\langle\, x_\ell\,,\, u_j\,\rangle = 0$ при $1 \leqslant \ell \leqslant n$. Многогранник $M = (-b + V) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ удовлетворяет условиям (S1) – (S4) для разбиения $I \sqcup J$, в котором множество $I$ нумерует дополнительные координаты $y_i$, а множество $J$ нумерует исходные координаты $x_j$. Пересечение $M' = M \cap H_I$ многогранника $M$ с координатной гиперплоскостью $H_I = \operatorname{Ann}(y_1, y_2, \dots, y_k)$ состоит из точек, $J$-координаты которых $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ как раз и являются решениями системы (9-31), лежащими в положительном октанте $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$. Рассмотрим ковектор

$$\beta = G \cdot \Big(\sum_i y_i\Big) + \sum_j c_j x_j \in \mathbb{R}^{m*}\,, \tag{9-32}$$

где $G \gg 0$ это фиксированное *очень* большое положительное число. Покажем, что задача минимизации этого функционала на многограннике $M$, которую можно решить симплекс-методом, эквивалентна исходной задаче (9-31).

Если функционал $\beta$ достигает своего минимума в такой вершине $b'$, что $y_i(b') > 0$ для какого-то $i$, то многогранник $M'$ пуст, поскольку в противном случае для любой точки $z \in M'$ при $G \gg 0$ выполнялось бы неравенство $\beta(b') > \beta(z)$, т. к. все $y_\nu(z) = 0$. Тем самым, в этом случае задача (9-31) не имеет решений.

Если функционал $\beta$ достигает минимума в такой вершине $b' \in M$, где все $y_i(b') = 0$, то $b' \in M'$ и функционал $\sum_j c_j x_j$ достигает своего минимума при $x_i = x_i(b')$. Эта точка решает задачу (9-31).

Если функционал $\beta$ не ограничен на $M$ снизу, то ковектор (9-32) не принадлежит конусу $\alpha_M^\vee \subset V^*$, двойственному к асимптотическому конусу многогранника $M$. Конус $\alpha_M^\vee$ является выпуклой оболочкой конуса $\sigma_{M'}^\vee$, порождённого ограничениями координатных функционалов $x_i$ на подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$, и конуса, порождённого ограничениями на $V$ функционалов $y_i$. Так как первое слагаемое в (9-32) принадлежит второму из этих конусов, неограниченность функционала $\beta$ снизу на многограннике $M$ означает, что $\sum_j c_j x_j \notin \alpha_{M'}^\vee$. Поэтому при $M' \neq \varnothing$ форма $\sum_j c_j x_j$ не ограничена снизу на $M'$.

Наконец, определить, пуст многогранник $M'$ или нет, можно найдя минимум заведомо ограниченного снизу функционала $G \cdot \left(\sum_i y_i\right) \in \alpha_M^\vee$ на многограннике $M$. Если он достигается в вершине $b' \notin \operatorname{Ann}(y_1, y_2, \dots, y_k)$, то $M' = \varnothing$. А если в такой вершине $b' \in M$, где все $y_\nu(b') = 0$, то $b' \in M'$.

Пример 9.3 (принадлежность вектора конусу)
Выясним, лежит ли вектор $w = (4, 14, -9, -22)$ в порождённом векторами

$$\begin{aligned} &v_1 = (-1, 2, 3, 5) && v_3 = (2, 0, -4, -3) && v_5 = (0, -3, 2, 0) \\ &v_2 = (3, 2, -1, -6) && v_4 = (-3, 2, 1, 1) && v_6 = (1, 1, -2, -3)\,, \end{aligned}$$

конусе $\sigma_{v_1,\dots,v_6} \subset \mathbb{R}^4$, т. е. имеет ли система уравнений $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_6 v_6$ решение $(x_1, x_2, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6_{\geqslant 0}$. В развёрнутом виде эта система выглядит как

$$\begin{cases} 4 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_6 \\ 14 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 \\ -9 = 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 - 2x_6 \\ -22 = 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_6 \end{cases} \tag{9-33}$$

Умножим обе части первых двух уравнений на $-1$, чтобы левые части стали отрицательны:

$$\begin{cases} -4 = x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_6 \\ -14 = -2x_1 - 2x_2 - 2x_4 + 3x_5 - x_6 \\ -9 = 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 - 2x_6 \\ -22 = 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_6 \end{cases}$$

Теперь перенесём константы слева направо и заменим нули в левой части на новые переменные

$$\begin{aligned} x_7 &= 4 + x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_6 \\ x_8 &= 14 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 + 3x_5 - x_6 \\ x_9 &= 9 + 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 - 2x_6 \\ x_{10} &= 22 + 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_6 \end{aligned} \tag{9-34}$$

Уравнения (9-34) задают в $\mathbb{R}^{10}$ шестимерное аффинное подпространство $b + V \subset \mathbb{R}^{10}$, удовлетворяющее условиям (S1) – (S4) для

$$I = \{7, 8, 9, 10\}\,, \quad J = \{1, 2, \dots, 6\}\,, \quad b = (0, \dots, 0, 4, 14, 9, 22)\,.$$

Система (9-33) имеет решение в $\mathbb{R}^6_{\geqslant 0}$, если и только если для произвольно зафиксированного *очень* большого числа $G \gg 0$ линейный функционал

$$\begin{aligned} \beta(x_1, x_2, \dots, x_{10}) &= G \cdot (x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}) = \\ &= 10G + G\,x_1 - 10\,G\,x_2 - G\,x_3 + G\,x_4 + 5\,Gx_5 - 3G\,x_6\,, \end{aligned} \tag{9-35}$$

достигает своего минимума на многограннике $M = (b+V)\cap\mathbb{R}^{10}_{\geqslant 0}$ в такой вершине $b'$, у которой $x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0$. Равенства (9-34) и (9-35) собираются в симплекс-таблицу

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 49 | 7 | −12 | −9 | 3 | 1 | −7 | $G$ |
| 4 | 1 | −3 | −2 | 3 | 0 | −1 | 7 |
| 14 | −2 | −2 | 0 | −2 | 3 | −1 | 8 |
| 9 | 3 | −1 | −4 | 1 | −2 | −2 | 9 |
| 22 | 5 | −6 | −3 | 1 | 0 | −3 | 10 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |

(9-36)

где в верхней строчке написаны только коэффициенты при $G$ у значений $\langle\, \beta\,,\, b\,\rangle$ и $\langle\, b\,,\, e_j\,\rangle$ функционала $\beta$ на векторах $b$ и $e_j$, $j \in J$.

Упражнение 9.9. Покажите, что коэффициент при $G$ в каждом столбце симплекс-таблицы равен сумме всех стоящих под чертою элементов этого столбца.

Снизу и справа от таблицы подписаны элементы множеств $I$, $J$ соответствующие тем строкам и столбцам, напротив которых они стоят. Отметим столбец, отвечающей координате «2». Все элементы в нём отрицательны, и минимум отношений

$$-\frac{t_{1,0}}{t_{1,2}} = \frac{4}{3}\,, \quad -\frac{t_{2,0}}{t_{2,2}} = 7\,, \quad -\frac{t_{3,0}}{t_{3,2}} = 9\,, \quad -\frac{t_{4,0}}{t_{4,2}} = \frac{22}{6}$$

достигается в строке, отвечающей координате «7». Таким образом, мы должны перейти к новому разбиению координат на подмножества $I' = \{2, 8, 9, 10\}$ и $J' = \{1, 7, 3, 4, 5, 6\}$. Его симплекс таблица вычисляется по правилам со стр. 163 и имеет вид

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 3 | 4 | −1 | −9 | 1 | −3 | $G$ |
| 4/3 | 1/3 | −1/3 | −2/3 | 1 | 0 | −1/3 | 2 |
| 34/3 | −8/3 | 2/3 | 4/3 | −4 | 3 | −1/3 | 8 |
| 23/3 | 8/3 | 1/3 | −10/3 | 0 | −2 | −5/3 | 9 |
| 14 | 3 | 2 | 1 | −5 | 0 | −1 | 10 |
| | 1 | 7 | 3 | 4 | 5 | 6 | |

(9-37)

Элемент $(2, 7)$ в этой таблице обратен элементу $(7, 2)$ из предыдущей, отличные от $(2, 7)$ элементы столбца «7» в (9-37) получаются делением соответствующих элементов столбца «2» таблицы (9-36) на её элемент $(7, 2)$, тогда как отличные от $(2, 7)$ элементы строки «2» в (9-37) суть взятые с противоположным знаком отношения элементов строки «7» таблицы (9-36) к её элементу $(7, 2)$. Все остальные клетки таблицы (9-37) получаются из клеток таблицы (9-36) по правилу прямоугольника: например, для клетки $(9, 3)$

$$t'_{9,3} = t_{9,3} - \frac{t_{7,3}t_{9,2}}{t_{7,2}} = -4 - \frac{-1\cdot(-2)}{-3} = -4 + \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}\,.$$

Отмечаем таблице (9-37) столбец, соответствующий координате «4». В нём два отрицательных элемента, и меньшее из отношений $-t_{8,0}/t_{8,4} = 17/6$, $-t_{10,0}/t_{10,4} = 14/5$ стоит в строке «10». Меняя друг с другом индексы «4» и «10» по правилам со стр. 163, получаем таблицу

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 39/5 | −12/5 | 2/5 | −14/5 | 9/5 | 1 | −6/5 | $G$ |
| 62/15 | 14/15 | 1/15 | −7/15 | −1/5 | 0 | −8/15 | 2 |
| 2/15 | −76/15 | −14/15 | 8/15 | 4/5 | 3 | 7/15 | 8 |
| 23/3 | 8/3 | 1/3 | −10/3 | 0 | −2 | −5/3 | 9 |
| 14/5 | 3/5 | 2/5 | 1/5 | −1/5 | 0 | −1/5 | 4 |
| | 1 | 7 | 3 | 10 | 5 | 6 | |

Отмечаем столбец «1». В нём есть лишь один отрицательный элемент, в строке «8». Меняя элементы «1» и «8», получаем следующую таблицу:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 147/19 | 9/19 | 16/19 | −58/19 | 27/19 | −8/19 | −27/19 | $G$ |
| 79/19 | −7/38 | −2/19 | −7/19 | −1/19 | 21/38 | −17/38 | 2 |
| 1/38 | −15/76 | −7/38 | 2/19 | 3/19 | 45/76 | 7/76 | 1 |
| 147/19 | −10/19 | −3/19 | −58/19 | 8/19 | −8/19 | −27/19 | 9 |
| 107/38 | −9/76 | 11/38 | 5/19 | −2/19 | 27/76 | −11/76 | 4 |
| | 8 | 7 | 3 | 10 | 5 | 6 | |

Отмечаем столбец «3». В нём два отрицательных элемента, и меньшее из отношений

$$-\frac{t_{2,0}}{t_{2,3}} = \frac{79}{7} \quad \text{и} \quad -\frac{t_{9,0}}{t_{9,3}} = \frac{147}{58}$$

стоит в строке «9». Меняя «3» и «9», получаем заключительную таблицу

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $G$ |
| 187/58 | −7/58 | −5/58 | 7/58 | −3/29 | 35/58 | −8/29 | 2 |
| 17/58 | −25/116 | −11/58 | −1/29 | 5/29 | 67/116 | 5/116 | 1 |
| 147/58 | −5/29 | −3/58 | −19/58 | 4/29 | −4/29 | −27/58 | 3 |
| 101/29 | −19/116 | 8/29 | −5/58 | −2/29 | 37/116 | −31/116 | 4 |
| | 8 | 7 | 9 | 10 | 5 | 6 | |

которая показывает, что функционал $\beta$ достиг своего минимума в вершине с координатами

$$x_2 = 187/58\,, \quad x_1 = 17/58\,, \quad x_3 = 147/58\,, \quad x_4 = 101/29$$

и нулевыми остальными координатами. Таким образом,

$$w = \frac{187}{58}\, v_2 + \frac{17}{58}\, v_1 + \frac{147}{58}\, v_3 + \frac{101}{29}\, v_4\,.$$

Упр. 9.3. Если $w = (1, v) \in M$, то $\langle \beta_i , w \rangle = b_i + \langle \alpha_i , v \rangle = a_i(v) \geqslant 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Поэтому все лучи $[0, w)$ с $w \in M$ лежат в конусе $\pi_M = \bigcap \beta_i^+$, а значит и замыкание их объединения тоже содержится в $\pi_M$. Наоборот, пусть $w = (t, v) \in \pi_M$. Если $t \neq 0$, то вектор $w/t = (1, v/t) \in \pi_M \cap H_{t-1} = M$, т. е. луч $[0, w)$ пересекает многогранник $M$. Если $t = 0$, то для любых точки $p = (1, u) \in M \subset \pi_M$ и числа $s \in [1, 0)$ точка $w_s = (1-s)w + sp = \big(s, (1-s)v + su\big) \in \pi_M$ по уже доказанному лежит на пересекающем многогранник $M$ луче $[0, w_s)$, и $\lim\limits_{s \to 0} w_s = w$.

Упр. 9.4. Всякая выпуклая комбинация $\sum \lambda_i p_i$, где все $p_i \in P$, $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum \lambda_i = 1$, лежит в конусе $\sigma_P$. Наоборот, для любого ненулевого вектора $w = \sum y_i p_i \in \sigma_P$ все $y_i \geqslant 0$ и $\langle t , w \rangle = \sum y_i > 0$. Поэтому пересечение луча $[0, w)$ с гиперплоскостью $t = 1$ происходит в точке $w / \langle t , w \rangle = \sum p_i \cdot y_i / (y_1 + \dots + y_k)$, являющейся выпуклой комбинацией точек $p_i$.

Упр. 9.5. Четырёхгранный конус в $\mathbb{R}^3$, порождённый векторами

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3\,, \quad v_2 = e_1 + e_2 - e_3\,, \quad v_3 = e_1 - e_2 - e_3\,, \quad v_4 = e_1 - e_2 + e_3\,,$$

не имеет двумерной грани, порождённой векторами $v_1$ и $v_3$.

Упр. 9.6. Конус $-\sigma^\vee_{R^\vee_\Gamma} = \{v \in V \mid \forall \psi \in \sigma_{R^\vee_\Gamma}\ \langle \psi , v \rangle \leqslant 0\}$. Для любых $v \in \sigma_R$ и $\psi \in \sigma_R^\vee$ неравенство $\langle \psi , v \rangle \leqslant 0$ равносильно равенству $\langle \psi , v \rangle = 0$. Поэтому $\sigma \cap -\sigma^\vee_{R^\vee_\Gamma} = \sigma \cap H_\Gamma = \Gamma$.

Упр. 9.7. Ковектор $z = y_1 e_1^* + y_2 e_2^* + \dots + y_m e_m^* \in \mathbb{R}^{m\,*}_{\geqslant 0}$ лежит в аффинном подпространстве

$$\beta + \operatorname{Ann} V \subset \mathbb{R}^{m*}\,,$$

если и только если для каждой образующей $v_j$ векторного подпространства $V = \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} V \subset \mathbb{R}^m$ выполняется равенство $\langle z , v_j \rangle = \langle \beta , v_j \rangle$, правая часть которого равна $\beta_j$, а левая часть в развёрнутом виде выглядит как $\sum_{i=1}^m z_i \cdot \langle e_i^* , v_j \rangle = \sum_{i=1}^m z_i a_{ij}$ и совпадает с $j$-той координатой строки $zA$.