§4. Многомерие

4.1. Базисы и размерность. Рассмотрим произвольное векторное пространство V над любым полем $\Bbbk$. Будем говорить, что вектор $v \in V$ *линейно выражается* через векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$, если $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$ для некоторых $\lambda_i \in \Bbbk$. Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов $w_i \in V$ с коэффициентами $\lambda_i \in \Bbbk$. Набор векторов $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$ называется *порождающим* векторное пространство V, если каждый вектор $v \in V$ линейно через него выражается. Векторное пространство, порождённое конечным набором векторов, называется *конечномерным*. Порождающий набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ называется *базисом* векторного пространства V, если любой вектор $v \in V$ линейно выражается через него *единственным* образом, т. е. если из равенства

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

вытекает, что $x_i = y_i$ для всех i. Коэффициенты x_i единственного линейного выражения

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

называются *координатами* вектора v в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Например, в координатном векторном пространстве $\Bbbk^n$ из прим. 1.2 на стр. 9 n векторов

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{4-1}$$

с единицей на i-том месте и нулями в остальных местах образуют базис, поскольку произвольный вектор $v \in \Bbbk^n$ линейно выражается через них единственным способом:

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n\,. \tag{4-2}$$

Базис (4-1) называются *стандартным* базисом координатного пространства $\Bbbk^n$. Вскоре мы убедимся, что любое конечномерное векторное пространство V обладает базисом, причём все базисы в V состоят из одинакового числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$. Таким образом, $\dim \Bbbk^n = n$.

4.1.1. Линейная зависимость. Векторы $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \tag{4-3}$$

вытекает, что все $\lambda_i = 0$. Наоборот, если существует линейная комбинация (4-3), в которой хоть один коэффициент $\lambda_i \neq 0$, то векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ называются *линейно зависимыми*. Если между векторами есть линейная зависимость, то каждый вектор, входящий в неё с ненулевым коэффициентом, линейно выражается через остальные векторы. Например, если $\lambda_m \neq 0$ в линейной зависимости (4-3), то

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1}\,.$$

Наоборот, любое линейное выражение вида $v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}$ можно воспринимать как линейную зависимость $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0$. В частности, любой набор векторов, содержащий нулевой вектор, линейно зависим: $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot v = 0$ для произвольного $v \in V$.

Лемма 4.1
Порождающий векторное пространство V набор векторов $\{e_\nu\}$ является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.

Доказательство. Если $\sum \lambda_i e_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $v = \sum x_i e_i$ допускает *другое* выражение $v = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$ через векторы e_i. Наоборот, любые два различных разложения $v = \sum x_i e_i = \sum y_i e_i$ влекут линейную зависимость $\sum (x_i - y_i) v_i = 0$. □

Лемма 4.2 (лемма о замене)
Если векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$ порождают пространство V, а $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ линейно независимы, то $m \geqslant k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор векторов

$$u_1, u_2, \dots, u_k, w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_m,$$

полученный заменой первых k из них на векторы u_i, тоже порождает V.

Доказательство. Пусть $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$. Так как векторы u_i линейно независимы, $u_1 \neq 0$ и среди коэффициентов x_i есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы w_i так, чтобы $x_1 \neq 0$. Поскольку вектор w_1 линейно выражается через u_1 и $w_2, \dots, w_m$:

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m,$$

векторы $u_1, w_2, w_3, \dots, w_m$ порождают V. Далее действуем по индукции. Пусть для очередного $i < k$ векторы $u_1, u_2, \dots, u_i, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_m$ порождают V. Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + x_{i+2} w_{i+2} + \dots + x_m w_m.$$

В силу линейной независимости векторов u_ν вектор u_{i+1} нельзя линейно выразить только через векторы $u_1, u_2, \dots, u_i$. Поэтому в предыдущем разложении присутствует с ненулевым коэффициентом хоть один из оставшихся векторов w_j. Следовательно, $m > i$ и мы можем занумеровать оставшиеся w_j так, чтобы $x_{i+1} \neq 0$. Теперь, как и на первом шагу, вектор w_{i+1} линейно выражается через векторы $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}, \dots, w_m$. Тем самым, эти векторы линейно порождают V, что воспроизводит индуктивное предположение. □

Следствие 4.1 (теорема о базисе)
Все базисы любого конечномерного векторного пространства V состоят из одинакового количества векторов, и каждый порождающий V набор векторов содержит в себе некоторый базис, а каждый линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса.

Доказательство. Поскольку векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, во всех базисах одинаковое число векторов. Если набор векторов порождает V, то последовательно выкидывая из него векторы, линейно выражающиеся через остальные, мы придём к линейно независимому порождающему набору, т. е. к базису. Если задан линейно независимый набор векторов и в пространстве V есть вектор, который линейно не выражается через этот набор, то, добавляя такой вектор к набору, мы получим линейно независимый набор векторов на единицу большей длины. По лем. 4.2 длины линейно независимых наборов в конечномерном векторном пространстве ограничены сверху. Поэтому после конечного числа таких добавлений мы получим порождающий линейно независимый набор, т. е. базис. □

Следствие 4.2
В n-мерном векторном пространстве V всякий линейно независимый набор из n векторов, а также всякий порождающий набор из n векторов являются базисами.

Доказательство. По лем. 4.2 при замене любого базиса любыми n линейно независимыми векторами получится порождающий набор, т. е. тоже базис. По сл. 4.1 любой порождающий набор из n векторов содержит в себе некоторый базис. Так как этот базис тоже состоит из n векторов, он совпадает с исходным набором. □

Предложение 4.1
Всякое n-мерное векторное пространство V над полем $\Bbbk$ изоморфно координатному пространству $\Bbbk^n$. Линейные изоморфизмы $\Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$ взаимно однозначно соответствуют базисам в V.

Доказательство. Если задан линейный изоморфизм $F : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^n$, то векторы[1] $v_i = F(e_i)$ образуют базис пространства V, и разным линейным отображениям отвечают разные базисы, поскольку из равенств $F(e_i) = G(e_i)$ для всех i вытекает, что и для любого вектора $v = \sum x_i e_i \in V$

$$F(v) = F\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i G(e_i) = G\left(\sum x_i e_i\right) = G(v).$$

Наоборот, для любого базиса $v_1, v_2, \dots, v_n$ пространства V отображение

$$F : \Bbbk^n \to V, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n,$$

линейно, биективно и переводит e_i в v_i для всех i. □

Пример 4.1 (пространство функций)
Множество $\Bbbk^X$ всех функций $f : X \to \Bbbk$ на произвольном множестве X со значениями в произвольном поле $\Bbbk$ образует векторное пространство, в котором сложение функций и их умножение на числа задаётся обычными правилами:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &: x \mapsto f_1(x) + f_2(x) \\ \lambda f &: x \mapsto \lambda \cdot f(x). \end{aligned}$$

Для n-элементного множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ пространство функций $\Bbbk^X$ изоморфно отображается на координатное пространство $\Bbbk^n$ сопоставлением функции f набора её значений $\big(f(1), f(2), \dots, f(n)\big)$. Этому изоморфизму отвечает базис из *δ-функций* $\delta_i : X \to \Bbbk$:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

4.2. Линейные отображения $F : U \to W$ между двумя векторными пространствами U и W над полем $\Bbbk$ также образуют векторное пространство, в котором

$$F + G : v \mapsto F(v) + G(v) \quad \text{и} \quad \lambda F : v \mapsto \lambda \cdot F(v).$$

Оно обозначается $\mathrm{Hom}(U, W)$ или $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W)$, когда надо подчеркнуть, о каком поле речь.

[1] Здесь и далее $e_1, e_2, \dots, e_n \in \Bbbk^n$ обозначает стандартный базис в $\Bbbk^n$ из формулы форм. (4-1) на стр. 55.

4.2.1. Матричные обозначения. Если зафиксировать базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m \in W, \tag{4-4}$$

и для каждого $j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$ разложить $F(u_j)$ по базису $w_1, w_2, \dots, w_m$

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot f_{ij}\,, \tag{4-5}$$

то коэффициенты $\left(f_{ij}\right)$ этих разложений, организованные в прямоугольную таблицу по тем же правилам[1], как и в n° 2.4 на стр. 28

$$(F(u_1),\, F(u_2),\, \dots\ ,\, F(u_n)) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}\,. \tag{4-6}$$

называются *матрицей оператора F в базисах* (4-4). Таблица (4-6) сокращённо обозначается[2] F_{wu} или $\left(f_{ij}\right)$. Она полностью описывает действие линейного отображения F на любой вектор $v = \sum u_j x_j \in U$, поскольку

$$F(v) = F\Big(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} F(u_j) \cdot x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot f_{ij} x_j\,. \tag{4-7}$$

Если обозначить через

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)\,, \quad F(u) = \big(F(u_1),\, F(u_2),\, \dots\ ,\, F(u_n)\big)\,, \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

строки из векторов, а через

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

столбцы координат векторов v и $F(v)$ в базисах u и w соответственно, то связь между ними можно описать при помощи матричного умножения равенствами

$$v = ux\,, \quad F(v) = wy\,, \quad F(u) = wF_{wu}\,,$$

и вычисление (4-7) сократится до $F(v) = F(ux) = F(u)x = wF_{wu}x$, откуда $y = F_{wu}x$.

Упражнение 4.1. Убедитесь, что при сложении линейных отображений и умножении их на числа матрицы этих отображений поэлементно складываются и умножаются на числа.

---

[1] Напомню, что координаты вектора $F(u_j)$ записываются в j-тый столбец.

[2] Индексы w и u в обозначении F_{wu} указывают на зависимость этой матрицы от выбранных базисов. Для элемента, стоящего в пересечении i-той строки и j-того столбца матрицы F_{wu}, мы всегда используем обозначение f_{ij}, в котором для экономии места уже нет указаний на базисы, в которых написана матрица.

Предложение 4.2
При любом выборе базисов $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ и $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ отображение

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk), \quad F \mapsto F_{wu}, \tag{4-8}$$

является линейным изоморфизмом векторного пространства $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W)$ линейных отображений $F : U \to W$ с векторным пространством $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk) \simeq \Bbbk^{mn}$ матриц размера $m \times n$. В частности, $\dim \mathrm{Hom}(U, W) = \dim U \cdot \dim W$.

Доказательство. Вычисление (4-7) и упр. 4.1 показывают, что отображение (4-8) линейно и инъективно. Поскольку любая матрица $\left(f_{ij}\right)$ задаёт по формуле (4-7) линейное отображение $F : U \to W$, отображение (4-8) сюрьективно. □

4.2.2. Ядро и образ. С каждым линейным отображением $F : V \to W$ связаны векторные подпространства

$$\operatorname{im} F \stackrel{\text{def}}{=} F(V) = \{w \in W \mid \exists\, v \in V : F(v) = w\} \subset W \tag{4-9}$$

$$\ker F \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\} \subset V. \tag{4-10}$$

соответственно называемые *образом* и *ядром* линейного отображения F.

Упражнение 4.2. Убедитесь, что оба множества $\ker F$ и $\operatorname{im} F$ действительно являются векторными подпространствами.

Поскольку равенства $F(v_1) = F(v_2)$ и $F(v_1 - v_2) = 0$ для линейного отображения F эквивалентны, два вектора $v_1, v_2 \in V$ тогда и только тогда переводятся отображением F в один и тот же вектор $w = F(v_1) = F(v_2) \in \operatorname{im} F$, когда $v_1 - v_2 \in \ker F$. Иными словами,

$$F^{-1}\big(F(v)\big) = v + \ker F,$$

т. е. полный прообраз любого вектора $w \in \operatorname{im} F$ является *параллельным сдвигом* векторного подпространства $\ker F$ на произвольный вектор $v \in F^{-1}(w)$. В частности, мы получаем

Предложение 4.3
Линейное отображение F инъективно тогда и только тогда, когда $\ker F = 0$. □

Предложение 4.4
Если V конечномерно, то для любого линейного отображения $F : V \to W$

$$\dim \ker F + \dim \operatorname{im} F = \dim V. \tag{4-11}$$

Доказательство. Выберем базис $u_1, u_2, \dots, u_k \in \ker F$, дополним его векторами $e_1, e_2, \dots, e_m$ до базиса в V и покажем, что векторы $F(e_1)$, $F(e_2)$, … , $F(e_m)$ образуют базис в $\operatorname{im} F$. Они порождают образ, т. к. для любого вектора $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j \in V$

$$F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j).$$

Они линейно независимы, поскольку равенство $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$ означает, что $\sum \lambda_i e_i$ лежит в $\ker F$, т. е. является линейной комбинацией векторов u_i, что возможно только когда все $\lambda_i = 0$. □

Следствие 4.3
Следующие свойства линейного отображения $F : V \to V$ из пространства V в себя эквивалентны друг другу: (1) F изоморфизм (2) $\ker F = 0$ (3) $\operatorname{im} F = V$.

Доказательство. Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по предл. 4.4, а их одновременное выполнение равносильно (1) по предл. 4.3. □

4.3. Подпространства. Пересечение любого множества подпространств в произвольном векторном пространстве V также является подпространством в V.

Упражнение 4.3. Убедитесь в этом.

Пересечение всех подпространств, содержащих данное множество векторов $M \subset V$, называется *линейной оболочкой* множества M и обозначается $\operatorname{span}(M)$. Это наименьшее по включению векторное подпространство в V, содержащее M. Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из M. В самом деле, все такие линейные комбинации, очевидно, образуют векторное пространство и содержатся во всех векторных подпространствах, содержащих M.

Пример 4.2 (гиперплоскости)
Линейная оболочка $H = \operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ произвольных $(n-1)$ линейно независимых векторов в n-мерном векторном пространстве V является $(n-1)$-мерным подпространством. Такие подпространства называются *гиперплоскостями* в V. Если дополнить векторы v_i некоторым вектором v_n до базиса в V и обозначить через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ координаты относительно этого базиса, гиперплоскость H можно описать как ГМТ x удовлетворяющих линейному уравнению $x_n = 0$. Наоборот, ядро любого ненулевого линейного отображения $\xi : V \to \Bbbk$ представляет собою гиперплоскость, обозначаемую

$$\operatorname{Ann} \xi \stackrel{\text{def}}{=} \ker \xi = \{ v \in V \mid \xi(v) = 0 \} .$$

В самом деле, если $\xi \neq 0$, то $\dim \operatorname{im} \xi = 1$, а значит, $\dim \ker \xi = (n-1)$ по предл. 4.4. Таким образом, гиперплоскости в V это в точности множества решений линейных однородных уравнений $\xi(x) = 0$ для ненулевых линейных отображений $\xi : V \to \Bbbk$.

Упражнение 4.4. Покажите, что никакое векторное пространство над бесконечным полем не является объединением конечного числа своих гиперплоскостей.

4.3.1. Сумма подпространств. Объединение векторных подпространств обычно не является векторным пространством. Например, прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ являются одномерными векторными подпространствами координатной плоскости $\Bbbk^2$, но сумма лежащих в них векторов может не лежать в их объединении, например: $(1,0) + (0,1) = (1,1)$.

Упражнение 4.5. Покажите, что объединение двух подпространств является векторным пространством , если и только если одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения произвольного множества подпространств $U_\nu \subset V$ называется *суммой* подпространств U_ν и обозначается

$$\sum_\nu U_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span} \bigcup_\nu U_\nu .$$

Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1\,,\ u_2 \in U_2\}$$
$$U_1 + U_2 + U_3 = \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1\,,\ u_2 \in U_2\,,\ u_3 \in U_3\} \quad \text{и т. д.}$$

Определение 4.1
Подпространства $U_1, U_2 \subset V$ называются *трансверсальными*, если $U_1 \cap U_2 = 0$. Сумма трансверсальных подпространств называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2$. Трансверсальные подпространства U_1 и U_2 с $U_1 \oplus U_2 = V$, называются *дополнительными*.

Предложение 4.5
Подпространства $U_1, U_2 \subset V$ трансверсальны тогда и только тогда, когда каждый вектор $w \in U_1 + U_2$ имеет *единственное* представление в виде $w = u_1 + u_2$ с $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$.

Доказательство. Равенство $u_1' + u_2' = u_1'' + u_2''$, где $u_i', u_i'' \in U_i$, влечёт равенство

$$u_1' - u_1'' = u_2'' - u_2'\,,$$

левая часть которого лежит в U_1, а правая — в U_2. Поэтому $u_1' - u_1'' = u_2'' - u_2' \in U_1 \cap U_2$. Если $U_1 \cap U_2 = 0$, то $u_1' = u_1''$ и $u_2' = u_2''$. Если же пересечение $U_1 \cap U_2$ содержит ненулевой вектор u, то нулевой вектор $0 \in U_1 + U_2$ имеет два различных разложения $0 = 0 + 0 = u + (-u)$. □

Определение 4.2 (прямая сумма набора подпространств)
Сумма конечного набора подпространств $U_1, U_2, \dots, U_n \subset V$ называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$, если каждый вектор $w \in U_1 + U_2 + \dots + U_n$ имеет единственное представление в виде $w = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ с $u_i \in U_i$. Иначе можно сказать, что сумма подпространств $U_1, U_2, \dots, U_m \subset V$ является прямой тогда и только тогда, когда любой набор ненулевых векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$, где $u_i \in U_i$, линейно независим.

Упражнение 4.6. Покажите, что для того, чтобы сумма подпространств U_i была прямой, необходимо и достаточно, чтобы каждое подпространство U_i было трансверсально сумме всех остальных подпространств.

Например, если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис пространства V, то V является прямой суммой одномерных подпространств, порождённых векторами e_i.

4.3.2. Размерность суммы и пересечения. Из теоремы о базисе вытекает, что базис любого подпространства $U \subset V$ можно дополнить до базиса во всём пространстве, откуда, в частности, следует, что любое подпространство U в конечномерном пространстве V тоже конечномерно, и $\dim U \leqslant \dim V$. Разность $\operatorname{codim}_V U \overset{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$ называется *коразмерностью* подпространства U в V.

Предложение 4.6
Для любых конечномерных подпространств U_1, U_2 в произвольном[1] векторном пространстве V выполняется равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$.

[1] Не обязательно конечномерном.

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис $u_1, u_2, \dots, u_k$ в $U_1 \cap U_2$ и дополним его векторами $v_1, v_2, \dots, v_r$ и $w_1, w_2, \dots, w_s$ до базисов в подпространствах U_1 и U_2 соответственно. Достаточно показать, что векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$, $v_1, v_2, \dots, v_r$, $w_1, w_2, \dots, w_s$ образуют базис пространства $U_1 + U_2$. Ясно, что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$ и $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$ в отдельности линейно независим, в линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \dots + \eta_s w_s = 0$$

присутствуют как векторы v_i, так и векторы w_j. Перенося $u_1, u_2, \dots, u_k$, $v_1, v_2, \dots, v_r$ в одну часть, а $w_1, w_2, \dots, w_s$ — в другую, получаем равенство между вектором из U_1 и вектором из U_2, означающее, что этот вектор лежит в пересечении $U_1 \cap U_2$. Но тогда в его разложении по базисам пространств U_1 и U_2 нет векторов v_i и w_j — противоречие. □

Следствие 4.4
Для любых подпространств U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geqslant \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V)\,.$$

В частности, $U_1 \cap U_2 \neq 0$ при $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из предл. 4.6 и неравенства $\dim(U_1 + U_2) \leqslant \dim V$. □

Следствие 4.5
Трансверсальные векторные подпространства U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V дополнительны тогда и только тогда, когда $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$.

Доказательство. При $U_1 \cap U_2 = 0$, равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$ равносильно равенству $\dim(U_1 + U_2) = \dim V$, означающему, что $U_1 + U_2 = V$. □

4.4. Двойственность. Линейные отображения $\xi : V \to \Bbbk$ называются *линейными функционалами*[1] на пространстве V. Они образуют векторное пространство, традиционно обозначаемое

$$V^* \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$$

и называемое *двойственным* или *сопряжённым* к V.

Пример 4.3 (функционалы вычисления)
Пусть X — любое множество, и $V = \Bbbk^X$ — пространство всех функций $X \to \Bbbk$, как в прим. 4.1 на стр. 57. С каждой точкой $x \in X$ связан *функционал вычисления*[2]

$$\operatorname{ev}_x : \Bbbk^X \to \Bbbk, \quad f \mapsto f(x),$$

переводящий функцию $f : X \to \Bbbk$ в её значение $f(x) \in \Bbbk$ в точке x.

Упражнение 4.7. Убедитесь, что отображения $\operatorname{ev}_x : \Bbbk^X \to \Bbbk$ линейны и образуют занумерованный точками $x \in X$ базис пространства V^*, двойственного к пространству $V = \Bbbk^X$.

[1] А также *линейными формами* или *ковекторами*.
[2] Обозначение ev происходит от «*evaluation*».

4.4.1. Двойственный базис. С каждым базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V связан набор *координатных функционалов* $e_i^* \in V^*$. Функционал e_i^* сопоставляет вектору $v = \sum x_i e_i \in V$ значение i-той координаты этого вектора:

$$e_i^*(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_i\,.$$

В частности, значения функционала e_i^* на базисных векторах e_j суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases} \tag{4-12}$$

Упражнение 4.8. Убедитесь, что все отображения $e_i^* : V \to \Bbbk$ линейны.

Координатные функционалы $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ образуют базис пространства V^*, т. к. каждая линейная форма $\varphi : V \to \Bbbk$ единственным способом линейно выражается через них — а именно, с коэффициентами, равными значениям $\varphi(e_i)$ этой формы на базисных векторах пространства V. В самом деле, поскольку два линейных отображения $\varphi : V \to \Bbbk$ и $\psi = \sum x_\nu e_\nu^* : V \to \Bbbk$ равны тогда и только тогда, когда равны их значения на базисных векторах, и поскольку $\psi(e_i) = x_i$, равенство $\varphi = \sum x_\nu e_\nu^*$ равносильно равенствам $\varphi(e_i) = x_i$ для всех i. В частности, $\dim V = \dim V^*$.

Определение 4.3

Базисы $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in V$ и $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*) \in V^*$ называются *двойственными* базисами двойственных пространств V и V^*.

4.4.2. Канонический изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$. Конечномерные пространства V и V^* играют по отношению друг к другу абсолютно симметричные роли. А именно, каждый вектор $v \in V$ может рассматриваться как *функционал вычисления*

$$\mathrm{ev}_v : V^* \to \Bbbk\,, \quad \varphi \mapsto \varphi(v)\,.$$

Поскольку число $\varphi(v) \in \Bbbk$ линейно зависит как от v, так и от φ, сопоставление вектору v функционала вычисления ev_v задаёт *каноническое*[1] линейное отображение

$$\mathrm{ev} : V \to V^{**}\,, \quad v \mapsto \mathrm{ev}_v\,, \tag{4-13}$$

которое переводит любой базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V в базис пространства V^{**}, двойственный к базису $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ пространства V^*. Такое отождествление $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ позволяет рассматривать любую линейную форму $\Phi : V^* \to \Bbbk$ как функционал вычисления значений на некотором векторе $v \in V$, который однозначно определяется по форме Φ, а любой базис $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ пространства V^* — как набор координатных функционалов e_i^* для однозначно задаваемого формами φ_ν базиса[2] $e_1, e_2, \dots, e_n$ в пространстве V. Чтобы подчеркнуть симметрию между векторами и ковекторами, мы будем называть число

$$\langle\, \varphi\,,\, v\,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) = \mathrm{ev}_v(\varphi) \in \Bbbk \tag{4-14}$$

свёрткой ковектора φ с ветором v.

[1] Т. е. не прибегающее к фиксации каких-либо дополнительных данных (базиса, скалярного произведения и т. п.)

[2] А именно, для двойственного к $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ базиса в $V^{**} = V$

4.4.3. Аннуляторы. Каждое множество ковекторов $M \subset V^*$ можно воспринимать как систему однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, $\xi \in M$, на вектор $x \in V$. Множество всех решений этой системы обозначается

$$\mathrm{Ann}(M) = \{ v \in V \mid \xi(v) = 0 \quad \forall\, \xi \in M \} \subset V$$

и называется *аннулятором* множества ковекторов $M \subset V^*$. Будучи пересечением ядер линейных отображений $\xi : V \to \Bbbk$ по всем $\xi \in M$, аннулятор произвольного множества ковекторов $M \subset V^*$ всегда является векторным подпространством в V.

Двойственным образом, для любого множества векторов $N \subset V$ положим

$$\mathrm{Ann}(N) = \{ \varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \;\forall\, v \in N \} \subset V^* .$$

Алгебраически, $\mathrm{Ann}(N)$ это множество всех линейных уравнений $\xi(x) = 0$, решения которых содержат все векторы из N. Геометрически — это множество всех проходящих через N гиперплоскостей в V. Вместе с тем, как и выше, $\mathrm{Ann}(N) \subset V^*$ есть множество решений системы однородных уравнений $\mathrm{ev}_v(y) = 0$, $v \in N$, на ковектор $y \in V^*$ или, что то же самое, пересечение гиперплоскостей $\mathrm{Ann}(v) \subset V^*$ по всем $v \in N$. В частности, $\mathrm{Ann}(N)$ является векторным подпространством в V^*.

Упражнение 4.9. Убедитесь, что аннулятор любого множества совпадает с аннулятором его линейной оболочки.

Предложение 4.7
$\dim U + \dim \mathrm{Ann}\, U = \dim V$ для любого подпространства $U \subset V$.

Доказательство. Выберем базис $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ и дополним его векторами $w_1, w_2, \dots, w_m$ до базиса в V (таким образом, $\dim V = k + m$) и обозначим через

$$u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*, w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in V^*$$

двойственный базис. Тогда $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in \mathrm{Ann}\, U$, поскольку для любого $v = \sum x_i u_i \in U$

$$w_\nu^*(v) = w_\nu^* \left(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k \right) = \sum x_i \cdot w_\nu^*(u_i) = 0 .$$

Так как любой ковектор $\varphi = \sum y_i u_i^* + \sum z_j w_j^* \in \mathrm{Ann}\, U$ имеет $y_i = \varphi(u_i) = 0$, базисные ковекторы $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*$ линейно порождают $\mathrm{Ann}\, U$, а значит, образуют там базис. Тем самым, $\dim \mathrm{Ann}\, U = m = \dim V - \dim U$. □

Следствие 4.6
$\mathrm{Ann}\, \mathrm{Ann}\, U = U$ для любого подпространства $U \subset V$.

Доказательство. $U \subset \mathrm{Ann}\, \mathrm{Ann}\, U$ и по предл. 4.7 $\dim \mathrm{Ann}\, \mathrm{Ann}\, U = \dim U$. □

Замечание 4.1. Для любого подпространства $U \subset V^*$ также выполняются равенства

$$\dim U + \dim \mathrm{Ann}\, U = \dim V \quad \text{и} \quad \mathrm{Ann}\, \mathrm{Ann}\, U = U .$$

Они получаются, если в предл. 4.7 и сл. 4.6 взять в них взять в качестве V двойственное пространство V^* и воспользоваться каноническим отождествлением V^{**} с V.

Замечание 4.2. На языке линейных уравнений предл. 4.7 означает, что каждое подпространство коразмерности m в V можно задать системой из m линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из m линейно независимых уравнений на пространстве V представляет собою векторное подпространство коразмерности m. А сл. 4.6 утверждает, что любая линейная форма, зануляющаяся на множестве решений произвольно заданной системы линейных однородных уравнений линейно выражается через уравнения этой системы.

Упражнение 4.10. Покажите, что $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} N = \operatorname{span} N$ для любого подмножества $N \subset V$.

Теорема 4.1

Соответствие $U \leftrightarrow \operatorname{Ann} U$ задаёт биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^*. Эта биекция оборачивает включения:

$$U \subset W \iff \operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W\,,$$

и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}(V)$ множество всех подпространств векторного пространства V. Равенство $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = U$ означает, что отображения, сопоставляющие подпространству его аннулятор в двойственном пространстве:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(V) \arrow[r, bend left, "U\mapsto \operatorname{Ann} U"] & \mathcal{S}(V^*) \arrow[l, bend left, "\operatorname{Ann} W \mapsfrom W"] \end{tikzcd}$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Импликация $U \subset W \Rightarrow \operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W$ очевидна. Если взять в ней в качестве U и W, соответственно, подпространства $\operatorname{Ann} W$ и $\operatorname{Ann} U$ и воспользоваться равенствами $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W = W$ и $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = U$, получим обратную импликацию $\operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W \Rightarrow U \subset W$. Равенство

$$\bigcap_\nu \operatorname{Ann} U_\nu = \operatorname{Ann}\left(\sum_\nu U_\nu\right) \tag{4-15}$$

очевидно: любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств U_ν, зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом из них в отдельности. Если взять в (4-15) в качестве подпространств U_ν пространства $\operatorname{Ann} U_\nu$, получаем равенство $\bigcap_\nu U_\nu = \operatorname{Ann}\left(\sum_\nu \operatorname{Ann} U_\nu\right)$. Беря в нём аннуляторы обеих частей, получаем равенство $\operatorname{Ann}\left(\bigcap_\nu W_\nu\right) = \sum_\nu \operatorname{Ann} W_\nu$. □

4.5. Аффинные пространства. Пусть множество A является аффинным пространством[1] над векторным пространством V. Для любой точки $p \in A$ и любого векторного подпространства $U \subset V$ множество точек

$$\Pi(p, U) = p + U = \{\tau_u(p) \mid u \in U\}$$

называется проходящим через точку p *аффинным подпространством* в A с *направляющим векторным подпространством* U. Размерность аффинного пространства $\Pi(p, U)$ по определению полагается равной размерности $\dim U$ его направляющего векторного подпространства.

[1] См. n° 1.4 на стр. 14.

Пример 4.4 (прямые и плоскости)
Аффинные подпространства $p+U$, где $\dim U = 1, 2$ называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида $p + vt$, где p — некоторая точка, v — ненулевой вектор, а t пробегает $\Bbbk$. Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида $p+\lambda u+\mu w$, где p — некоторая точка, u, w — пара непропорциональных векторов, а λ, μ независимо пробегают $\Bbbk$. К таким аффинным подпространствам в полной мере применимо всё сказанное в §1.

Предложение 4.8
Следующие условия на аффинные подпространства $\Pi(p, U)$ и $\Pi(q, U)$ с одним и тем же направляющим подпространством $U \subset V$ равносильны друг другу:

$$1)\ \overrightarrow{pq} \in U \qquad 2)\ \Pi(p,U) = \Pi(q,U)$$
$$3)\ \Pi(p,U) \cap \Pi(q,U) \neq \varnothing \qquad 4)\ p \in \Pi(q,U) \qquad 5)\ q \in \Pi(p,U)\,.$$

Доказательство. Покажем, что из (1) следует (2). Если $\overrightarrow{pq} \in U$, то любая точка вида $q+u$ с $u \in U$ может быть записана в виде $p+w$ с $w = \overrightarrow{pq} + u \in U$, и обратно, любая точка вида $p+w$ с $w \in U$ может быть записана в виде $p+u$ с $u = w - \overrightarrow{pq} \in U$. Тем самым, $\Pi(p,U) = \Pi(q,U)$.

Если выполнено (2), то тем более выполнены (3), (4), (5), а выполнение условий (4) или (5) автоматически означает выполнение условия (3). Таким образом, для завершения доказательства достаточно проверить, что из (3) вытекает (1).

Пусть точка $r = p+u' = q+u'' \in \Pi(p,U) \cap \Pi(q,U)$, где $u' = \overrightarrow{pr}$ и $u'' = \overrightarrow{qr}$ лежат в U. Тогда и $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq} = u' - u'' \in U$. □

Предложение 4.9
Следующие условия на $k+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_k$ любого аффинного пространства A над произвольным векторным пространством V равносильны друг другу:

1) точки $p_0, p_1, \dots, p_k$ не содержатся ни в каком $(k-1)$-мерном аффинном подпространстве
2) векторы $\overrightarrow{p_0p}_1, \overrightarrow{p_0p}_2, \dots, \overrightarrow{p_0p}_k$ линейно независимы
3) через точки $p_0, p_1, \dots, p_k$ проходит единственное k-мерное аффинное подпространство

Доказательство. Покажем, что (1) равносильно (2). Линейная зависимость k векторов из (2) равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше $k-1$, что в свою очередь означает, что в V найдётся $(k-1)$-мерное векторное подпространство U, содержащее все векторы $\overrightarrow{p_0p}_i$. По предл. 4.8 последнее означает, что $(k-1)$-мерное аффинное подпространство $p_0 + U$ содержит все точки p_i.

Покажем, что (2) равносильно (3). По предл. 4.8 прохождение аффинного пространства $p_0 + U$ через все точки p_i означает, что все векторы $\overrightarrow{p_0p}_i$ содержатся в U. А линейная независимость этих векторов означает, что они составляют базис в любом содержащем их k-мерном подпространстве $U \subset V$, а значит, любое такое подпространство представляет собою их линейную оболочку. □

Предложение 4.10
Аффинные подпространства $p+U$ и $q+W$ пересекаются , если и только если $\overrightarrow{pq} \in U+W$, и в этом случае их пересечение является аффинным пространством с направляющим векторным пространством $U \cap W$.

Доказательство. Равенство $\overrightarrow{pq} = u + w$ равносильно равенству $p + u = q - w$, означающему, что точка $r = p + u = q - w \in (p + U) \cap (q + W)$. Любая другая лежащая в этом пересечении точка $r' = p + u' = q - w'$ отличается от предыдущей на вектор $\overrightarrow{rr'} = u' - u = w - w' \in U \cap W$. Наоборот, для любого вектора $v \in U \cap W$ точка $r + v$, очевидно, лежит в $(p + U) \cap (q + W)$. □

Предложение 4.11
Если векторное подпространство $U \subset V$ является множеством решений системы однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает некоторое подмножество $M \subset V^*$, то аффинное подпространство $\Pi(p, U) = p + U \subset \mathbb{A}(V)$ является множеством решений системы неоднородных линейных уравнений вида $\xi(x) = \xi(p)$, где ξ пробегает то же самое подмножество $M \subset V^*$. Наоборот, всякая система неоднородных линейных уравнений на переменную точку $x \in \mathbb{A}(V)$ вида $\xi(x) = c_\xi$, где ξ пробегает какое-нибудь подмножество $M \subset V^*$, а $c_\xi \in \Bbbk$ — некоторые константы, либо несовместна, либо множество её решений представляет собою аффинное подпространство вида $p + U$, где $U = \operatorname{Ann} M \subset V$, а p — любое фиксированное решение системы[1].

Доказательство. В силу линейности функций $\xi : V \to \Bbbk$ равенства $\xi(x) = \xi(p)$ и $\xi(\overrightarrow{px}) = 0$ равносильны друг другу. □

4.6. Фактор пространства. Если зафиксировать векторное подпространство $U \subset V$, то проходящее через точку $v \in \mathbb{A}(V)$ аффинное подпространство $v + U$ можно алгебраически трактовать как *класс эквивалентности* вектора v по модулю сдвигов на векторы из подпространства U. В курсе алгебры такой класс обычно обозначается через

$$[v]_U = v \,(\operatorname{mod} U) = v + U = \{w \in V \mid w - v \in U\}$$

и называется *смежным классом* вектора v по модулю U. На множестве всех смежных классов по модулю U имеется естественная структура векторного пространства со сложением и умножением на числа по формулам $[v]_U + [w]_U \stackrel{\text{def}}{=} [v + w]$ и $\lambda[v] \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda v]$.

Упражнение 4.11. Проверьте, что эти определения корректны и задают на множестве классов структуру векторного пространства над полем $\Bbbk$.

Пространство смежных классов подпространства U обозначается V / U и называется *фактор пространством* пространства V по подпространству U. Отображение факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$, переводящее каждый вектор $v \in V$ в его класс $[v]$, линейно и сюрьективно.

На геометрическом языке, точками аффинного пространства $\mathbb{A}(V/U)$ являются всевозможные аффинные подпространства в $\mathbb{A}(V)$ с заданным направляющим подпространством $U \subset V$.

Пример 4.5 (фактор по ядру)
Каждое линейное отображение $F : V \to W$ задаёт изоморфизм $V/\ker F \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} F$, сопоставляющий классу $[v] \in V/\ker F$ вектор $F(v) \in \operatorname{im} F$. Это переформулировка того, что

$$F(v) = F(w) \iff v - w \in \ker F\,.$$

Пример 4.6 (линейная оболочка как фактор)
Линейная оболочка $W = \operatorname{span}(w_1, w_2, \dots, w_n) \subset V$ любого набора из n векторов w_i произвольного пространства V является образом линейного оператора $F : \Bbbk^n \to V$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \Bbbk^n$ в вектор $w_i \in W$. Ядро этого оператора $U = \ker F \subset \Bbbk^n$ представляет собою *пространство линейных соотношений* между векторами w_i в W в том смысле,

[1] Т. е. такая точка p, что $\xi(p) = c_\xi$ для всех $\xi \in M$.

что вектор $u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \in \Bbbk^n$ лежит в U тогда и только тогда, когда $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0$ в W. Изоморфизм $W = \operatorname{im} F \simeq \Bbbk^n / U$ из предыдущего прим. 4.5 означает в этом случае, что векторы $w \in W$ суть классы вычетов линейных комбинаций $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$ по модулю тех комбинаций, которые являются линейными зависимостями между векторами w_i.

Предложение 4.12
Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ дополняют некоторый базис $u_1, u_2, \dots, u_m$ подпространства U до базиса во всём пространстве $V \supset U$, то их классы $[v_1]$, $[v_2]$, … , $[v_k]$ образуют базис фактор пространства V/U. В частности, $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

Доказательство. Это частный случай предл. 4.4 на стр. 59 (и её доказательства), относящийся к отображению факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$. □

Предложение 4.13
Для любого подпространства $U \subset V$ имеются канонические изоморфизмы

$$(V/U)^* \simeq \operatorname{Ann} U \quad \text{и} \quad U^* \simeq V^* / \operatorname{Ann} U\,.$$

Доказательство. Если форма $\varphi \in \operatorname{Ann} U$, то для любых $u \in U$ и $v \in V$ выполняются равенства $\varphi(v + u) = \varphi(v) + \varphi(u) = \varphi(v)$. Поэтому правило $\widetilde{\varphi}([v]) = \varphi(v)$ корректно задаёт линейную форму $\widetilde{\varphi}$ на факторе V/U. Отображение $\operatorname{Ann} U \to (V/U)^*$, $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$, линейно и имеет нулевое ядро. Так как размерности пространств одинаковы, это изоморфизм. Для доказательства второго изоморфизма рассмотрим оператор $V^* \to U^*$, переводящий линейную форму на V в её ограничение на $U \subset V$. Поскольку ядро этого оператора это $\operatorname{Ann} U$, его образ изоморфен $V^* / \operatorname{Ann} U \subset U^*$. Так как размерности обоих пространств одинаковы, это вложение является изоморфизмом. □

Пример 4.7 (ранг матрицы)
Столбцы $a_1, a_2, \dots, a_n$ произвольной матрицы $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ являются векторами координатного пространства $\Bbbk^m$. Размерность порождённого ими подпространства $U \subset \Bbbk^m$ называется *рангом* матрицы A и обозначается $\operatorname{rk} A$. Любой максимальный по включению линейно независимый набор столбцов является базисом в пространстве U и состоит ровно из $\operatorname{rk} A$ столбцов.

В i-той строке матрицы A стоят вычисленные на векторах $a_1, a_2, \dots, a_n$ значения ковектора e_i^* из двойственного к стандартному базису $e_1, e_2, \dots, e_m$ в $\Bbbk^m$ базиса $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$ двойственного пространства $\Bbbk^{m*}$. Согласно предл. 4.13, ограничения функционалов $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$ на подпространство U линейно порождают двойственное к U пространство U^*. Поэтому любой максимальный по включению линейно независимый набор функционалов $e_i^*|_U$ составляет базис в U^* и тоже состоит из $\dim U^* = \dim U = \operatorname{rk} A$ векторов. Но линейная независимость функционалов $e_i^*|_U$, равно как и возможность линейно выразить один из них через другие, равносильна линейной независимости значений этих функционалов на порождающих пространство U векторах $a_1, a_2, \dots, a_n$ и, соответственно, возможности линейно выразить строку значений одного из функционалов через строки значений других. Иными словами, ограничения ковекторов $e_{i_1}^*$, $e_{i_2}^*$, … , $e_{i_{\operatorname{rk} A}}^*$ на подпространство U тогда и только тогда составляют базис в U^*, когда строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_{\operatorname{rk} A}$ составляют базис в линейной оболочке строк матрицы A в пространстве $\Bbbk^n$. Мы заключаем, что строки любой $m \times n$ матрицы A порождают в координатном пространстве $\Bbbk^n$ подпространство той же размерности, которую имеет подпространство в $\Bbbk^m$, порождённое столбцами матрицы A. Этот факт известен как *теорема о ранге матрицы*.

4.7. Двойственные линейные отображения. С каждым линейным отображением векторных пространств $F : U \to W$ канонически связано двойственное отображение

$$F^* : W^* \to U^*, \quad \xi \mapsto \xi \circ F, \tag{4-16}$$

действующее между двойственными пространствами в противоположном к F направлении и переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $F^*\xi \stackrel{\text{def}}{=} \xi \circ F : U \to \Bbbk$, значение которой на векторе $v \in U$ равно $F^*\xi(v) = \xi(Fv)$.

Упражнение 4.12. Убедитесь, что композиция $F \circ \xi$ является линейной формой на U и что отображение F^* линейно.

Линейные отображения F и F^* играют по отношению к другу абсолютно симметричные роли и однозначно определяют друг друга при помощи соотношения

$$\forall\, v \in W,\ \forall\, \xi \in U^* \quad \langle\, F^*\xi\,,\, v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, Fv\,\rangle\,. \tag{4-17}$$

Из этого соотношения немедленно вытекают равенства

$$F^{**} = F\,, \quad \ker F = \operatorname{Ann}\operatorname{im}(F^*)\,, \quad \ker(F^*) = \operatorname{Ann}\operatorname{im} F\,.$$

Если во втором и третьем равенстве перейти к аннуляторам обеих частей, получатся двойственные равенства

$$\operatorname{im}(F^*) = \operatorname{Ann}\ker F \quad \text{и} \quad \operatorname{im} F = \operatorname{Ann}\ker(F^*)\,. \tag{4-18}$$

Сравнивая эти равенства с изоморфизмами из предл. 4.13, мы заключаем, что векторные пространства $\operatorname{im} F \subset U$ и $\operatorname{im}(F^*) \subset W^*$ канонически двойственны друг другу, и свёртка вектора $Fv \in \operatorname{im} F$ с ковектором $F^*\xi \in \operatorname{im} F^*$ задаётся формулой

$$\langle\, F^*\xi\,,\, Fv\,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\, F^*\xi\,,\, v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, Fv\,\rangle\,, \tag{4-19}$$

Упражнение 4.13. Убедитесь, что эта формула корректна, т. е. не зависит от выбора ковектора $\psi \in W^*$ и вектора $v \in U$, использованных для записи элементов из $\operatorname{im} F^*$ и $\operatorname{im} F$.

Точно также, подпространство $\ker F \subset U$ двойственно фактор пространству $U^*/\operatorname{im}(F^*)$, а подпространство $\ker(F^*) \subset W^*$ двойственно фактор пространству $W/\operatorname{im} F$, и спаривание между векторами и ковекторами задаются формулами

$$\langle\, \psi + \ker F^*\,,\, v\,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\, \psi\,,\, v\,\rangle \quad \text{и} \quad \langle\, \xi\,,\, w + F(U)\,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\, \xi\,,\, w\,\rangle\,,$$

где $\psi + \ker F^* \in U^*/\operatorname{im}(F^*)$, $v \in \ker F$, $\xi \in \ker^*$, $w + F(U) \in W/\operatorname{im} F$.

Упражнение 4.14. Проверьте корректность обеих формул, т. е. независимость правых частей от выбора представителей $\psi \in U^*$ и $w \in W$ в классах $\psi + \ker F^*$ и $w + F(U)$.

По этой причине фактор по образу линейного отображения F называется *коядром* отображения F и обозначается $\operatorname{coker}(F) \stackrel{\text{def}}{=} W/\operatorname{im} F$. Тем самым, имеются равенства

$$(\ker F)^* = \operatorname{coker}(F^*) \quad \text{и} \quad (\operatorname{coker} F)^* = \ker(F^*)\,.$$

Упражнение 4.15. Убедитесь, что матрица $\left(f_{ij}\right)$ отображения F в произвольно выбранных базисах пространств U, W и матрица $\left(f^*_{ij}\right)$ двойственного отображения F^* в двойственных к выбранным базисах пространств W^*, U^* *транспонированы* друг другу, т. е. $f^*_{ij} = f_{ji}$.

Пример 4.8 (ещё раз о ранге матрицы)
Каждая матрица $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ является матрицей линейного отображения

$$F : \Bbbk^n \to \Bbbk^m ,$$

и линейная оболочка столбцов матрицы A совпадает с образом $\mathrm{im}\, F$ отображения F. Согласно упр. 4.15, двойственное отображение $F^* : \Bbbk^{m*} \to \Bbbk^{n*}$ задаётся в двойственных базисах транспонированной матрицей, столбцы которой суть строки матрицы A. Таким образом, линейная оболочка строк матрицы A совпадает с образом $\mathrm{im}\, F^*$ отображения F^*. Поскольку

$$\dim \mathrm{im}\, F^* = m - \dim \ker F^* = m - \dim \mathrm{Ann}\, \mathrm{im}\, F = \dim \mathrm{im}\, F ,$$

мы ещё раз видим, что размерности линейных оболочек строк и столбцов у любой прямоугольной матрицы одинаковы (ср. с прим. 4.7 на стр. 68).

Упр. 4.5. Пусть $W \not\subseteq U$ два подпространства в V. Выберем вектор $w \in W \smallsetminus U$. Если $W \cup U$ — подпространство, то $\forall\, u \in U \;\; w + u \in W \cup U$. Поскольку $w + u \notin U$ (т. к. $w \notin U$), $w + u \in W$, откуда $u \in W$, т. е. $U \subset W$.

Упр. 4.6. Индукция по числу подпространств с использованием разобранного перед этим случая двух подпространств.

Упр. 4.9. Если линейная форма зануляется на неких векторах, то она зануляется и на любой их линейной комбинации.

Упр. 4.11. Если $v_1 = v_2 + u$ и $w_1 = w_2 + u'$, где $u, u' \in U$, то $v_1 + w_1 = (v_2 + w_2) + (u + u')$ и $\lambda v_1 = \lambda v_2 + \lambda u$. Выполнение аксиом векторного пространства наследуется из V.

Упр. 4.15. Пусть матрица $\left(f_{ij}\right)$ отображения F записана в базисах

$$u_1, u_2, \dots , u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots , w_n \in W ,$$

т. е. $F(u_j) = \sum_i w_i \cdot f_{ij}$. Число f^*_{ij} равно i-той координате ковектора $F^*(w^*_j)$ в базисе $u^*_1, u^*_2, \dots , u^*_n$, т. е. свёртке $\langle\, F^* w^*_j \,,\, u_i \,\rangle = \langle\, w^*_j \,,\, F u_i \,\rangle = \langle\, w^*_j \,,\, \sum_k w_k \cdot f_{ki} \,\rangle = f_{ji}$.