§6. Евклидова геометрия

Всюду в этом параграфе основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$.

6.1. Евклидовы пространства. Напомню[1], что векторное V над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*, если на нём задано симметричное билинейное скалярное произведение, сопоставляющее паре векторов $u, w \in V$ число $(u, w) = (w, u) \in \mathbb{R}$ так, что скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны. Ограничение скалярного произведения на любое подпространство в V задаёт евклидову структуру на этом подпространстве. В частности, линейная оболочка любой пары непропорциональных векторов в любом евклидовом пространстве представляет собою обычную «школьную» евклидову плоскость, подробно обсуждавшуюся нами в §3. В частности, для любых двух векторов каждого евклидова пространства выполняется неравенство Коши – Буняковского – Шварца[2]

$$(v, v) \cdot (w, w) \geqslant (v, w)^2 \,, \tag{6-1}$$

равенство в котором равносильно пропорциональности векторов u и w, и вытекающее из него[3] неравенство треугольника

$$\forall\, u, w \quad \sqrt{(u, u)} + \sqrt{(w, w)} \geqslant \sqrt{(u + w, u + w)} \,, \tag{6-2}$$

равенство в котором равносильно сонаправленности[4] векторов u и w. Это позволяет определить в каждом евклидовом пространстве *длину* вектора и *угол* между двумя векторами:

$$|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)} \tag{6-3}$$

$$\cos \measuredangle(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(v, w)}{|v| \cdot |w|} \,. \tag{6-4}$$

Поскольку $|v \pm w|^2 = (v \pm w, v \pm w) = (v, v) \pm 2(v, w) + (w, w)$, скалярное произведение $V \times V \to \mathbb{R}$ однозначно восстанавливается по функции длины $V \to \mathbb{R}$ посредством формул

$$(v, w) = (|v + w|^2 - |v - w|^2)/4 = (|v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2)/2 \,. \tag{6-5}$$

Пример 6.1 (стандартная евклидова структура на $\mathbb{R}^n$)
Напомню[5], что в стандартной евклидовой структуре на координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ задаётся формулой

$$(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \,. \tag{6-6}$$

Неравенство (6-1) для такого скалярного произведения имеет вид

$$(x_1^2 + x_2^2 + \;\cdots\; + x_n^2)(y_1^2 + y_1^2 + \;\cdots\; + y_n^2) \geqslant \big(x_1 y_1 + x_1 y_1 + \;\cdots\; + x_n y_n\big)^2$$

и называется *неравенством Коши – Буняковского*. Оно справедливо для любых двух наборов вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ и обращается в равенство тогда и только тогда,

[1] См. опр. 3.1 на стр. 33.
[2] См. сл. 3.2 на стр. 35.
[3] См. сл. 3.3 на стр. 35.
[4] Т. е. пропорциональности с *положительным* коэффициентом.
[5] См. прим. 3.1 на стр. 33.

когда эти наборы пропорциональны. Длина вектора в $\mathbb{R}^n$ вычисляется по n-мерной теореме Пифагора:

$$|(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\,.$$

Пример 6.2 (пространство непрерывных функций)
Зададим скалярное произведение непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx\,. \tag{6-7}$$

Упражнение 6.1. Выведите из известных вам свойств интегралов от непрерывных функций, что это произведение билинейно и положительно.

Формула (6-7) является прямым обобщением формулы (6-6), если воспринимать функции как «континуальные наборы координат», номера которых суть точки отрезка. В пространстве непрерывных функций неравенство (6-1) имеет вид

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$$

и называется *неравенством Шварца*. Оно выполняется для любых двух непрерывных функций f и g и обращается в равенство тогда и только тогда, когда эти функции отличаются скалярным множителем. Длина функции вычисляется по «континуальной» теореме Пифагора

$$|f|^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx\,.$$

6.1.1. Уравнение гиперплоскости.

Для заданных ненулевого вектора a в евклидовом пространстве V и произвольного числа $d \in \mathbb{R}$ линейное неоднородное уравнение на вектор $x \in V$

$$(a, x) = d \tag{6-8}$$

задаёт в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ гиперплоскость, перпендикулярную вектору a и удалённую от нуля на расстояние $|d|/|a|$ в ту же сторону, что и конец вектора a, если $d > 0$, и в противоположную сторону, если $d < 0$ (см. рис. 6◇1). Действительно, вектор x удовлетворяет (6-8), если и только если его ортогональная проекция[1] на вектор a равна

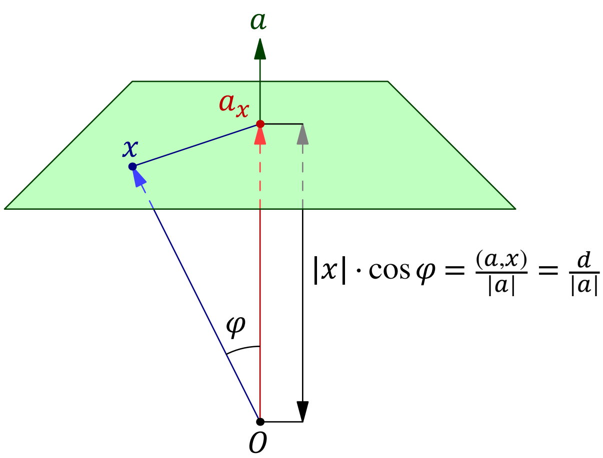

Рис. 6◇1. ГМТ $x\,:\,(a, x) = d$.

$$a_x = a \cdot \frac{(a, x)}{(a, a)} = a \cdot \frac{d}{|a|^2} = \frac{a}{|a|} \cdot \frac{d}{|a|}\,.$$

[1] См. формулу (3-3) на стр. 34.

Это фиксированный вектор длины $|a_x| = |d| / |a|$, сонаправленный с a при $d > 0$ и противоположно направленный к a при $d < 0$. В координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение (6-8) выглядит как $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d$, где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Пример 6.3 (срединный перпендикуляр)
Рассмотрим в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ произвольную пару различных точек $p_0 \neq p_1$. Покажем, что ГМТ $x \in \mathbb{A}^n$, равноудалённых от p_0 и p_1, представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0p_1}$ и проходящую через точку $(p_0+p_1)/2$ — середину отрезка $[p_0, p_1]$. Эта гиперплоскость называется *срединным перпендикуляром* к отрезку $[p_0, p_1]$. Равенство длин $|x, p_0| = |x, p_1|$ равносильно равенству скалярных произведений

$$(\overrightarrow{xp}_0, \overrightarrow{xp}_0) = (\overrightarrow{xp}_1, \overrightarrow{xp}_1),$$

т. е. равенству $(p_0 - x, p_0 - x) = (p_1 - x, p_1 - x)$, где буквы p_0, p_1, x обозначают радиус-векторы соответствующих точек, выпущенные из произвольно выбранной начальной точки $O \in \mathbb{A}^n$. После раскрытия скобок и сокращений, получаем $(p_0, p_0) - 2\,(p_0, x) = (p_1, p_1) - 2\,(p_1, x)$ или

$$2\,(p_1 - p_0, x) = (p_1, p_1) - (p_0, p_0). \tag{6-9}$$

Это уравнение задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0p}_1 = p_1 - p_0$ и проходящую через точку $(p_0 + p_1)/2$, ибо последняя, очевидно, равноудалена от p_0 и p_1.

Упражнение 6.2. Убедитесь прямым вычислением, что $x = (p_0 + p_1)/2$ удовлетворяет уравнению (6-9).

6.1.2. Ортогонализация. Набор векторов евклидова пространства называют *ортогональным*, если любые два вектора в нём ортогональны друг другу. Любой ортогональный набор ненулевых векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ линейно независим, поскольку скалярно умножая равенство

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \dots + \lambda_kv_k = 0$$

на v_i, получаем $\lambda_i(v_i, v_i) = 0$, откуда все $\lambda_i = 0$. Ортогональный набор векторов называют *ортонормальным*, если все векторы в нём имеют длину 1. По предыдущему, всякий ортонормальный набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$ является базисом своей линейной оболочки, и коэффициенты разложения векторов по этому базису равны скалярным произведениям с соответствующими базисными векторами: если $v = \sum x_ie_i$, то $(e_i, v) = x_i$ в силу ортонормальности векторов e_i. Скалярное произведение векторов $u = \sum x_ie_i$ и $w = \sum y_ie_i$, разложенных по ортонормальному базису $e_1, e_2, \dots, e_k$, равно $(u, w) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ky_k$.

Предложение 6.1
В линейной оболочке любых векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$, не все из которых нулевые, существует такой ортонормальный базис $e_1, e_2, \dots, e_k$, что каждый вектор u_i лежит в линейной оболочке первых i базисных векторов $e_1, e_2, \dots, e_i$.

Доказательство. В качестве первого вектора в искомом базисе возьмём $e_1 = u_s/|u_s|$, где u_s — первый слева ненулевой вектор в наборе $u_1, u_2, \dots, u_m$. Тогда $|e_1| = 1$ и e_1 порождает то же одномерное пространство, что и векторы $u_1, u_2, \dots, u_s$. Допустим по индукции, что уже построены ортонормальные векторы $e_1, e_2, \dots, e_i$, линейная оболочка которых совпадает с линейной оболочкой векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$, где $k \geqslant i$. Положим

$$w_{i+1} = u_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{i} (u_{k+1}, e_\nu) \cdot e_\nu \tag{6-10}$$

(см. рис. 6⋄2). Вектор w_{i+1} ортогонален всем векторам $e_1, e_2, \dots, e_i$, поскольку скалярно умножая обе части равенства (6-10) на любой вектор e_ν с $1 \leqslant \nu \leqslant i$, получаем

$$(w_{i+1}, e_\nu) = (u_{k+1}, e_\nu) - (u_{k+1}, e_\nu)(e_\nu, e_\nu) = 0\,.$$

Если $w_{i+1} = 0$, то вектор u_{k+1} лежит в линейной оболочке векторов $e_1, e_2, \dots, e_i$ и можно переходить к следующему шагу с тем же i и $k+1$ вместо k. Если $w_{i+1} \neq 0$, то полагаем $e_{i+1} = w_{i+1}/|w_{i+1}|$ и получаем ортонормальный набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_{i+1}$, линейная оболочка которого совпадает с линейной оболочкой векторов $u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$. □

Замечание 6.1. Описанный выше процесс построения ортонормального базиса в линейной оболочке заданных векторов называется *ортогонализацией Грама – Шмидта*.

Следствие 6.1

В любом евклидовом пространстве существует ортонормальный базис. □

6.2. Матрицы Грама. С любыми двумя наборами векторов евклидова пространства

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, \dots, u_m) \\ w &= (w_1, w_2, \dots, w_k) \end{aligned} \tag{6-11}$$

можно связать таблицу их попарных скалярных произведений, поместив скалярное произведение (u_i, w_j) в пересечение i-той строки и j-того столбца. Полученная матрица обозначается

$$G_{uw} \overset{\text{def}}{=} \big((u_i, w_j)\big) \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(\mathbb{R})$$

и называется *матрицей Грама* наборов u и w. Если воспринимать эти наборы как матрицы, элементами которых являются векторы, и под произведением двух векторов понимать их скалярное произведение, т. е. положить $ab \overset{\text{def}}{=} (a, b) \in \mathbb{R}$ для любых $a, b \in V$, то матрицу Грама можно описать при помощи умножения матриц равенством

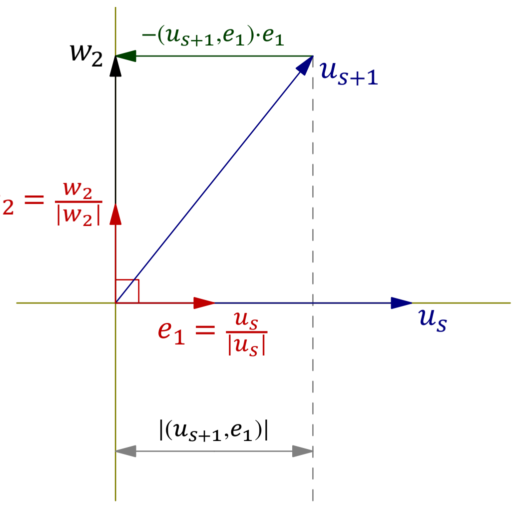

Рис. 6⋄2. Второй шаг ортогонализации.

$$G_{uw} = u^t w\,,$$

где $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ это строка из векторов, а u^t — столбец из векторов, транспонированный к строке $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. Если наборы векторов u и w линейно выражаются через какие-то другие наборы векторов $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_s)$ по формулам $u = e \cdot C_{eu}$ и $w = f \cdot C_{fw}$, где $C_{eu} \in \mathrm{Mat}_{r\times m}(\mathbb{R})$ и $C_{fw} \in \mathrm{Mat}_{s\times k}(\mathbb{R})$ некие матрицы, то матрица Грама G_{uw} пересчитывается через матрицу Грама G_{ef} по формуле

$$G_{uw} = u^t w = \left(eC_{eu}\right)^t f\,C_{fw} = C_{eu}^t e^t f\,C_{fw} = C_{eu}^t G_{ef} C_{fw}\,. \tag{6-12}$$

При $w = u$ мы получаем таблицу умножения векторов из одного набора $u_1, u_2, \dots, u_m$. В этом случае обозначение G_{uu} сокращается до $G_u \overset{\text{def}}{=} \big((u_i, u_j)\big) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$. Определитель этой квадратной матрицы называется *определителем Грама* векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$ и обозначается $\varGamma_u \overset{\text{def}}{=} \det G_u$. Ортонормальность векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$ означает, что их матрица Грама $G_e = E$, и в этом случае $\varGamma_e = \det E = 1$.

Предложение 6.2

Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_m$ образуют базис в подпространстве U, а векторы $e_1, e_2, \dots, e_m$ составляют в том же подпространстве U ортонормальный базис, то $\varGamma_u = \det^2 C_{eu}$, где C_{eu} — матрица, по столбцам которой стоят координаты векторов u в базисе e, т. е.

$$(u_1, u_2, \dots, u_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot C_{eu}\,.$$

Доказательство. По формуле (6-12) имеем $G_u = C_{eu}^t G_e C_{eu} = C_{eu}^t E C_{eu} = C_{eu}^t C_{eu}$. Следовательно, $\varGamma_u = \det G_u = \det C_{eu}^t \cdot \det C_{eu} = \det^2 C_{eu}$. □

Следствие 6.2

Определитель Грама любого набора векторов неотрицателен, и его обращение в нуль равносильно линейной зависимости этих векторов.

Доказательство. Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ линейно независимы, то они составляют базис в своей линейной оболочке, и $\varGamma_v = \det^2 C_{ev} > 0$. Если же $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ для некоторого ненулевого набора констант λ_i, то умножая это равенство скалярно на v_ν, получаем при каждом ν равенство $\lambda_1(v_\nu, v_1) + \lambda_2(v_\nu, v_2) + \dots + \lambda_m(v_\nu, v_m) = 0$, означающее, что столбцы матрицы Грама $G_v = \big((v_i, v_j)\big)$ линейно зависимы с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Поэтому $\varGamma_v = \det G_v = 0$. □

Следствие 6.3

Все ортонормальные базисы n-мерного евклидова пространства имеют одинаковый по абсолютной величине объём[1]. Если зафиксировать форму объёма так, чтобы абсолютная величина объёма ортогонального базиса равнялась единице, квадрат объёма параллелепипеда, натянутого на произвольные векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ будет равен определителю Грама $\varGamma_v$ этих векторов.

Доказательство. Зафиксируем какой-нибудь ортонормальный базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и рассмотрим форму объёма, равную нём единице. Тогда квадрат объёма параллелепипеда, натянутого на произвольные n векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)C_{ev}$, равен $\det^2 C_{ev} = \varGamma_v$. В частности, квадрат объёма параллелепипеда, натянутого на любой ортонормальный базис f равен $\varGamma_f = \det E = 1$. □

6.2.1. Евклидов объём и ориентация. Ортонормальные базисы равного объёма называются *кооригентированными*. Ортонормальные базисы противоположного по знаку объёма называются *противоположно ориентированными*. Любая нечётная перестановка базисных векторов меняет ориентацию базиса, а любая чётная — не меняет. В каждом евклидовом пространстве V имеются ровно две (различающиеся знаком) формы объёма, такие что объёмы всех ортонормальных базисов равны ± 1. Выбор одной из них в качестве формы объёма называется *выбором*

[1] Относительно любой ненулевой формы объёма.

ориентации на V. Ориентация координатного пространства $\mathbb{R}^n$, принимающая значение $+1$ на стандартном базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, называется *стандартной*.

Абсолютная величина объёма параллелепипеда, натянутого на произвольно заданные векторы $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, вычисленная относительно одной из двух ориентирующих форм, не зависит от выбора ориентации и называется *евклидовым объёмом* (неориентированного) параллелепипеда. Мы будем обозначать евклидов объём через

$$\mathrm{Vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sqrt{\Gamma_v} = \sqrt{\det\left(v_i, v_j\right)}\,. \tag{6-13}$$

6.3. Евклидова двойственность. С каждым вектором v евклидова пространства V связан линейный функционал скалярного умножения на v

$$g_v : V \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto (u, v)\,.$$

Сопоставление векторам $v \in V$ линейных функционалов g_v задаёт линейное отображение

$$g : V \to V^*, \quad v \mapsto g_v\,. \tag{6-14}$$

Упражнение 6.3. Убедитесь в линейности функционала g_v и отображения g.

Поскольку $g_v(v) = (v, v) \neq 0$ для любого $v \neq 0$, ковектор $g_v 0$ ненулевой при ненулевом $v \neq 0$. Тем самым, отображение (6-14) инъективно, а значит, является изоморфизмом векторных пространств. Иначе говоря, любой линейный функционал на евклидовом пространстве однозначно представляется в виде скалярного произведения с некоторым вектором.

Упражнение 6.4. Убедитесь, что матрица отображения g в произвольном базисе e пространства V и двойственном ему базисе e^* пространства V^* совпадает с матрицей Грама G_e.

6.3.1. Двойственный базис. Для любого базиса $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ пространства V, прообразы координатных функционалов $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^* \in V^*$, образующих двойственный к u базис пространства V^*, обозначаются $u^\times = (u_1^\times, u_2^\times, \dots, u_n^\times) \in V$ и называются *евклидово двойственным* к u базисом пространства V. Векторы евклидово двойственного базиса однозначно характеризуются соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0, \text{ при } i \neq j\,, \\ 1, \text{ при } i = j\,, \end{cases} \tag{6-15}$$

означающими что взаимная матрица Грама $G_{uu^\times} = u^t u^\times = E$. Согласно форм. (6-12) на стр. 93 матрица $C_{uu^\times}$, линейно выражающая базис $u^\times$ через базис u по формуле $u^\times = uC_{uu^\times}$, удовлетворяет равенству $E = G_{uu^\times} = G_u C_{uu^\times}$, т. е. обратна к матрице Грама базиса u. Тем самым,

$$(u_1^\times, u_2^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot G_u^{-1}\,. \tag{6-16}$$

Ортонормальность базиса означает, что он совпадает со своим евклидово двойственным.

Упражнение 6.5. Покажите, что $u_i^{\times\times} = u_i$.

По определению двойственного базиса, коэффициенты разложения произвольного вектора v по любому базису $u_1, u_2, \dots, u_n$ равны скалярным произведениям с соответствующими векторами двойственного базиса

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\times)\,. \tag{6-17}$$

Убедиться в этом напрямую можно скалярно умножив обе части на $u_i^\times$ для каждого i.

6.3.2. Ортогоналы. Прообраз аннулятора $\mathrm{Ann}(U) \subset V^*$ данного подпространства $U \subset V$ при изоморфизме (6-14) обозначается через

$$U^\perp = \{w \in V \mid \forall\, u \in U\ (u, w) = 0\}$$

и называется *ортогоналом* или *ортогональным дополнением* к U. По предл. 4.7 на стр. 64

$$\dim U^\perp = \dim \mathrm{Ann}\, U = \dim V - \dim U$$

Упражнение 6.6. Убедитесь, что $U^\perp \cap U = 0$.

Таким образом, $V = U \oplus U^\perp$, т. е. каждый вектор $v \in V$ допускает единственное разложение

$$v = v_U + v_{U^\perp}\,, \quad \text{где} \quad v_U \in U\,,\ v_{U^\perp} \in U^\perp\,. \tag{6-18}$$

Компоненты $v_U \in U$ и $v_{U^\perp} \in U^\perp$ этого разложения называются *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство U и *нормальной составляющей* вектора $v \in V$ относительно U соответственно.

Из сл. 4.6 на стр. 64 и теор. 4.1 на стр. 65 вытекает, что соответствие $U \leftrightarrow U^\perp$ задаёт оборачивающую включения биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в V, и эта биекция переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы, т. е. для любых подпространств $U, W \subset V$ выполняются равенства

$$U^{\perp\perp} = U\,, \quad (U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp\,, \quad (U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp\,. \tag{6-19}$$

Упражнение 6.7. Докажите все эти утверждения независимо от сл. 4.6 и теор. 4.1.

6.4. Ортогональное проектирование. Для любого ненулевого подпространства $U \subsetneq V$ линейное отображение

$$\pi_U : V = U \oplus U^\perp \twoheadrightarrow U\,, \quad v = v_U + v_{U^\perp} \mapsto v_U\,,$$

называется *ортогональным проектированием* V на U.

Предложение 6.3

Ортогональная проекция $v_U \in U$ произвольного вектора $v \in V$ на подпространство $U \subset V$ однозначно характеризуется любым из следующих эквивалентных друг другу свойств:

1) $v - v_U \in U^\perp$

2) $\forall\, u \in U\ \ (u, v) = (u, v_U)$

3) $\forall\, u \in U\ \ u \neq v_U \Rightarrow |v - u| > |v - v_U|$

и может найдена по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot (v, u_i^\times)\,, \tag{6-20}$$

где $u_1, u_2, \dots, u_m$ и $u_1^\times, u_2^\times, \dots, u_m^\times$ — произвольные евклидово двойственные базисы в U.

Доказательство. Свойства (1) и (2) очевидным образом равносильны и утверждают, что векторы v_U и $v - v_U$ являются компонентами вектора v в прямом разложении $V = U \oplus U^{\perp}$. Свойство (3) выполняется для ортогональной проекции v_U вектора v на U, поскольку для любого вектора $u = v_U + w \in U$ с ненулевым $w \in U$

$$(v - u, v - u) = (v_{U^{\perp}} - w, v_{U^{\perp}} - w) = (v_{U^{\perp}}, v_{U^{\perp}}) + (w, w) > (v_{U^{\perp}}, v_{U^{\perp}}).$$

А так как вектор, обладающий свойством (3), очевидно, единствен, свойство (3) равносильно свойствам (1) и (2). Остаётся проверить, что вектор v_U, заданный по формуле (6-20), обладает свойством (2). Поскольку свойство (2) линейно по $u \in U$, достаточно проверить его для всех векторов какого-нибудь базиса в U. Для базисных векторов $u_\nu^\times$ получаем требуемое равенство $(v_U, u_\nu^\times) = \sum_i (u_i, u_\nu^\times) \cdot (v, u_i^\times) = (v, u_\nu^\times)$. □

Следствие 6.4
В евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ для любого непустого аффинного подпространства $\Pi \subsetneq \mathbb{A}(V)$ и любой точки $a \notin \Pi$ существует единственная точка $a_\Pi \in \Pi$, удовлетворяющая двум эквивалентным друг другу условиям:

1) вектор $\overrightarrow{aa_\Pi}$ перпендикулярен любому вектору $\overrightarrow{pq}$ с $p, q \in \Pi$

2) $|aq| > |aa_\Pi|$ для любой точки $q \in \Pi$, отличной от p_a.

Доказательство. Поместим начало отсчёта в какую-нибудь точку $o \in \Pi$ и отождествим точки $a \in \mathbb{A}(V)$ с радиус-векторами $\overrightarrow{oa} \in V$. При этом аффинное подпространство Π превратится в векторное подпространство $U \subset V$, а точке $a \in A$ сопоставится её радиус вектор $v = \overrightarrow{oa} \in V$. Остаётся применить к ним предл. 6.3. □

Определение 6.1 (расстояние от точки до подпространства)
Точка $a_\Pi \in \Pi$ из сл. 6.4 называется *ортогональной проекцией* точки a на подпространство Π. Длина $|a - a_\Pi|$ называется *расстоянием* от точки a до подпространства Π.

Упражнение 6.8. Покажите, что расстояние от точки p до гиперплоскости $(a, x) = d$ равно $|d - (a, p)| / |a|$.

Следствие 6.5
Для произвольного вектора $v \notin U^{\perp}$ минимум углов $\measuredangle(v, u)$ по всем $u \in U$ достигается на единственном с точностью до умножения на положительную константу векторе, а именно, на ортогональной проекции $v_U \in U$ вектора v на подпространство U.

Доказательство. Наименьшему значению угла $\measuredangle(v, u)$ отвечает наибольшее значение

$$\cos(\measuredangle(v, u)) = \frac{(v, u)}{|v| \cdot |u|}.$$

Но $(v, u) = (v_U, u)$ по свойству (2) из предл. 6.3, а в силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца[1] максимум отношения $(v_U, u) / |u| = (v_U, u / |u|)$ достигается тогда и только тогда, когда единичный вектор $u / |u|$ сонаправлен с v_U. □

[1] См. формулу (6-1) на стр. 90.

Определение 6.2 (угол между вектором и подпространством)
Для $v \notin U^{\perp}$ угол $\measuredangle(v, U) \overset{\text{def}}{=} \measuredangle(v, v_U)$ называется *углом между вектором v и подпространством U*. Для $v \in U^{\perp}$ мы полагаем $\measuredangle(v, U) \overset{\text{def}}{=} \pi/2$.

Пример 6.4 (объём через «площадь основания» и «высоту»)
Рассмотрим в евклидовом пространстве линейно независимый набор из $n+1$ векторов

$$w = (v,\, u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{6-21}$$

и обозначим через U линейную оболочку поднабора $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, составленного из последних n векторов. Тогда вектор v единственным образом представляется в виде суммы $v = v_U + v_{U^\perp}$, где $v_U \in U$, а $v_{U^\perp}$ перпендикулярен U. Естественно назвать вектор $v_{U^\perp}$ *высотой* параллелепипеда $(v,\, u_1, u_2, \dots, u_n)$, поднятой в вершину v с основания $(u_1, u_2, \dots, u_n)$. В координатах относительно произвольного ортонормального базиса в линейной оболочке набора w ориентированный объём параллелепипеда w равен

$$\det(v,\, u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(v - v_U,\, u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(v_{U^\perp},\, u_1, u_2, \dots, u_n),$$

поскольку вектор v_U является линейной комбинацией векторов u_i. Единственным ненулевым элементом первой строки и первого столбца в матрице Грама $G_{(v_{U^\perp}, u_1, u_2, \dots, u_n)}$ является квадрат длины $|v_{U^\perp}|^2$, стоящий в левом верхнем углу. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}^2(v,\, u_1, u_2, \dots, u_n) = \det{}^2(v_{U^\perp},\, u_1, u_2, \dots, u_n) = \varGamma_{(v_{U^\perp}, u_1, u_2, \dots, u_n)} = \\ = |v_{U^\perp}|^2 \cdot \varGamma_u = |v_{U^\perp}|^2 \cdot \mathrm{Vol}^2(u_1, u_2, \dots, u_n).\end{aligned}$$

Таким образом, неориентированный евклидов объём параллелепипеда w равен произведению евклидова объёма основания u на длину опущенной на неё высоты:

$$\mathrm{Vol}(v,\, u_1, u_2, \dots, u_n) = |v_{U^\perp}| \cdot \mathrm{Vol}(u_1, u_2, \dots, u_n). \tag{6-22}$$

Пример 6.5 (формулы для расстояния и угла между вектором и пространством)
Формула (6-22) позволяет вычислять расстояние $\varrho(v, U)$ от конца вектора v до подпространства U, порождённого линейно независимыми векторами $u_1, u_2, \dots, u_n$, как

$$\varrho(v, U) = |v_{U^\perp}| = \varGamma_w / \varGamma_u. \tag{6-23}$$

Поскольку $|v_{U^\perp}| = |v| \cdot \sin\measuredangle(v, U)$, где $\measuredangle(v, U)$ это угол между вектором v и подпространством[1] U, мы заключаем, что

$$\sin\measuredangle(v, U) = \frac{|v_{U^\perp}|}{|v|} = \frac{\varGamma_w}{|v| \cdot \varGamma_u}. \tag{6-24}$$

Пример 6.6 (векторные произведения в $\mathbb{R}^3$)
Зафиксируем в $\mathbb{R}^3$ какой-нибудь ортонормальный базис (u_1, u_2, u_3) положительной ориентации. Ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы

$$(a, b, c) = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

[1]См. опр. 6.2 на стр. 98.

можно записать, раскладывая определитель по первому столбцу, как скалярное произведение

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) + a_2\cdot\left(-b_1c_3 + b_3c_1\right) + a_3\cdot(b_1c_2 - b_2c_1) = (a, [b,c])$$

вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$ с вектором

$$\begin{aligned}[][b,c] &\overset{\text{def}}{=} \left(b_2c_3 - b_3c_2,\, -b_1c_3 + b_3c_1,\, b_1c_2 - b_2c_1\right) = \\ &= \left(\det\begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2\end{pmatrix}\right),\end{aligned} \tag{6-25}$$

который называется *векторным произведением* векторов b и c. Поскольку

$$(b, [b,c]) = \det(b, b, c) = 0 \quad \text{и} \quad (, [b,c]) = \det(c, b, c) = 0\,,$$

вектор $[b, c]$ перпендикулярен обоим векторам b, c, а его длина

$$\left|[b,c]\right| = \frac{(a,[b,c])}{|a|\cdot\cos\measuredangle(a,[b,c])} = \frac{\mathrm{Vol}(a,b,c)}{h_a} = \mathrm{Vol}(b,c)$$

равна евклидовой площади параллелограмма, натянутого на векторы b, c. Если векторы b и c не пропорциональны, то вектор $[b, c] \neq 0$ и направлен так, что базис $[b, c], b, c$ положителен[1]. Если b и c пропорциональны, то $[b, c] = 0$. Это даёт однозначное геометрическое описание вектора $[b, c]$ в терминах векторов b, c, и показывает, что он не зависит от выбора ортонормального базиса, использованного для вычисления его координат в формуле (6-25). Иначе можно сказать, что вектор $[b, c] \in V$ является прообразом ковектора

$$\omega(\,*\,,\,b,\,c) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto \omega(a,b,c),$$

где ω — стандартная форма ориентированного объёма на $\mathbb{R}^3$, относительно задаваемого скалярным произведением изоморфизма между $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^{3^*}$ из форм. (6-14) на стр. 95.

Пример 6.7 (высшие векторные произведения)

Конструкция из прим. 6.6 переносится в старшие размерности следующим образом. Сопоставим каждому упорядоченному набору из $(n-1)$ векторов $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ в n-мерном ориентированном евклидовом пространстве V вектор $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] \in V$, длина которого равна евклидову объёму неориентированного $(n-1)$-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы v_i, и буде этот объём ненулевой, направление вектора $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] \in V$ перпендикулярно гиперплоскости, порождённой векторами v_i, и таково, что базис

$$[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}],\, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$$

положительно ориентирован. Иначе говоря, вектор $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] \in V$ является прообразом при изоморфизме $g : V \simeq V^*$ из форм. (6-14) на стр. 95 от ковектора

$$\omega(\,*\,, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \omega(u,, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}),$$

где ω — ориентирующая форма объёма на V. Таким образом, в $\mathbb{R}^4$ имеются *тройные произведения* $[v_1, v_2, v_3]$, в $\mathbb{R}^5$ — *четверные произведения* $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ и т. д.

[1] Т. е. направленный вдоль вектора $[b, c]$ буравчик *ввинчивается* при повороте от b к c по кратчайшей дуге.

Упражнение 6.9. Запишем координаты векторов $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ по строкам матрицы A размера $(n-1)\times n$ и обозначим через A_i взятый со знаком $(-1)^i$ определитель $(n-1)\times(n-1)$-подматрицы, дополнительной к i-тому столбцу, как в n° 5.4.3 на стр. 80. Покажите, что

$$[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] = (A_1, A_2, \dots, A_n) \tag{6-26}$$

и что векторное произведение $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]$ кососимметрично и линейно по каждому из аргументов.

6.5. Сферы. ГМТ x, удалённых от заданной точки p на заданное расстояние $r > 0$, называется *сферой* радиуса r с центром в p и обозначается

$$S(p, r) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid (\overrightarrow{px}, \overrightarrow{px}) = r^2\}. \tag{6-27}$$

ГМТ x, удалённых от заданной точки p не далее, чем на заданное расстояние $r > 0$, называется *шаром* радиуса r с центром в p и обозначается

$$B(p, r) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid (\overrightarrow{px}, \overrightarrow{px}) \leqslant r^2\}. \tag{6-28}$$

Пример 6.8 (описанная сфера симплекса)
Если точки $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$ не лежат в одной гиперплоскости, то через них проходит единственная сфера, называемая *описанной сферой симплекса* $[p_0, p_1, \dots, p_n]$. В самом деле, ГМТ x, равноудалённых от всех точек p_i, является пересечением n аффинных гиперплоскостей — срединных перпендикуляров к n отрезкам $[p_0, p_i]$ с $1 \leqslant i \leqslant n$. Это пересечение задаётся системой из n линейных неоднородных уравнений[1]

$$(\overrightarrow{p_0 p_i}, x) = \frac{(p_i, p_i) - (p_0, p_0)}{2}$$

на n-мерный вектор x. Поскольку векторы $\overrightarrow{p_0 p_i}$ линейно независимы, левые части этих уравнений линейно независимы, и по предл. 5.3 на стр. 77 такая система имеет единственное решение c, которое и является центром описанной сферы.

Предложение 6.4
Пересечение сферы (соотв. шара) радиуса r с центром в p с аффинным подпространством Π, находящимся от точки p на расстоянии ϱ, пусто при $\varrho > r$, а при $\varrho \leqslant r$ представляет собою сферу (соотв. шар) радиуса $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$ в подпространстве Π с центром в ортогональной проекции p_Π точки p на подпространство Π. При $\varrho = r$ эта сфера (соотв. шар) вырождается в одну точку p_Π.

Доказательство. Пересечение $S(p, r) \cap \Pi$ задаётся внутри Π уравнением, которое получается подстановкой $\overrightarrow{px} = \overrightarrow{pp_\Pi} + \overrightarrow{p_\Pi x}$ в уравнение сферы (6-27) и имеет вид $\left(\overrightarrow{p_\Pi x}, \overrightarrow{p_\Pi x}\right) = r^2 - \varrho^2$. □

Упражнение 6.10. Покажите, что сфера с диаметром $[a, b]$ представляет собою ГМТ, из которых отрезок $[a, b]$ виден под прямым углом, т. е.

$$S\left((a+b)/2, |a-b|/2\right) = \{x \mid (\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}) = 0\}.$$

[1] См. формулу (6-9) на стр. 92.

6.5.1. Касательные. Аффинное подпространство Π, пересекающее сферу $S(p,r)$ ровно в одной точке $q \in S(p,r)$, называется *касательным* к сфере $S(p,r)$ в точке q. Наибольшее по включению из касательных подпространств к $S(p,r)$ в заданной точке $q \in S(p,r)$ это гиперплоскость, проходящая через точку q перпендикулярно вектору $\overrightarrow{pq}$. Она называется *касательной гиперплоскостью* к сфере $S(p,r)$ в точке $q \in S(p,r)$ и обозначается

$$T_q S(p,r) = \{x \mid \left(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{qx}\right) = 0\} = \{x \mid \left(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{px}\right) = r^2\} \qquad (6\text{-}29)$$

(второе описание получается из первого подстановкой $\overrightarrow{qx} = \overrightarrow{px} - \overrightarrow{pq}$).

6.5.2. Степень точки относительно сферы. Число

$$\deg_{S(p,r)} q \overset{\text{def}}{=} |pq|^2 - r^2$$

называется *степенью* точки q относительно сферы $S(p,r)$. Обратите внимание, что

$$\begin{aligned} \deg_{S(p,r)} q &< 0 \quad \text{при } q \in B(p,r) \smallsetminus S(p,r), \\ \deg_{S(p,r)} q &= 0 \quad \text{при } q \in S(p,r), \\ \deg_{S(p,r)} q &> 0 \quad \text{при } q \notin B(p,r). \end{aligned}$$

В последнем случае степень точки q относительно сферы $S(p,r)$ есть квадрат длины отрезка опущенной на сферу из точки q касательной прямой ℓ, заключённого между точкой q и точкой касания (см. рис. 6⋄3).

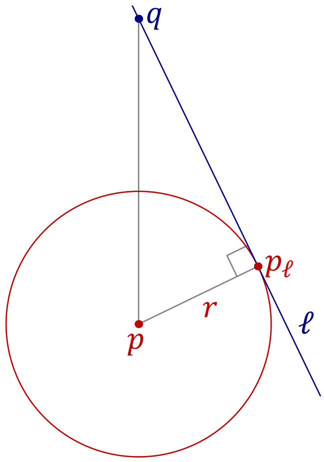

Рис. 6⋄3.

Предложение 6.5

Пусть прямая ℓ проходит через точку q и пересекает сферу $S(p,r)$ в точках t_1 и t_2 или касается её в точке $t_1 = t_2$. Тогда $\deg_{S(p,r)} q = (\overrightarrow{qt_1}, \overrightarrow{qt_2}) = |qt_1| \cdot |qt_2|$ (см. рис. 6⋄4).

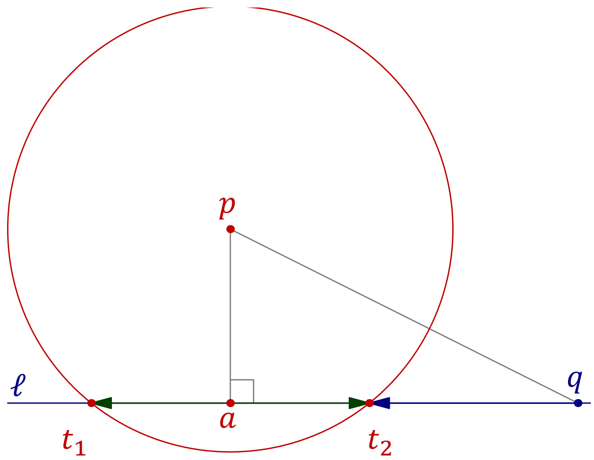

Рис. 6⋄4. $\deg_{S(p,r)} q = |qt_1| \cdot |qt_2|$.

Доказательство. Обозначим через a ортогональную проекцию центра сферы p на прямую ℓ. Согласно предл. 6.4 $\overrightarrow{at_2} = -\overrightarrow{at_1}$. Поэтому $(\overrightarrow{qt_1}, \overrightarrow{qt_2}) = (|qa| + |at_1|) \cdot (|qa| - |at_1|) = |qa|^2 - |at_1|^2 = |pq|^2 - |pa|^2 - |at_1|^2 = |pq|^2 - |pt_1|^2 = \deg_{S(p,r)} q$. □

Упражнение 6.11 (радикальная ось). Покажите, что ГМТ, имеющих равные степени относительно двух данных сфер $S(p_1, r_1)$ и $S(p_2, r_2)$, представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную линии центров (т. е. прямой (p_1, p_2)).

6.5.3. Поляры. Прямая (q,a), проходящая через точку $q \in S(p,r)$ и произвольную точку $a \neq q$, касается сферы в точке q , если и только если $\left(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{qa}\right) = 0$. Подставляя в это равенство $\overrightarrow{qa} = \overrightarrow{pq} - \overrightarrow{pa}$, получаем равносильное равенство

$$\left(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pa}\right) = r^2 . \tag{6-30}$$

Это соотношение, рассматриваемое как линейное неоднородное уравнение на a при фиксированном $q \in S(p,r)$, задаёт касательную гиперплоскость $T_q S(p,r)$ из (6-29). Если же воспринимать (6-30) как уравнение на q при фиксированном $a \neq p$, то оно задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{pa}$ и пересекающую прямую (pa) в точке b с радиус вектором

$$\overrightarrow{pb} = r^2 \frac{\overrightarrow{pa}}{(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pa})}$$

и удалённой от p на расстояние $r^2/|pa|$ в сторону точки a (см. рис. 6◇5). Эта гиперплоскость называется *полярной гиперплоскостью* (или *полярой*) точки a относительно сферы $S(p,r)$. В свою очередь, точка a называется *полюсом* этой гиперплоскости. Поляра точки $a \notin B(p,r)$ может быть описана как гиперплоскость, высекающая из сферы $S(p,r)$ её видимый из точки a контур[1] (см. рис. 6◇5). Точки, лежащие на сфере, характеризуются как точки, лежащие на своих полярах, а отличные от p точки внутри шара $B(p,r)$ — как точки, поляры которых не пересекают сферы.

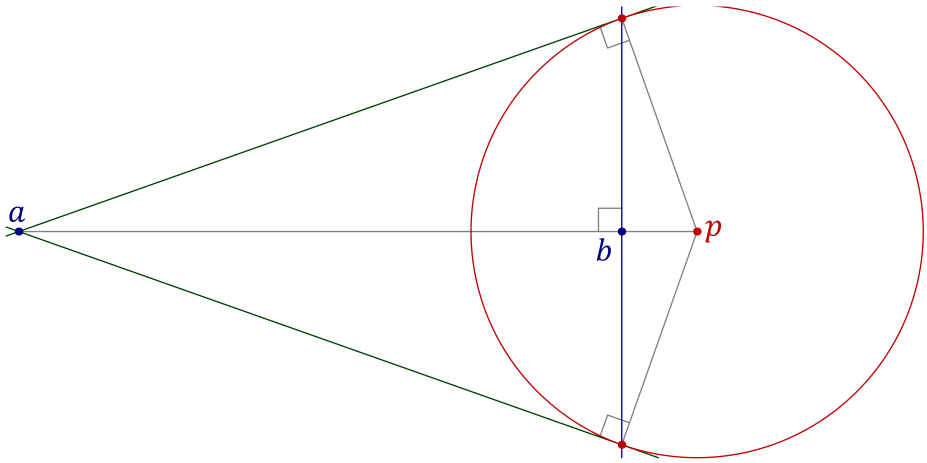

Рис. 6◇5. Полюс и поляра.

Предложение 6.6 (полярная двойственность)

Для любых точек x и y, отличных от центра сферы, точка x лежит на поляре точки y тогда и только тогда, когда точка y лежит на поляре точки x.

Доказательство. Оба условия записываются одним и тем же уравнением $\left(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{py}\right) = r^2$. □

Определение 6.3 (сопряжённые и инверсные точки)

Точки x и y называются *сопряжёнными* относительно сферы $S(p,r)$, если они удовдлетворяющие условиям предл. 6.6, т. е. $\left(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{py}\right) = r^2$. Сопряжённые точки a и b называются *инверсными*, если прямая (a,b) проходит через центр сферы p, т. е. $\overrightarrow{pb} = r^2\overrightarrow{pa}/(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pa})$.

[1] Т. е. ГМТ касания со сферой всевозможных касательных, проходящих через точку a.

6.5.4. Инверсия. Отображение, переводящее каждую точку $a \neq p$ в инверсную ей точку

$$\sigma_{p,r} : \mathbb{R}^n \smallsetminus p \to \mathbb{R}^n \smallsetminus p\,, \quad a \mapsto p + \frac{r^2 \cdot \overrightarrow{pa}}{(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pa})}\,, \tag{6-31}$$

называется *инверсией* относительно сферы $S(p,r)$. Инверсия является инволюцией[1] на множестве всех точек, отличных от p, и сфера $S(p,r)$ состоит в точности из неподвижных точек инверсии $\sigma_{p,r}$. Инверсия переводит в себя каждое аффинное подпространство Π, проходящее через центр сферы, и действует на нём как инверсия относительно сферы $\Pi \cap S(p,r)$.

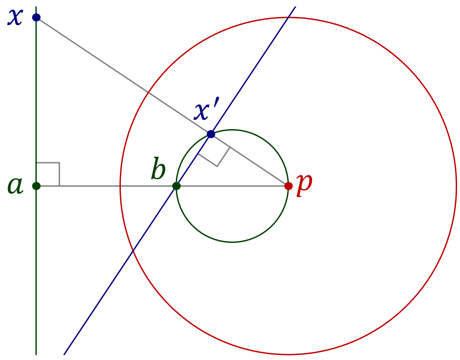

Рис. 6◇6. Сфера, инверсная плоскости.

В силу полярной двойственности каждая отличная от центра инверсии точка $b \neq p$ лежит на полярах всех сопряжённых с нею точек. Последние образуют гиперплоскость, проходящую через инверсную к b точку $a = \sigma_{p,r}(b)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{pa}$. Поляра любой точки x из этой гиперплоскости проходит через инверсную к x точку $x' = \sigma_{p,r}(x)$ и точку b, как на рис. 6◇6. Таким образом, инверсия $\sigma_{p,r}$ переводит гиперплоскость, проходящую через точку a перпендикулярно вектору $\overrightarrow{pa}$, в ГМТ x', из которых отрезок $[p,b]$ виден под прямым углом, т. е. в сферу с диаметром $[p,b]$. Поскольку инверсия обратна самой себе, то и наоборот, проходящая через точку p сфера с диаметром $[p,b]$ переходит в полярную точке b гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{pb}$ и проходящую через точку $a = \sigma_{p,r}(b)$.

Каждая не проходящая через точку p сфера C переводится инверсией $\sigma_{p,r}$ в сферу, гомотетичную сфере C относительно p с коэффициентом r^2 / δ, где $\delta = \deg p$ это степень точки p относительно сферы C, см. рис. 6◇7. Действительно, если проходящая через p прямая пересекает S в точках x_1, x_2, то $|px_1| \cdot |px_2| = \delta$ по предл. 6.5 на стр. 101, и для точек x_1', x_2', гомотетичных точкам x_1, x_2 относительно p с коэффициентом r^2 / δ, выполняются равенства

$$|px_1| \cdot |px_2'| = |px_1| \cdot |px_2| \cdot r^2 / \delta = r^2\,,$$
$$|px_2| \cdot |px_1'| = |px_2| \cdot |px_1| \cdot r^2 / \delta = r^2\,,$$

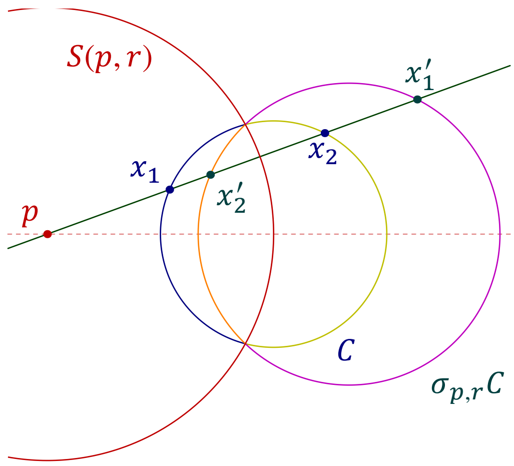

Рис. 6◇7. Инверсия $\sigma_{p,r}$ переводит сферу C в гомотетичную ей относительно точки p сферу.

означающие, что $\sigma_{p,r}(x_1) = x_2'$, а $\sigma_{p,r}(x_2) = x_1'$. Обратите внимание, что порядок точек поменялся, и что центр сферы S не обязан переводиться инверсией $\sigma_{p,r}$ в центр сферы $\sigma_{p,r}(S)$.

Упражнение 6.12. Пусть радиусы r_1, r_2 двух сфер с центрами в точках c_1, c_2 связаны равенством $r_1^2 + r_2^2 = |c_1, c_2|^2$. Покажите, что при инверсии относительно любой из сфер вторая сфера переходит в себя, и найдите образ её центра.

[1] Т. е. обратной самой себе биекцией.

Лемма 6.1

Для произвольных двух инверсий σ_1 и σ_2 относительно не проходящих через центры друг друга сфер $S_1 = S(c_1, r_1)$ и $S_2 = S(c_2, r_2)$ выполняется равенство $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_{\sigma_1(S_2)}$, означающее, что инверсия σ_1 переводит любую пару точек, инверсных относительно сферы S_2, в пару точек, инверсных относительно сферы $\sigma_1(S_2)$ (ср. с упр. 3.23 на стр. 53).

Доказательство. Согласно сл. 3.8 на стр. 51 инверсность точек p, q относительно сферы S_2 означает, что все проходящие через p и q окружности и прямая (pq) пересекают сферу S_2 под прямым углом. Поскольку инверсия σ_1 биективно переводит эти окружности и прямую в прямую и окружности, проходящие через точки $\sigma_1(p)$ и $\sigma_1(q)$, и сохраняет углы между окружностями и прямыми[1], все проходящие через $\sigma_1(p)$ и $\sigma_1(q)$ окружности и прямая перпендикулярны сфере $\sigma_1(S_2)$, что означает инверсность точек $\sigma_1(p)$ и $\sigma_1(q)$ относительно сферы $\sigma_1(S_2)$. □

Пример 6.9 (стереографическая проекция)

Стереографическая проекция $s_z : S \smallsetminus z \to E_z$ сферы $S = S(p, r)$ из лежащей на ней точки $z \in S(p, r)$ на экваториальную гиперплоскость E_z, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{zp}$, совпадает с действием на сферу $S(p, r)$ инверсии $\sigma_{z, r\sqrt{2}}$ относительно сферы $S\left(z, r\sqrt{2}\right)$ с центром в точке z, которая проходит через экватор $E_z \cap S(p, r)$ исходной сферы, как на рис. 6◇8. В частности, любая сфера $S' = H \cap S(p, r)$, высекаемая из сферы $S(p, r)$ произвольной не проходящей через z аффинной гиперплоскостью H, перейдёт при стереографической проекции в гомотетичную сфере S' относительно точки z сферу.

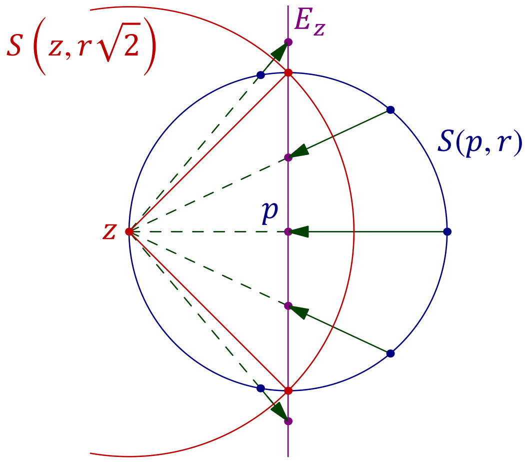

Рис. 6◇8. Стереографическая проекция $s_z : S(p, r) \smallsetminus z \to E_z$ действует на сферу как инверсия $\sigma_{z, r\sqrt{2}}$.

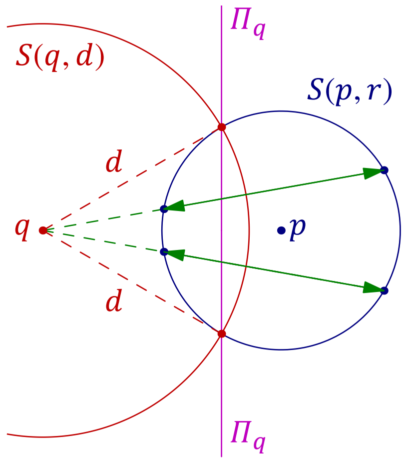

Рис. 6◇9. Инверсия сферы переставляет пары коллинеарных центру инверсии точек.

Пример 6.10 (инверсия на сфере)

Всякая точка q, лежащая снаружи от данной $(n-1)$-мерной сферы $S = S(p, r) \subset \mathbb{R}^n$, определяет инволютивное[2] преобразование $\sigma_q : S \to S$, которое тождественно действует на точках пересечения $S \cap \Pi_q$ сферы S с полярной гиперплоскостью Π_q точки q и переводит каждую точку $x \in S \smallsetminus \Pi_q$ во вторую, отличную от x точку пересечения сферы S с прямой (qx), как на рис. 6◇9.

[1]См. предл. 3.6 на стр. 51.

[2]Т. е. обратное самому себе.

Эта инволюция называется *инверсией* сферы S с центром в q, поскольку совпадает с ограничением на сферу S инверсии относительно сферы $S' = S(q,d)$ с центром в q и квадратом радиуса $d^2 = \deg_S p = |p,q|^2 - r^2$, равным степени точки q относительно сферы S. Сфера S' пересекает сферу S по той же $(n-2)$-мерной сфере, что и гиперплоскость Π_q, см. рис. 6◇9.

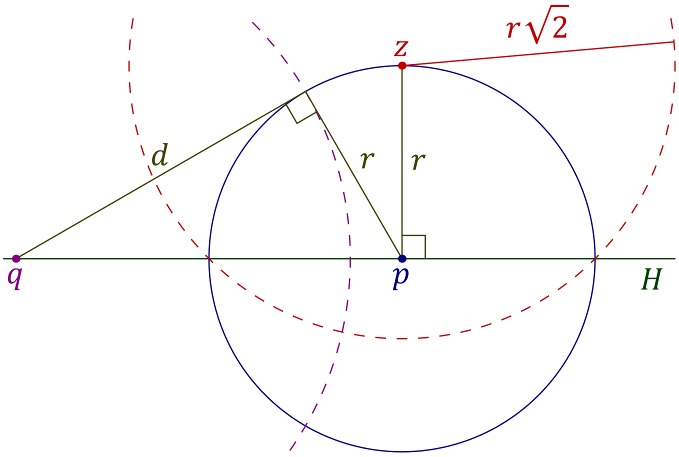

Рис. 6◇10. $\left(r\sqrt{2}\right)^2 + d^2 = 2r^2 + |q,p|^2 - r^2 = |q,p|^2 + r^2 = |q,z|^2$.

Инверсия $\sigma_{q,d}$ относительно сферы S' переводит в себя каждую проходящую через точку q гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^n$, действуя в ней как инверсия относительно сферы $S' \cap H$. Если гиперплоскость H является экваториальной для сферы S, т. е. проходит через её центр p, то действия инверсий $\sigma_{q,d} : H \to H$ гиперплоскости H и $\sigma_q : S \to S$ сферы S переводятся одно в другое стереографической проекцией $s_z : S \smallsetminus z \to H$ из каждой из двух точек $z \in S$ с $\overrightarrow{pz} \perp H$, как в предыдущем прим. 6.9. Действительно, проекция s_z является ограничением на сферу S инверсии $\sigma_{z,r\sqrt{2}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которая переводит сферу $S' = S(q,d)$ в себя по упр. 6.12, т. к. сумма квадратов радиусов сфер $S\left(z, r\sqrt{2}\right)$ и $S(q,d)$ равна квадрату рассмояния между их центрами, см. рис. 6◇10. Поэтому согласно лем. 6.1 во всём пространстве $\mathbb{R}^n$ выполнено равенство $\sigma_{z,r\sqrt{2}} \circ \sigma_{q,d} = \sigma_{q,d} \circ \sigma_{z,r\sqrt{2}}$.

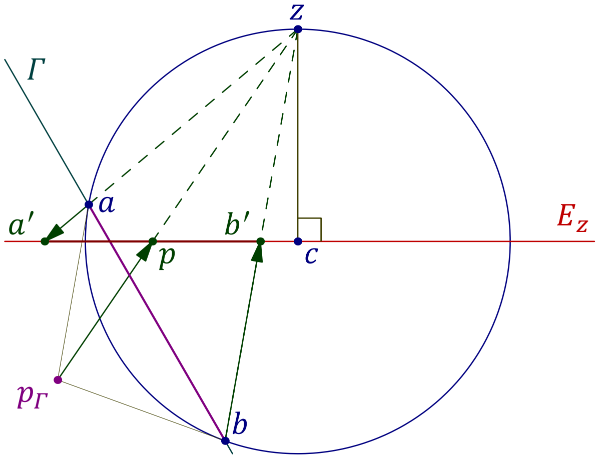

Рис. 6◇11. $|p,a'| = |p,b'|$ для $p = s_z(p_\Gamma)$, $a' = s_z(a)$, $b' = s_z(b)$.

Упражнение 6.13. Покажите, что проекция сферы $S(c,r)$ из точки $z \in S$ на перпендикулярную вектору $\overrightarrow{zc}$ экваториальную гиперплоскость E_z переводит сферу, высекаемую из $S(c,r)$ не проходящей через c аффинной гиперплоскостью Γ, в сферу с центром в той точке гиперплоскости E_z, куда проектируется из z полюс p_Γ гиперплоскости Γ, см. рис. 6◇11.

Упр. 6.4. Значение линейной формы g_{e_j} на базисном векторе e_α равно (e_α, e_j), и значит, столбец координат этой формы в двойственном базисе e^* состоит из произведений (e_α, e_j).

Упр. 6.6. Если $v \in U \cap U^\perp$, то $(v, v) = 0$, откуда $v = 0$.

Упр. 6.9. Для любого вектора a выполняется равенство $\omega(a,\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = (a, w)$ (ср. со вторым правилом Крамера[1]).

Упр. 6.10. Уравнение $\big(x - (a+b)/2, x - (a+b)/2\big) = \big((b-a)/2, (b-a)/2\big)$, задающее сферу $S\big((a+b)/2, |a-b|/2\big)$, можно переписать как

$$\big((x-a) + (x-b), (x-a) + (x-b)\big) = \big((x-a) - (x-b), (x-a) - (x-b)\big)\,.$$

После раскрытия скобок и сокращения скалярных квадратов это превращается в уравнение

$$(x-a, x-b) = 0\,.$$

Упр. 6.12. Радиус каждой из сфер равен степени её центра относительно другой сферы. Центр каждой из сфер перейдёт при инверсии относительно другой сферы в точку пересечения радикальной гиперплоскости[2] с линией центров.

[1] См. предл. 5.5 на стр. 81.

[2] Т. е. ГМТ, имеющих равные степени относительно обеих сфер. В данном случае эта гиперплоскость линейно порождается пересечением сфер.