§8. Топологии, метрики, нормы и выпуклость

8.1. Топологические пространства. Многие определения из анализа сохраняют смысл в очень широком контексте, если формулировать их не на языке неравенств между числами, а на языке окрестностей точек и вложенности таковых окрестностей друг в друга. Формализуется это следующим образом.

Определение 8.1 (топология в терминах открытых множеств)
Топология на множестве X это такое множество наречённых *открытыми* подмножеств в X, что

1) несобственные подмножества $\varnothing$ и X открыты
2) пересечение любых двух открытых подмножеств открыто
3) объединение любого множества открытых подмножеств открыто.

Множество X вместе с некоторой зафиксированной на нём топологией называется *топологическим пространством*. Дополнительные подмножества $Z = X \smallsetminus U$ к открытым подмножествам $U \subset X$ называются *замкнутыми*. Множества всех открытых и всех замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначаются через $\mathcal{U}(X)$ и $\mathcal{Z}(X)$ соответственно. Определение топологии эквивалентным образом формулируется и в терминах замкнутых подмножеств.

Определение 8.2 (топология в терминах замкнутых множеств)
Топология на множестве X это такое множество наречённых *замкнутыми* подмножеств в X, что

1) несобственные подмножества $\varnothing$ и X замкнуты
2) объединение любых двух замкнутых подмножеств замкнуто
3) пересечение любого множества замкнутых подмножеств замкнуто.

Если принять второе определение, то *открытыми* подмножествами топологического пространства X следует называть дополнения до замкнутых подмножеств.

Упражнение 8.1. Убедитесь, что опр. 8.2 и опр. 8.1 действительно эквивалентны друг другу.

Предостережение 8.1. Из определения топологии *не следует*, что одноточечные подмножества $x \in X$ в абстрактном топологическом пространстве X являются замкнутыми. Соответственно, дополнения до точек $X \smallsetminus x$ не обязательно являются открытыми.

Пример 8.1 (дискретная топология)
Если объявить *каждое* подмножество $Y \subset X$ одновременно и открытым и замкнутым, то получится топология, называемая *дискретной*.

Пример 8.2 (тривиальная топология)
Если объявить открытыми *только* несобственные подмножества[1] $\varnothing$ и X, то получится топология, называемая *тривиальной* или *антидискретной*.

[1]Так что они автоматически окажутся и единственными двумя замкнутыми подмножествами.

Пример 8.3 (финитные и счётно-финитные топологии)
Если объявить замкнутыми $\varnothing$, X и все конечные (соотв. конечные или счётные) подмножества $Z \subset X$, то получится топология, называемая *финитной* (соотв. *счётно-финитной*).

Упражнение 8.2. Убедитесь, что это действительно топологии.

Пример 8.4 (топология Зарисского)
Пусть $X = \mathbb{A}^n$ — аффинное координатное пространство над произвольным полем $\Bbbk$. Назовём подмножество $Z \subset \mathbb{A}^n$ замкнутым, если оно является множеством решений некоторой (возможно, бесконечной) системы полиномиальных уравнений.

Упражнение 8.3. Покажите, что пустое множество и всё пространство задаются уравнениями $1 = 0$ и $0 = 0$, объединение множеств решений систем уравнений $f_\nu(x) = 0$ и $g_\mu(x) = 0$ задаётся системой уравнений $f_\nu(x) \cdot g_\mu(x) = 0$, где каждый из множителей независимо пробегает свою систему, а пересечение множеств решений любого множества систем полиномиальных уравнений задаётся системой уравнений, полученной слиянием всех этих систем в одну.

Описанная только что топология называется *топологией Зарисского*. На аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ она совпадает с финитной топологией из прим. 8.3.

Пример 8.5 (стандартная топология на $\mathbb{R}^n$)
Для произвольного $\varepsilon > 0$ назовём *ε-кубом* с центром в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ фигуру

$$B_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \forall\, i\ |x_i - p_i| \leq \varepsilon\}, \tag{8-1}$$

и скажем, что множество $U \subset \mathbb{R}^n$ *открыто*, если вместе с каждой точкой $p \in U$ оно содержит и некоторый ε-куб $B_\varepsilon(p) \subset U$.

Упражнение 8.4. Убедитесь, что это топология.

Эта топология называется *стандартной топологией* на $\mathbb{R}^n$, или *топологией покоординатной сходимости*[1]. Легко видеть, что набор $\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ открытых множеств не зависит от выбора аффинной системы координат, используемой для определения ε-кубов. В самом деле, при выборе другого координатного репера, неравенства задающие ε-куб (8-1) подвергнутся аффинному преобразованию и превратятся в другую систему неравенств вида $\xi_\nu(x) \leqslant a_\nu$, где $\xi_\nu \in \mathbb{R}^{n*}$ — некие линейные формы на $\mathbb{R}^n$, а $a_\nu \in \mathbb{R}$ — какие-то числа. При этом новые координаты $x = x(p)$ точки p будут решением строгих неравенств $\xi_\nu(x) < a_\nu$, поскольку точка p удовлетворяет строгой форме задающих ε-куб неравенств из формулы (8-1).

Упражнение 8.5. Пусть система строгих линейных (неоднородных) неравенств $\xi_\nu(x) < a_\nu$ имеет решение p в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$. Проверьте, что в множестве решений содержится и некоторый ε-куб с центром p.

Таким образом, если точка p входит в множество U вместе с некоторым кубом, определённым при помощи одной системы аффинных координат, то и в любой другой системе аффинных координат куб подходящего размера с центром в p тоже будет лежать внутри множества U.

Пример 8.6 (индуцированная топология)
На любом подмножестве Y топологического пространства X имеется *индуцированная* с X топология, открытыми (соотв. замкнутыми) подмножествами в которой являются пересечения с Y открытых (соотв. замкнутых) подмножеств из X.

[1] Этимология последнего названия прояснится ниже в упр. 8.14 и сл. 8.2.

Упражнение 8.6. Убедитесь, что это действительно топология.

8.1.1. Сравнение топологий. Говорят, что топология на X, заданная набором открытых множеств $\mathcal{U}_1$, *сильнее* или *тоньше* топологии, заданной набором открытых множеств $\mathcal{U}_2$, если $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2$, т. е. каждое открытое подмножество топологии $\mathcal{U}_2$ открыто и в топологии $\mathcal{U}_1$. В этой ситуации также говорят, что топология $\mathcal{U}_2$ *слабее* или *грубее* топологии $\mathcal{U}_1$. Отношение «тоньше» задаёт частичный порядок[1] на множестве всех топологий на заданном множестве X. Дискретная и тривиальная топологии из прим. 8.1 и прим. 8.2 являются при этом абсолютно максимальным (тончайшим) и минимальным (грубейшим) элементами частично упорядоченного множества топологий.

8.1.2. Окрестности. Всякое подмножество W топологического пространства X, содержащее данную точку $p \in X$ вместе с некоторым непустым открытым подмножеством $U \ni p$, называется *окрестностью* точки p. Из свойств открытых множеств вытекает, что пересечение конечного числа и объединение любого числа окрестностей данной точки p также являются её окрестностями.

Предложение 8.1
Множество открыто , если и только если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую её окрестность.

Доказательство. Каждое открытое множество U само же и является окрестностью всех своих точек. Наоборот, пусть множество Y вместе с каждой точкой $p \in Y$ содержит непустое открытое подмножество $U_p \ni p$. Тогда множество $Y = \bigcup_p U_p$ является объединением открытых множеств и, значит, тоже открыто. □

8.1.3. Базы. Любую топологию на множестве X можно описывать в духе прим. 8.5, *определяя* открытые множества как всевозможные объединения некоторых *базисных* открытых окрестностей — аналогов ε-кубов. А именно, подмножество $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}(X)$ называется *базой* топологии $\mathcal{U}$, если любое открытое множество является объединением множеств из набора $\mathcal{B}$. Это равносильно тому, что каждая окрестность W любой точки p содержит такое подмножество $U \in \mathcal{B}$, что $p \in U \subset W$.

Упражнение 8.7. Убедитесь, что счётное множество *открытых ε-кубов*

$$\mathring{B}_\varepsilon(p) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, \forall\, i \; |x_i - p_i| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ и $p \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ образует базу стандартной топологии на $\mathbb{R}^n$.

Предложение 8.2
Набор подмножеств $\mathcal{B}$ множества X тогда и только тогда является базой некоторой топологии на X, когда каждая точка $x \in X$ принадлежит некоторому множеству из $\mathcal{B}$ и для любых двух множеств $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ и точки $p \in U_1 \cap U_2$ найдётся такое множество $W \in \mathcal{B}$, что $p \in W \subset U_1 \cap U_2$.

Доказательство. Если $\mathcal{B}$ — база топологии, то открытое в этой топологии подмножество $U_1 \cap U_2$ содержит вместе с каждой своей точкой p и некоторое содержащее p базовое открытое подмножество $W \in \mathcal{B}$. Наоборот, если набор открытых множеств $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию леммы, то

[1] Т. е. является рефлесивным, транзитивным и кососимметричным бинарным отношением.

всевозможные объединения множеств из $\mathcal{B}$ составляют топологию на X с базой $\mathcal{B}$. В самом деле, открытость пустого множества[1], всего X и объединения любого множества открытых множеств очевидны. Пересечение $U' \cap U''$ двух открытых множеств вида

$$U' = \bigcup_{\nu} U'_{\nu}\,, \quad U'' = \bigcup_{\mu} U''_{\nu}\,, \quad U'_{\nu}, U''_{\mu} \in \mathcal{B}\,,$$

является объединением всевозможных множеств вида $U'_{\nu} \cap U''_{\mu}$, каждое из которых, в свою очередь, является объединением подмножеств $W_p \in \mathcal{B}$, приходящих по условию предложения из всевозможных точек $p \in U'_{\nu} \cap U''_{\mu}$. Поэтому $U' \cap U''$ тоже открыто. □

Упражнение 8.8*. Покажите, что базу топологии Зарисского из прим. 8.4 составляют открытые подмножества вида $D_f = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) \neq 0\}$, где $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — произвольный многочлен, причём любое открытое множество $U \subset \mathbb{A}^n$ является объединением *конечного* числа базовых.

8.1.4. Непрерывность. Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если полный прообраз $f^{-1}(U)$ каждого открытого подмножества $U \subset Y$ открыт в X. Это свойство равносильно тому, что прообраз любого замкнутого множества замкнут, и может быть переформулировано в традиционном для анализа стиле: скажем, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $x \in X$, если для любой окрестности $W \ni f(x)$ найдётся такая окрестность $U \ni x$, что $f(U) \subset W$.

Упражнение 8.9. Покажите, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

8.1.5. Топология произведения. На прямом произведении топологических пространств

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in X_i \text{ для всех } i\}$$

прямые произведения $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m$ открытых множеств $U_i \in \mathcal{U}(X_i)$ составляют базу топологии, поскольку попарные пересечения таких произведений также являются произведениями открытых множеств:

$$\big(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m\big) \cap \big(W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m\big) = (U_1 \cap W_1) \times (U_1 \cap W_1) \times \dots \times \big(U_m \cap W_m\big)\,.$$

Топология на $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$, открытыми множествами в которой являются всевозможные объединения произведений открытых множеств сомножителей называется *произведением топологий*. Например, стандартная топология на $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1$ является произведением стандартных топологий на $\mathbb{R}^1$, где базу составляют ε-окрестности точек.

Упражнение 8.10. Покажите, что топология Зарисского[2] на $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ тоньше прямого произведения топологий Зарисского на $\mathbb{A}^1$.

Топология произведения является слабейшей топологией на $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$, в которой все отображения проектирования $\pi_i : X \twoheadrightarrow X_i$ непрерывны. В самом деле, требование открытости прообраза любого открытого множества $U_i \subset X$ принуждает объявить открытыми все множества вида $X \times \dots \times X \times U_i \times X \times \dots \times X$, а значит, и все их конечные пересечения

$$\bigcap_i X \times \dots \times X \times U_i \times X \times \dots \times X = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m\,,$$

[1] Т. е. объединения пустого множества подмножеств из $\mathcal{B}$.
[2] См. прим. 8.4 на стр. 129.

которые как раз и составляют базу топологии произведения.

В случае бесконечного числа пространств X_α, где α пробегает произвольное множество A, базу слабейшей топологии на произведении[1] $X = \prod_\alpha X_\alpha$, в которой непрерывна каждая проекция $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$, тоже составляют лишь такие произведения открытых множеств $\prod_\alpha U_\alpha$, где только *конечное* число сомножителей отлично от всего X_α, поскольку аксиомы топологии требуют открытости лишь конечных пересечений открытых множеств.

Топология на бесконечном произведении, базу которой составляют такие произведения открытых множеств, где лишь конечное число подмножеств отлично от всего пространства, по прежнему называют *топологией произведения* или *тихоновской* топологией.

8.1.6. Зоология точек. Будем называть *фигурами* в топологическом пространстве X произвольные подмножества $\Phi \subset X$. Точки фигуры Φ, содержащиеся в Φ вместе с некоторой своею окрестностью, называются *внутренними* точками фигуры Φ. Множество всех внутренних точек фигуры Φ обозначается $\mathring{\Phi}$ и называется *внутренностью* фигуры Φ. Согласно предл. 8.1 внутренность любой фигуры открыта.

Упражнение 8.11. Покажите, что $\mathring{\Phi}$ представляет собою объединение всех открытых подмножеств пространства X, содержащихся в Φ, и является, таким образом, наибольшим по включению содержащимся в Φ открытым множеством.

Внутренние точки дополнения $X \smallsetminus \Phi$ называются *внешними* точками фигуры Φ. Иными словами, точка $p \in X$ является внешней для Φ, если у неё есть окрестность $W \ni p$, не пересекающаяся с Φ. Мы будем обозначать множество внешних точек фигуры Φ через $\check{\Phi}$. Как и внутренность $\mathring{\Phi}$, внешность $\check{\Phi}$ любой фигуры Φ открыта. Обратите внимание, что множество внешних точек замкнутой фигуры $Z \subset X$ это открытое дополнение $X \smallsetminus Z$ к этой фигуре.

Упражнение 8.12. Покажите, что внешность $\check{\Phi}$ любой фигуры $\Phi \subset X$ является объединением всех открытых множеств пространства X, не пересекающихся с Φ, и таким образом является наибольшим по включению не пересекающим Φ открытым множеством.

Замкнутое дополнение к открытому множеству внешних точек фигуры $\Phi \subset X$ называется *замыканием* фигуры Φ и обозначается $\overline{\Phi} \overset{\text{def}}{=} X \smallsetminus \check{\Phi}$. Согласно упр. 8.12 замыкание является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим фигуру. В частности, $\overline{\overline{\Phi}} = \overline{\Phi}$ для любой фигуры $\Phi \subset X$.

Точки, которые не являются для фигуры Φ ни внешними, ни внутренними, называются *граничными* или *собственными граничными*, смотря по тому, принадлежат они фигуре Φ или нет. Множество всех граничных точек Φ обозначается $\partial\Phi$ и называется *границей* фигуры Φ. Таким образом, точка $p \in X$ является граничной для Φ, если любая её окрестность содержит как точки из Φ, так и точки, не принадлежащие Φ, и $\overline{\Phi} = \Phi \cup \partial\Phi$. Обратите внимание, что пересечение $\Phi \cap \partial\Phi$ может быть как пустым, так и нет.

Точка $p \in X$ называется *предельной точкой* фигуры $\Phi \subset X$, если в любой окрестности точки p имеется отличная от p точка фигуры Φ. Точки фигуры Φ, не являющиеся её предельными точками, называются *изолированными* точками фигуры Φ. Иначе говоря, точка $p \in \Phi$ является изолированной, если у неё есть окрестность, не содержащая никаких точек Φ, кроме самой точки p.

Упражнение 8.13. Покажите, что замыкание фигуры является объединением этой фигуры с множеством всех её предельных точек.

[1] Точки которого можно воспринимать как такие функции $x : A \to \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, $\alpha \mapsto x_\alpha$, что $x_\alpha \in X_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

8.1.7. Компактные пространства. Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Предложение 8.3
Если пространство X компактно, и отображение $f : X \to Y$ непрерывно, то пространство $f(X) \subset Y$ компактно в индуцированной с Y топологии.

Доказательство. Рассмотрим произвольное покрытие $f(X) = \bigcup\limits_{\alpha} \big(f(X) \cap U_\alpha\big)$, где $U_\alpha \subset Y$ открыты. Открытые множества $f^{-1}(U_\alpha) \subset X$ покрывают пространство X. Из них можно выбрать конечное подпокрытие $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)$. Тогда множества $f(X) \cap U_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, образуют конечное покрытие $f(X)$. □

Предложение 8.4
Для компактности пространства X необходимо и достаточно, чтобы любой набор его замкнутых подмножеств, каждый конечный поднабор в котором имеет непустое пересечение, и сам имел непустое пересечение.

Доказательство. Пусть X компактно, и любой конечный набор в семействе замкнутых подмножеств $Z_\alpha \subset X$ имеет непустое пересечение. Если $\bigcap\limits_\alpha Z_\alpha = \varnothing$, то открытые подмножества $U_\alpha = X \smallsetminus Z_\alpha$ покрывают X. Выберем среди них конечное покрытие $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n = X$. Тогда $Z_1 \cap Z_2 \cap \ldots \cap Z_n = \varnothing$, что невозможно. Наоборот, пусть для любого семейства замкнутых подмножеств в X выполнено условие предложения. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $X = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. Если никакой конечный набор $U_1, U_2, \ldots, U_n$ элементов этого покрытия не покрывает X, то в семействе дополнительных замкнутых множеств $Z_\alpha = X \smallsetminus U_\alpha$ любой конечный поднабор $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ имеет непустое пересечение. Поэтому $\bigcap\limits_\alpha Z_\alpha \neq \varnothing$, а значит, $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \neq X$. □

Предложение 8.5 (лемма Больцано – Вейерштрасса)
Любое бесконечное подмножество компактного пространства имеет в нём хоть одну предельную точку.

Доказательство. Если точка $p \in X$ не является предельной для подмножества $\Phi \subset X$, то у неё есть открытая окрестность U_p, не содержащая никаких точек из Φ, кроме p. Если ни одна точка в X не является предельной для Φ, открытые множества U_p покрывают X. Выбирая из них конечное покрытие, заключаем, что множество Φ конечно. □

8.1.8. Предостережения насчёт «сходимости». Напомню, что *последовательностью* точек пространства X называется любое отображение $a : \mathbb{N} \to X$, и значение этого отображения на числе $k \in \mathbb{N}$ традиционно записывается как $a_k \overset{\text{def}}{=} a(k)$. Точка $p \in X$ называется *пределом* такой последовательности, если любая окрестность точки p содержит все члены последовательности, начиная с некоторого.

Упражнение 8.14. Покажите, что сходимость последовательности в стандартной топологии[1] пространства $\mathbb{R}^n$ означает *покоординатную* сходимость, т. е. последовательность точек $\big(a_k\big)$

[1] См. прим. 8.5 на стр. 129.

сходится к точке p , если и только если для каждого i последовательность i-тых координат точек последовательности a сходится в $\mathbb{R}$ к i-той координате точки p :

$$p = \lim_{k\to\infty} a_k \iff \forall\, i = 1,\, 2,\, \dots ,\, n\ \lim_{k\to\infty} x_i(a_k) = x_i(p)\,.$$

Говоря о сходимости, следует иметь в виду, что свойства сходящихся последовательностей существенно зависят от используемой топологии и могут быть весьма далеки от известных из начального курса анализа теорем о пределах последовательностей вещественных чисел в стандартной топологии на $\mathbb{R}$.

Упражнение 8.15. Убедитесь, что в финитной топологии[1] на $\mathbb{R}$ последовательность $x_n = n$ сходится, причём *каждая* точка $p \in \mathbb{R}$ является для неё пределом.

Кроме того, *последовательность* не следует путать с *фигурой*, образованной значениями последовательности. Так, точка $p \in X$ называется *предельной* для последовательности $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, если в любая окрестность точки p содержит бесконечно много *членов последовательности*, а это совсем не то же самое, что *точек из образа* последовательности. Например, последовательность вещественных чисел $a_n = (-1)^n$ имеет в стандартной топологии на $\mathbb{R}$ ровно две предельные точки, а множество её значений состоит из двух изолированных точек и предельных точек у него вообще нет. Обратите также внимание, что в произвольном топологическом пространстве X из того, что точка p является предельной для последовательности $a : \mathbb{N} \to X$, вообще говоря, *не вытекает*, что у последовательности a есть подпоследовательность[2], для которой p является *пределом*.

8.2. Метрические пространства. Имеется важный класс топологических пространств, сходимость в которых по своим свойствам очень близка к сходимости в стандартной топологии на вещественной прямой.

Определение 8.3
Множество X, на котором задана вещественная функция двух аргументов $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$, обладающая $\forall\, x, y, z \in X$ свойствами

$$\begin{aligned}
&\varrho(x,y) = \varrho(y,x) && \text{(симметричность)}\\
&\varrho(x,y) \geqslant 0 && \text{(положительность)}\\
&\varrho(x,y) = 0 \iff x = y && \text{(невырожденность)}\\
&\varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,z) && \text{(неравенство треугольника)}
\end{aligned}$$

называется *метрическим пространством*, а функция ϱ — *метрикой* или *расстоянием* на X.

8.2.1. Метрическая топология. В метрическом пространстве X для любых точки $p \in X$ и вещественного числа $\varepsilon > 0$ фигуры

$$B_\varepsilon(p) = \{x \in X \mid \varrho(p,x) \leqslant \varepsilon\} \tag{8-2}$$
$$\mathring{B}_\varepsilon(p) = \{x \in X \mid \varrho(p,x) < \varepsilon\} \tag{8-3}$$

[1] См. прим. 8.3 на стр. 129.

[2] Напомню, что *подпоследовательностью* последовательности $a : \mathbb{N} \to X$ называется композиция a с любым монотонно возрастающим отображением $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$, так что члены подпоследовательности $a \circ \nu$ имеют вид a_{ν_k}.

называется, соответственно, *замкнутым* и *открытым ε-шарами* с центром в p. Открытые ε-шары с рациональными радиусами составляют базу топологии на X, поскольку для любых чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Q}$ и точек $p, q_1, q_2 \in X$, таких что $p \in \mathring{B}_{\varepsilon_1}(q_1) \cap \mathring{B}_{\varepsilon_2}(q_2)$, δ-шар $\mathring{B}_\delta(p)$ любого рационального радиуса $\delta < \min(\varepsilon_1 - \varrho(p, q_1), \varepsilon_2 - \varrho(p, q_2))$ содержится в пересечении $\mathring{B}_{\varepsilon_1}(q_1) \cap \mathring{B}_{\varepsilon_2}(q_2)$, так как для всех x с $\varrho(x, p) < \delta$ выполняются неравенства треугольника

$$\varrho(x, q_i) \leqslant \varrho(x, p) + \varrho(p, q_i) < \varepsilon_i - \varrho(p, q_i) + \varrho(p, q_i) = \varepsilon_i \quad i = 1, 2\,.$$

Топология с базой из открытых шаров рационального радиуса называется *метрической*. Открытыми в метрической топологии являются такие подмножества $U \subset X$, которые вместе с каждой своей точкой содержат некоторый ε-шар с центром в этой точке.

Пример 8.7 (евклидова метрика)
С каждым скалярным произведением (v, w) на $\mathbb{R}^n$ связана *евклидова метрика*, в которой расстояние между точками равно евклидовой длине соединяющего точки вектора

$$\varrho_{\mathrm{euc}}(p, q) \overset{\mathrm{def}}{=} |\overrightarrow{pq}| = \sqrt{(q - p, q - p)}\,.$$

Симметричность, положительность и невырожденность этой метрики следуют из симметричности и положительности скалярного произведения, а неравенство треугольника — из неравенства Коши – Буняковского – Шварца[1]. В евклидовой метрике ε-шары — это обычные шары радиуса ε.

Упражнение 8.16. Убедитесь, что метрическая топология стандартной евклидовой метрики на $\mathbb{R}^n$ совпадает со стандартной топологией покоординатной сходимости из прим. 8.5 на стр. 129.

Пример 8.8 (sup-метрика в $\mathbb{R}^n$)
Определим на $\mathbb{R}^n$ расстояние между точками как максимум модулей разностей их координат:

$$\varrho_{\sup}(p, q) \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |p_i - q_i|\,. \tag{8-4}$$

Симметричность, положительность и невырожденность этой метрики очевидны, а неравенство треугольника вытекает из неравенства треугольника для расстояний на евклидовой прямой: так как $|z_i - x_i| \leqslant |z_i - y_i| + |y_i - x_i|$ при каждом i,

$$\begin{aligned}\varrho_{\sup}(x, z) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i - x_i| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|z_i - y_i| + |y_i - x_i|) \leqslant \\ \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i - y_i| + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i - x_i| = \varrho_{\sup}(x, z) + \varrho_{\sup}(x, z)\,.\end{aligned}$$

Метрика (8-4) называется *sup-метрикой*.

Упражнение 8.17. Убедитесь, что ε-шарами sup-метрики являются ε-кубы из прим. 8.5.

Таким образом, метрическая топология sup-метрики это и есть стандартная топология на $\mathbb{R}^n$.

[1] См. сл. 3.3 на стр. 35.

Пример 8.9 (sup-метрика в $C^0([a,b])$)
Этот пример является бесконечномерным обобщением предыдущего. Определим в пространстве $C^0([a,b])$ непрерывных функций $[a,b] \to \mathbb{R}$ на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sup-метрику формулой[1]

$$\varrho_{\sup}(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Симметричность, положительность, невырожденность и неравенство треугольника проверяются точно так же, как в предыдущем примере. В sup-метрике ε-шар $B_\varepsilon(f)$ состоит из всех функций, график которых удаляется по вертикали от графика функции f не более, чем на ε.

8.2.2. Отделимость. Из неравенства треугольника вытекает, что любые две различные точки метрического пространства обладают непересекающимися открытыми окрестностями, ибо по неравенству треугольника $\mathring{B}_\varepsilon(p) \cap \mathring{B}_\varepsilon(q) = \varnothing$ при $\varepsilon < \varrho(p,q)/2$. Топология с таким свойством называется *хаусдорфовой*. Таким образом, каждое метрическое пространство хаусдорфово.

Упражнение 8.18. Покажите, что в хаусдорфовом пространстве никакая последовательность не может иметь более одного предела.

Из неравенства треугольника точно также следует, что никакие две точки p и q метрического пространства не могут одновременно содержаться ни в каком шаре радиуса $\varepsilon < \varrho(p,q)/2$. Поэтому в каждом метрическом пространстве пересечение любой последовательности вложенных друг в друга замкнутых шаров исчезающе малого радиуса

$$B_{\varepsilon_1}(p_1) \supset B_{\varepsilon_2}(p_2) \supset B_{\varepsilon_3}(p_3) \supset \cdots, \quad \text{где} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \tag{8-5}$$

либо пусто, либо состоит ровно из одной точки. В частности, для лбой точки p

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{1/n}(p) = p.$$

Определение 8.4
Метрическое пространство называется *полным*, если каждая последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами имеет в нём непустое пересечение (автоматически состоящее из единственной точки).

Упражнение 8.19. Покажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ с sup-метрикой из прим. 8.8 полно.

Упражнение 8.20* (по анализу). Покажите, что пространство $C^0([a,b])$ непрерывных функций $[a,b] \to \mathbb{R}$ из прим. 8.9 полно.

Теорема 8.1 (свойства метрических компактов)
Следующие свойства фигуры Φ в полном метрическом пространстве эквивалентны:

1) любое покрытие фигуры Φ открытыми множествами содержит конечное подпокрытие

2) любое бесконечное подмножество в Φ имеет в Φ предельную точку

3) Φ замкнута и $\forall\,\varepsilon > 0$ фигуру Φ можно покрыть конечным множеством ε-шаров.

[1] Она корректна, поскольку любая непрерывная функция на отрезке ограничена и достигает своего максимального значения.

Доказательство. В предл. 8.5 мы видели, что импликация (1) ⇒ (2) выполняется в любом топологическом пространстве. Докажем импликацию (2) ⇒ (3). Пусть точка p является предельной для Φ. Начав с любой точки $x_1 \in \Phi$, для каждого натурального $n \geqslant 2$ отметим в шаре радиуса $\varrho(p, x_{n-1}) / 2$ с центром в p какую-нибудь отличную от p точку $x_n \in \Phi$. Таким образом, мы получаем счётное множество точек $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Phi$.

Упражнение 8.21. Проверьте, что единственной предельной точкой множества X во всём объемлющем метрическом пространстве является точка p.

Следовательно, $p \in \Phi$ по свойству (2), т. е. фигура Φ замкнута. Пусть для какого-то $\varepsilon > 0$ фигура Φ не покрывается конечным числом ε-шаров. Начав с любой точки $y_1 \in \Phi$, для каждого натурального $k \geqslant 2$ отметим какую-нибудь точку $y_k \in \Phi \smallsetminus \big(B_\varepsilon(y_1) \cup B_\varepsilon(y_2) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(y_{k-1})\big)$. Таким образом мы получаем счётное множество точек

$$Y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Phi,$$

в котором $\varrho(y_n, y_m) > \varepsilon$ для всех $n \neq m$. Поскольку ни в каком шаре радиуса $\varepsilon / 3$ не содержится более одной точки $y_i \in Y$, множество Y вообще нет предельных точек, что противоречит (2).

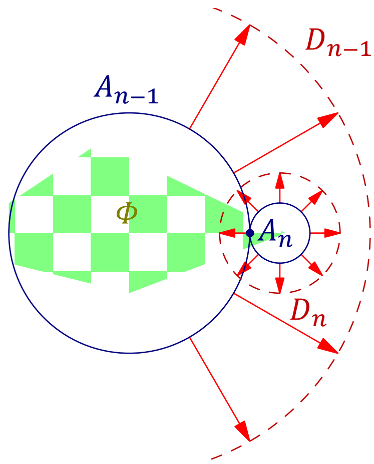

Рис. 8◇1. Удвоение шаров.

Наконец, докажем импликацию (3) ⇒ (1). Пусть открытое покрытие $\Phi = \bigcup_\alpha U_\alpha$ не содержит конечного подпокрытия. Покроем Φ конечным числом шаров радиуса $1/4$ и обозначим через A_1 любой такой шар, что пересечение $\Phi \cap A_1$ не содержится ни в каком конечном наборе множеств U_α. Далее для каждого натурального $n \geqslant 2$ покрываем Φ конечным числом шаров радиуса $1/4^n$ и обозначаем через A_n любой такой шар, что пересечение $A_n \cap \big(\Phi \cap A_{n-1}\big)$, как и ранее, не содержится ни в каком конечном наборе множеств U_α. Обратите внимание, что $A_n \cap A_{n-1} \cap \Phi \neq \varnothing$, и радиус шара A_n вчетверо меньше, чем у A_{n-1}. Обозначим через D_n шар вдвое большего, чем у A_n радиуса $2/4^n$ с тем же центром, что и шар A_n (см. рис. 8◇1).

Упражнение 8.22. Убедитесь, что $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots$ и радиусы шаров D_n стремятся к нулю при $n \to \infty$.

В силу полноты объемлющего пространства все шары D_n имеют общую точку q. Поскольку любой из стягивающихся к q шаров D_n имеет непустое пересечение с Φ, точка q лежит в $\overline{\Phi} = \Phi$ и накрывается некоторым открытым множеством U из набора U_α. Но тогда все шары A_k, начиная с некоторого, лежат внутри U, а значит, $\Phi \cap A_k$ покрывается *одним* множеством U вопреки производившемуся нами выбору шаров A_k. Противоречие. □

Замечание 8.1. Свойство (1) из теор. 8.1 называется *компактностью*, свойство (2) — *секвенционной компактностью* (или *свойством Больцано–Вейерштрасса*), а свойство (3) — *вполне ограниченностью*. Вполне ограниченность влечёт ограниченность в обычном смысле: если фигура покрывается конечным набором шаров, то она содержится в некотором шаре достаточно большого радиуса. В пространстве $\mathbb{R}^n$ с sup-метрикой из прим. 8.8 верно и обратное: всякая ограниченная фигура вполне ограничена, поскольку если Φ содержится в кубе со стороной d, то деля его координатными гиперплоскостями на N^n кубиков со стороной $d/N < \varepsilon$, получаем покрытие Φ конечным набором ε-кубов. Однако в более сложных метрических пространствах встречаются ограниченные, но не вполне ограниченные фигуры.

Упражнение 8.23 (по анализу). Убедитесь, что единичный шар с центром в нуле не вполне ограничен в пространстве $C^0([a,b])$ непрерывных функций $[a,b] \to \mathbb{R}$ из прим. 8.9

Следствие 8.1
Каждая непрерывная функция $f : \Phi \to \mathbb{R}$ на компактной фигуре Φ в полном метрическом пространстве X ограничена и достигает своих максимального и минимального значений в некоторых точках фигуры X.

Доказательство. Согласно предл. 8.3 образ $f(\Phi) \subset \mathbb{R}$ компактен, а значит, ограничен и замкнут. Из ограниченности $f(\Phi)$ вытекает, что у $f(\Phi)$ есть конечные точные верхняя и нижняя грани. Из замкнутости $f(\Phi)$ вытекает, что обе они принадлежат $f(\Phi)$. □

8.3. Нормы. В вещественной аффинной геометрии обычно используют метрики, инвариантные относительно параллельных переносов и однородные по отношению к гомотетиям. Первое означает, что расстояние $\varrho(x,y) = \varrho(\overrightarrow{xy})$ зависит только от *вектора* $\overrightarrow{xy}$, а не от самих точек x и y. Второе означает, что для любых вектора v и числа λ выполняется равенство $\varrho(\lambda v) = |\lambda|\varrho(v)$.

Определение 8.5
Функция $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$, на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ называется *нормой*, если для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v, w \in V$ выполнены свойства

$$\begin{aligned}
&\|v\| \geqslant 0 && \text{(положительность)}\\
&\|v\| = 0 \iff v = 0 && \text{(невырожденность)}\\
&\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| && \text{(однородность)}\\
&\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\| && \text{(неравенство треугольника)}\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, всякая инвариантная относительно сдвигов и однородная относительно гомотетий метрика на аффинном пространстве, ассоциированном с векторным пространством V над полем $\mathbb{R}$, имеет вид $\varrho(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\|$ для некоторой нормы $v \mapsto \|v\|$ на V.

Например, евклидова метрика из прим. 8.7 получается из *евклидовой нормы* $|v| = \sqrt{(v,v)}$. а sup-метрика из прим. 8.8 — из *sup-нормы*

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_{\mathrm{st}} \overset{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|\,, \tag{8-6}$$

которую мы в дальнейшем будем называть *стандартной нормой* на $\mathbb{R}^n$.

Лемма 8.1
Любая норма $v \mapsto \|v\|$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ непрерывна в стандартной топологии.

Доказательство. Обозначим через $e_i \in \mathbb{R}^n$ стандартные базисные векторы и положим

$$M = \max_i \|e_i\|\,.$$

Тогда норма любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ оценивается сверху как

$$\|v\| = \left\|\sum x_i e_i\right\| \leqslant \sum |x_i| \cdot \|e_i\| \leqslant nM \max_i |x_i| = nM \cdot \|v\|_{\mathrm{st}}\,.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta < \varepsilon/2nM$ стандартная кубическая δ-окрестность вектора v

$$\mathring{B}_\delta(v) = \{w \in \mathbb{R}^n : \|v - w\|_{\mathrm{st}} < \delta\}$$

переводится норменным отображением $w \mapsto \|w\|$ внутрь ε-окрестности числа $\|v\|$ в $\mathbb{R}$:

$$\big| \|v\| - \|w\| \big| \leqslant \|v - w\| < nM \cdot \|v - w\|_{\mathrm{st}} < \varepsilon .$$

□

8.3.1. Евклидовы нормы. Норма $v \mapsto \|v\|$ на вещественном векторном пространстве V называется *евклидовой*, если $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ для некоторой евклидовой структуры (v, w) на V. Стандартная норма (8-6) не является евклидовой, поскольку стандартная норма всех сторон и всех диагоналей квадрата, натянутого на стандартные базисные орты в $\mathbb{R}^2$, равна 1. Тогда как для евклидовых норм имеет место *тождество параллелограмма*[1]

$$(v + w, v + w) + (v - w, v - w) = 2(v, v) + 2(w, w),$$

которое на языке норм записывается в виде

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right) . \tag{8-7}$$

Предложение 8.6
Норма $v \mapsto \|v\|$ евклидова , если и только если для неё выполняется тождество (8-7).

Доказательство. Для евклидова скалярного произведения тождество (8-7) очевидно выполняется. Рассмотрим произвольную норму $v \mapsto \|v\|$ на V. Функция $V \times V \to \mathbb{R}$, заданная правилом

$$(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} (\|v + w\| - \|v - w\|)/4$$

симметрична, невырождена и положительна. Очевидно также, что

$$\forall\, v, w \in V \quad (-v, w) = -(v, w) = (v, -w) .$$

Упражнение 8.24. Покажите, что если норма удовлетворяет тождеству (8-7), то

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w) \quad \text{и} \quad (v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2) .$$

Согласно упр. 8.24, для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $v, w \in V$ выполняется равенство $(n \cdot v, w) = n \cdot (v, w)$. Полагая в нём $u = n \cdot v$, получаем $(u/n, w) = (u, w)/n$ и заключаем, что равенство

$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w) = (v, \lambda w) \tag{8-8}$$

выполняется для всех $\lambda \in \mathbb{Q}$. Из лем. 8.1 вытекает, что при фиксированных $v, w \in \mathbb{R}^n$ обе части равенства (8-8) непрерывны как функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ от аргумента $\lambda \in \mathbb{R}$.

Упражнение 8.25. Убедитесь в этом.

Так как эти непрерывные функции совпадают на плотном подмножестве[2] $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, они совпадают всюду в $\mathbb{R}$. Вместе с аддитивностью из упр. 8.24 это означает билинейность функции (v, w). □

---

[1] Утверждающее, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырёх его сторон.

[2] Подмножество топологического пространства называется *плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством.

8.3.2. Топологическая эквивалентность норм. Будем называть две нормы

$$v \mapsto \|v\|_1 \quad \text{и} \quad v \mapsto \|v\|_2$$

на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ *топологически эквивалентными*, если ассоциированные с ними метрики $\varrho_1(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\|_1$ и $\varrho_2(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\|_2$ задают одну и ту же метрическую топологию на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$. Поскольку задаваемая нормой метрика трансляционно инвариантна, ε-окрестности любой точки являются параллельными переносами ε-окрестностей нуля. Таким образом, топологическая эквивалентность норм означает, что в каждой открытом шаре первой нормы с центром в нуле содержится некоторый открытый шар второй нормы с центром в нуле и наоборот.

Теорема 8.2
Любая норма на $\mathbb{R}^n$ топологически эквивалентна стандартной sup-норме (8-6).

Доказательство. Достаточно показать, что для любой нормы $v \mapsto \|v\|$ на $\mathbb{R}^n$ существуют такие вещественные положительные константы μ и M, что для всех $v \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$\mu \cdot \|v\|_{\text{st}} \leqslant \|v\| \leqslant M \cdot \|v\|_{\text{st}}\,. \tag{8-9}$$

В этом случае стандартный ε-куб с центром в произвольной точке $p \in \mathbb{R}^n$ будет содержать внутри себя $\varepsilon\,/\,M$-шар рассматриваемой нормы и, наоборот, каждый ε-шар этой нормы будет содержать внутри себя стандартный ε/μ-куб. Поскольку граница стандартного 1-куба с центром в нуле $\partial B_{1,\text{st}}(0) = \left\{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_{\text{st}} = 1\right\}$ компактна в стандартной топологии, непрерывная по лем. 8.1 функция $v \mapsto \|v\|$ достигает на ней своих максимального и минимального значений

$$M = \sup_{v \in K} \|v\| \quad \text{и} \quad \mu = \inf_{v \in K} \|v\|\,,$$

причём $\mu > 0$ в силу невырожденности нормы. Таким образом, для всех $w \in K$ мы имеем неравенства $0 < \mu \leqslant \|w\| \leqslant M < \infty$. Подставляя в них $w = v/\|v\|_{\text{st}}$ получаем для любого $v \neq 0$ требуемые неравенства (8-9). □

Следствие 8.2
Сходимость в метрической топологии, заданной на $\mathbb{R}^n$ при помощи произвольной нормы, означает покоординатную сходимость в какой-нибудь (а следовательно и в любой) системе аффинных координат.

8.4. Выпуклость. В аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ над полем $\mathbb{R}$ барицентрическая комбинация

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_mp_m\,, \quad \sum x_i = 1\,,$$

точек $p_i \in \mathbb{A}$ называется *выпуклой*, если все коэффициенты $x_i \geqslant 0$. Фигура Φ называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации своих точек.

Упражнение 8.26. Покажите, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вмести с любыми двумя своими точками p, q она содержала и соединяющий их *отрезок*

$$[p,q] = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda + \mu = 1,\ \lambda, \mu > 0\}\,.$$

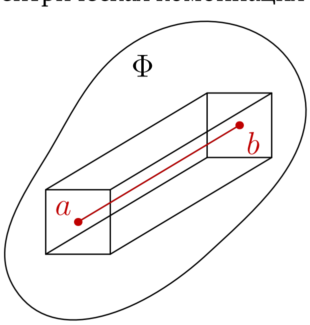

Рис. 8⋄2. Выпуклоость внутренности.

Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру Φ, называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\operatorname{conv}(\Phi)$. Иначе $\operatorname{conv}(\Phi)$ можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ.

Предложение 8.7
Внутренность и замыкание любой выпуклой фигуры выпуклы.

Доказательство. Первое вытекает из того, что если точки a и b содержатся в выпуклом множестве Φ вместе с некоторыми ε-кубами $B_\varepsilon(a)$, $B_\varepsilon(b) \subset \Phi$, то все точки отрезка $[ab]$ содержатся в Φ вместе с такими же ε-кубами (см. рис. 8◇2). Для доказательства второго заметим, что если $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ и $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, то при любых фиксированных λ и μ

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \lim_{k\to\infty} a_k + \mu \lim_{k\to\infty} b_k = \lambda a + \mu b\,.$$

Поэтому любая точка отрезка $[a, b]$ является пределом последовательности точек фигуры Φ, если таковыми были его концы a и b. □

Упражнение 8.27. Докажите, что замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью является её замыканием, и приведите пример невыпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью, которое не является её замыканием.

Пример 8.10 (симплексы)
Выпуклая оболочка $k+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_k$, не лежащих ни в какой $(k-1)$-мерной плоскости, называется k-мерным *симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, \dots, p_k] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} x_i p_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\,,\ x_i \geqslant 0 \right\}. \tag{8-10}$$

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно. В аффинных координатах $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с началом в p_0 относительно базиса $e_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, симплекс (8-10) задаётся системой из $(n+1)$ линейных (неоднородных) неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant 1\,. \end{cases} \tag{8-11}$$

т. е. является пересечением $(n+1)$ полупространств. Поскольку в точке с координатами

$$\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}\right)$$

все эти неравенства выполнены строго, она принадлежит симплексу вместе с некоторым ε-кубом. Таким образом, выпуклая оболочка любых $(n+1)$ не лежащих в одной гиперплоскости точек пространства $\mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность.

Упражнение 8.28. Проверьте, что граница симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, \dots, p_{\nu_m}]$, где $m < n$ и $\nu_i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

8.4.1. Геометрическое описание норм. Поскольку все нормы на $\mathbb{R}^n$ задают одну и ту же топологию, для любой нормы $v \mapsto \|v\|$ её единичный шар с центром в нуле

$$B_1(0) = \{v \in V \,:\, \|v\| \leqslant 1\} \tag{8-12}$$

ограничен, замкнут и содержит нуль в качестве внутренней точки. Из однородности нормы вытекает, что этот шар центрально симметричен относительно нуля, а из неравенства треугольника — что он выпуклый: для любых $v, w \in B_1(0)$ и неотрицательных $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ с $\lambda + \mu = 1$ выполняется неравенство $\|\lambda v + \mu w\| \leqslant \lambda\|v\| + \mu\|w\| \leqslant 1$. Норма $v \mapsto \|v\|$ однозначно восстанавливается по единичному шару (8-12) как

$$\|v\| = \inf\left(\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \lambda^{-1}v \in B_1(0)\right). \tag{8-13}$$

Предложение 8.8
Формулы (8-12) и (8-13) устанавливают биекцию между нормами на $\mathbb{R}^n$ и выпуклыми центрально симметричными относительно нуля компактами в $\mathbb{R}^n$, содержащими нуль в качестве внутренней точки.

Доказательство. С учётом сказанного выше, нам остаётся лишь проверить, что построенная по любому удовлетворяющему условиям предложения выпуклому компакту Φ функция

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|_\Phi \overset{\text{def}}{=} \inf(\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid v \in \lambda\Phi)$$

является нормой на $\mathbb{R}^n$. Положительность, невырожденность и однородность этой функции достаточно проверить при $n = 1$, где они очевидны. Неравенство треугольника следует из выпуклости фигуры Φ. Действительно, для всех $v, w \in V$ точка

$$q = \frac{v + w}{\|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi} = \frac{\|v\|_\Phi}{\|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi} \cdot \frac{v}{\|v\|_\Phi} + \frac{\|w\|_\Phi}{\|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi} \cdot \frac{w}{\|w\|_\Phi}$$

является выпуклой барицентрической комбинацией точек $v/\|v\|_\Phi$ и $w/\|w\|_\Phi$, лежащих в Φ. Поэтому $q \in \Phi$, откуда $\|q\|_\Phi \leqslant 1$, т. е. $\|v + w\|_\Phi \leqslant \|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi$. □

8.4.2. Опорные гиперплоскости. Рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ над n-мерным векторным пространством $V \simeq \mathbb{R}^n$. Аффинные отображения $a : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$ называются *аффинными функционалами* на $\mathbb{A}^n$. Если зафиксировать какую-нибудь начальную точку $p \in \mathbb{A}^n$, то всякий аффинный функционал можно записать в виде $a = a_p + \alpha$, где число $a_p = a(p) \in \mathbb{R}$ равно значению функционала a в точке p, а ковектор $\alpha = D_a \in V^*$ равен дифференциалу аффинного отображения a. Таким образом, действие функционала a на произвольную точку $q \in \mathbb{A}^n$ задаётся формулой $a(q) = a_p + \alpha(\overrightarrow{pq})$.

Ограничение аффинного функционала a на любой отрезок

$$[p, q] = \{tp + (1 - t)q \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset \mathbb{A}^n$$

представляет собою «школьную» линейную функцию вида $t \mapsto \alpha t + \beta$ на отрезке $[0, 1]$. Для такой функции имеются следующие исключающие друг друга возможности: она либо тождественно нулевая, либо нигде не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак, либо зануляется ровно в одной точке $z \in [p, q]$. В последнем случае имеется дальнейшая альтернатива: либо точка z является одним из концов отрезка, и функционал a имеет постоянный знак на полуинтервале $[p,q] \smallsetminus z$, либо $z \in (a,b)$, а a имеет постоянные и противоположные друг другу знаки на полуинтервалах $[p,z)$ и $(z,b]$. Таким образом, каждый непостоянный аффинный функционал $a : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$ задаёт разбиение аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости

$$H_a \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) = 0\},$$

и двух выпуклых открытых полупространств

$$\mathring{H}_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) > 0\} \quad \text{и} \quad \mathring{H}_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) < 0\}. \tag{8-14}$$

Любой отрезок $[p,q]$ с $p \in \mathring{H}^+$ и $q \in \mathring{H}_a^-$ пересекает гиперплоскость H_a в единственной точке, и она является внутренней точкой отрезка $[p,q]$. Замыкания полупространств (8-14)

$$H_a^+ = \mathring{H}_a^+ \sqcup H_a = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad H_a^- = \mathring{H}_a^+ \sqcup H_a = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \leqslant 0\} \tag{8-15}$$

имеют общую границу $\partial H_a^+ = \partial H_a^- = H_a$ и называются *замкнутыми полупространствами* аффинного функционала $a \neq \text{const}$.

Лемма 8.2
В аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ размерности $n \geqslant 2$ для любого открытого выпуклого множества U и любой точки $p \notin U$ существует проходящая через p и не пересекающаяся с U прямая.

Доказательство. Обозначим через $C \subset \mathbb{A}^n$ объединение всех пересекающих U открытых лучей с началом в p, т. е. множеств вида $]\,p,u) \overset{\text{def}}{=} \{p + t \cdot \overrightarrow{pu} \mid t > 0\}$ со всевозможными $u \in U$. Из рис. 8◇3 и рис. 8◇4 очевидно, что C является открытой выпуклой фигурой, и $p \in \partial C$. Из выпуклости C следует, что любая проходящая через p прямая ℓ либо вообще не пересекает C, либо пересекает C по одному из лучей $]\,p,u)$, все точки которого являются внутренними точками C, а все точки дополненения $\ell \smallsetminus [p,u)$ к замкнутому лучу являются для C внешними (см. рис. 8◇3). В частности, внешние для C точки существуют. Пусть q — одна из них. Поскольку $n > 1$, через q можно провести пересекающую C прямую, отличную от прямой (qp). На ней есть точка $r \in \partial C$. Прямая (pr) не пересекает $C \supset U$, т. к. содержит граничную для C точку $r \neq p$. □

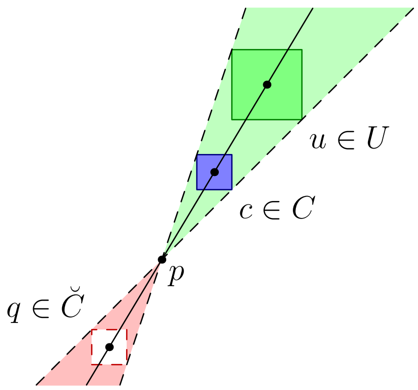

Рис. 8◇3. Открытость C и непустота $\check{C}$.

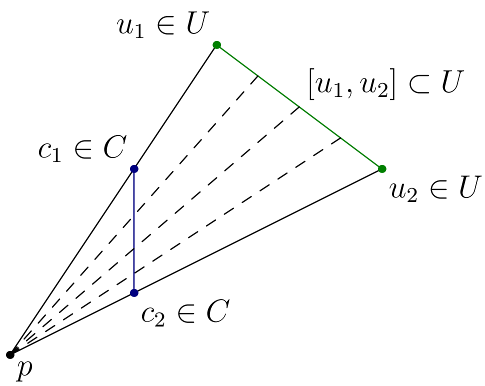

Рис. 8◇4. Выпуклость C.

Следствие 8.3
Каждое[1] аффинное подпространство $\Pi \subset \mathbb{A}^n$, не пересекающее открытого выпуклого множества $U \subset \mathbb{A}^n$, содержится в некоторой не пересекающей U гиперплоскости[2].

[1]В том числе состоящее из единственной точки, т. е. нульмерное.
[2]Т. е. аффинном подпространстве коразмерности 1.

Доказательство. Поместим начало координат внутрь Π и отождествим Π с векторным подпространством $W \subset \mathbb{R}^n$ (возможно нулевым). Из всех векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$, которые содержат W и не пересекают U, выберем какое-нибудь максимальное по включению подпространство H. Возьмём любое дополнительное к H подпространство H', так что $H \oplus H' = \mathbb{R}^n$, и спроектируем $\mathbb{R}^n$ на H' вдоль H. Поскольку отрезки спроектируются при этом в отрезки, а кубы — в кубы, и $H \cap U = \varnothing$, множество U спроектируется в открытое выпуклое подмножество H', не содержащее нуля. Если $\dim H' > 1$, то по лем. 8.2 в нём найдётся одномерное подпространство L, не пересекающее проекцию U. Но тогда подпространство $H \oplus L \subset \mathbb{R}^n$ содержит Π, не пересекает U и строго больше, чем H, что противоречит выбору H. Мы заключаем, что $\dim H' = 1$, и значит, H является искомой гиперплоскостью. □

Определение 8.6 (опорные гиперплоскости)
Гиперплоскость $H_a \subset \mathbb{R}^n$ называется *опорной гиперплоскостью* фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, если

$$H_a \cap \partial\Phi \neq \varnothing \quad \text{и} \quad \Phi \subset H_a^+ .$$

В этом случае полупространство H_a^+ называется *опорным полупространством*, а аффинный функционал a — *опорным функционалом* фигуры Φ.

Теорема 8.3
Через каждую граничную точку p любой выпуклой фигуры Φ можно провести опорную гиперплоскость (возможно, не единственную).

Доказательство. Если фигура $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ целиком лежит в какой-нибудь гиперплоскости, то эта гиперплоскость и будет опорной. Если в Φ есть $(n+1)$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то согласно прим. 8.10 внутренность $\mathring{\Phi} \neq \varnothing$. Проведём через p гиперплоскость H_a, не пересекающую $\mathring{\Phi}$. Функционал a имеет на $\mathring{\Phi}$ постоянный знак, т. к. в противном случае, соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из $H_a \cap \mathring{\Phi}$. Меняя, если нужно, знак у a, мы можем считать, что $\mathring{\Phi} \subset \mathring{H}_a^+$. Поскольку Φ лежит в замыкании $\mathring{\Phi}$, а это замыкание — в замыкании $\mathring{\Phi}$, мы заключаем, что $\Phi \subset H_a^+$. □

Теорема 8.4
Всякое замкнутое выпуклое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ является пересечением своих опорных полупространств.

Доказательство. Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего Z, мы можем считать, что Z не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка $q \notin Z$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества Z. Для этого соединим q отрезком $[q,p]$ с какой-нибудь внутренней точкой $p \in \mathring{Z}$ и проведём опорное полупространство H_a^+ к Z в граничной точке $r \in [q,p] \cap \partial Z$. Поскольку r лежит строго внутри $[q,p]$, из $a(p) > 0$ и $a(r) = 0$ следует, что $a(q) < 0$, т. е. $q \notin H_a^+$. □

8.4.3. Грани и крайние точки. Пересечение замкнутой выпуклой фигуры Φ с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры Φ. Каждая грань фигуры Φ тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ строго меньше n. Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются *вершинами*. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с *произвольными* выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры на рис. 8◇5, где пара отрезков гладко сопрягается с овалами, есть две одномерных грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры Φ может не быть гранью самой фигуры Φ.

Точка $p \in \Phi$ называется *крайней точкой* замкнутой выпуклой фигуры Φ, если она не является внутренней точкой никакого отрезка $[a, b] \subset \Phi$. Крайняя точка не может быть внутренней точкой никакой замкнутой выпуклой фигуры, отличной от точки. Если же точка q является внутренней точкой какого-либо отрезка $[a, b] \subset \Phi$, то она может оказаться в грани фигуры Φ только если весь отрезок $[a, b]$ лежит в этой грани, поскольку в противном случае высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным. Таким образом, крайние точки суть нульмерные грани, возникающие из всевозможных цепочек вида: фигура Φ, грань фигуры Φ, грань грани фигуры Φ, грань грани грани фигуры Φ, и т. д.. В частности, все вершины фигуры Φ являются её крайними точками. Обратите внимание, что крайние точки всех граней замкнутой выпуклой фигуры Φ являются крайними и для Φ, хотя при этом они могут не быть вершинами фигуры Φ.

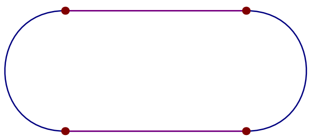

Рис. 8◇5.

Теорема 8.5
Каждая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Доказательство. Индукция по размерности фигуры. Любая внутренняя точка фигуры является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого из фигуры произвольной проходящей через точку прямой. Эти концы лежат на гранях фигуры и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. Последние являются крайними точками и для самой фигуры. □

Предложение 8.9
Через каждую точку p любой замкнутой выпуклой фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$ проходит единственное максимальное по включению аффинное подпространство, целиком содержащееся в Φ. Все такие подпространства имеют одно и то же направляющее векторное пространство $U \subset V$. Для любого такого векторного подпространства $U' \subset V$, что $U \oplus U' = V$, замкнутая выпуклая фигура $\Phi' = \Phi \cap (p + U')$ не содержит аффинных пространств положительной размерности, и $\Phi = \mathbb{A}(U) \times \Phi'$.

Доказательство. Если аффинные подпространства $p + W_1$ и $p + W_2$ содержатся в Φ, то Φ содержит и аффинное подпространство $p + (W_1 + W_2)$, т. к. для любых $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$ точка $p + w_1 + w_2$ является серединой отрезка с концами в точках $p + 2w_1$ и $p + 2w_2$. Поэтому аффинное пространство $p + U$, где $U \subset V$ это сумма всех таких подпространств $W \subset V$, что $p + W \subset \Phi$, содержит все лежащие в Φ аффинные подпространства, проходящие через p. Если $q + W$ это максимальное содержащееся в Φ аффинное подпространство, проходящее через точку $q \notin p + U$, то $U \subset W$, так как для любого вектора $u \in U$ точка $r = q + u$ является концом содержащегося в Φ интервала $[p, r[= \{(1-t)p + tr \mid 0 \leqslant t < 1\}$ (см. рис. 8⋄6), ибо

$$(1-t)p + t(q+u) = (1-t)\left(p + \frac{t}{1-t}u\right) + tq \in \Phi\,.$$

По той же причине $W \subset U$. Это доказывает первые два утверждения и первую половину третьего. Прямое разложение $V = U \oplus U'$ задаёт разложение $\mathbb{A}(V) = (p+U) \times (p+U')$, в котором $p+U \subset \Phi$. Для любой точки $q = p+u+u' \in \Phi$ точка $p+u' = q-u \in q+U$ лежит в $(p+U')\cap\Phi = \Phi'$. Наоборот, для любой точки $p+u' \in \Phi' \subset \Phi$ всё аффинное пространство $p+u'+U \subset \Phi$. Поэтому $\Phi \subset (p+U)\times\Phi'$. □

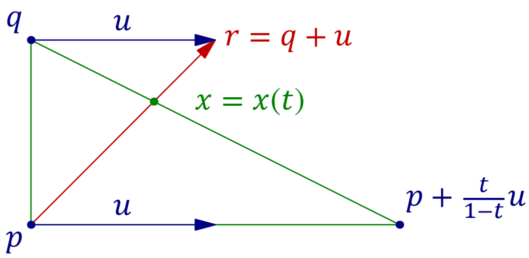

Рис. 8⋄6. $\overrightarrow{px} : \overrightarrow{xr} = t : (1-t)$.

Определение 8.7 (цилиндры)

Замкнутая выпуклая фигура вида $\Phi = \mathbb{A}(U) \times B \subset \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$, где $\dim U > 0$, а $B \subset \mathbb{A}(W)$ это непустая замкнутая выпуклая фигура, не содержащая аффинных подпространств положительной размерности, называется *цилиндром* с *основанием* B и *образующей* $\mathbb{A}(U)$. Если основание B состоит из одной точки, цилиндр совпадает со своей образующей $\mathbb{A}(U)$ и является аффинным пространством.

Следствие 8.4

Следующие свойства непустой замкнутой выпуклой фигуры Φ эквивалентны друг другу:

1) Φ является цилиндром
2) Φ не имеет крайних точек
3) Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2). Если Φ цилиндр, то через любую точку $p \in \Phi$ проходит содержащееся в Φ аффинное пространство положительной размерности. Поэтому никакая точка $p \in \Phi$ не может быть крайней.

Импликация (2) ⇒ (3). Если фигура Φ не совпадает с наименьшим аффинным подпространством, в котором она содержится, то в этом подпространстве у Φ есть опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем $\dim\Phi$. Заменяя Φ на эту грань и повторяя рассуждение, мы построим цепочку вида: фигура Φ, грань фигуры Φ, грань грани фигуры Φ, и т. д., последний элемент в которой совпадает с наименьшим содержащим его аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то она крайняя. Если нет, то Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Импликация (2) ⇒ (3) вытекает из предл. 8.9. □

Упр. 8.5. Возьмите $\varepsilon = \max_\nu \big(a_\nu - \xi_\nu(p)\big)/\max'_{\nu,k}\big|\xi_\nu\left(e_k\right)\big|$, где e_i — стандартные базисные векторы в $\mathbb{R}^n$ и максимум в знаменателе берётся по всем таким ν и k, что $\xi_\nu\left(e_k\right) \neq 0$.

Упр. 8.8. Поскольку кольцо многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *нётерово*[1], каждая система полиномиальных уравнений эквивалентна[2] своей конечной подсистеме. Поэтому любое замкнутое множество является пересечением конечного числа задаваемых одним уравнением замкнутых множеств вида $Z_f = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0\}$. Соответственно, любое открытое множество является объединением конечного числа дополнительных к таким замкнутым множествам подмножеств $D_f = \mathbb{A}^n \smallsetminus Z_f$.

Упр. 8.25. Покажите, что при фиксированных $v \in V$ и $a \in \mathbb{R}$ каждая из функций

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, && x \mapsto ax\\
&\mathbb{R} \to V\,, && x \mapsto xv\\
&V \to V\,, && w \mapsto w + v\\
&V \to V\,, && w \mapsto w - v\\
&V \to V\,, && w \mapsto aw
\end{aligned}
\tag{14-49}
$$

непрерывна и разложите функции $\lambda \mapsto (\lambda v, w)$ и $\lambda \mapsto \lambda\,(v, w)$ в композиции функций (14-49) и норменного отображения $w \mapsto \|w\|$ из V в $\mathbb{R}$.

Упр. 8.27. Пусть $p \in Z \smallsetminus \mathring{Z}$. Для любой точки $q \in \mathring{Z}$ все точки отрезка $[p, q]$ кроме p являются внутренними, поскольку лежат внутри конуса с вершиной p и основанием в любом ε-кубе $B_\varepsilon(q) \subset \mathring{Z}$. Объединение замкнутого шара и лежащей вне него точки не является замыканием своей внутренности.

[1] Т. е. любое множество M элементов в нём порождает тот же идеал, что и некоторое конечное подмножество в M. Подробности см. в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-05.pdf.

[2] В том смысле, что имеет то же самое множество решений.