§1. Аффинная плоскость

1.1. Векторные пространства. Фиксируем произвольное поле $\Bbbk$, элементы которого будут далее именоваться *числами*. Множество V, элементы которого именуются *векторами*[1], называется *векторным пространством* над полем $\Bbbk$, если на V имеются операция *сложения векторов*, сопоставляющая каждой паре векторов $v_1, v_2 \in V$ их сумму $v_1 + v_2 \in V$, и операция *умножения векторов на числа*, сопоставляющая каждому вектору $v \in V$ и каждому числу $\lambda \in \Bbbk$ вектор $\lambda \cdot v = v \cdot \lambda \in V$, так что выполняются следующие аксиомы.

1. Свойства сложения векторов:

   (1а) $\forall\, a, b \in V \;\; a + b = b + a$ (см. рис. 1⋄1)

   (1б) $\forall\, a, b, c \in V \;\; a + (b + c) = (a + b) + c$ (см. рис. 1⋄2)

   (1в) $\exists$ такой *нулевой вектор* $0 \in V$, что $\;\forall\, a \in V \;\; a + 0 = a$

   (1г) $\forall\, a \in V \;\; \exists$ *противоположный вектор* $-a \in V$, такой что $a + (-a) = 0$

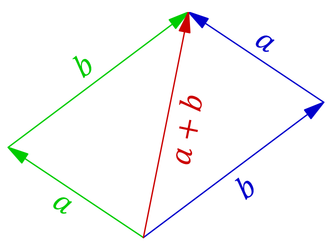

Рис. 1⋄1. Правило параллелограмма.

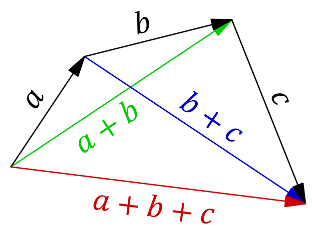

Рис. 1⋄2. Правило четырёхугольника.

2. Свойства умножения векторов на числа:

   (2а) $\forall\, a \in V, \forall\, \lambda, \mu \in \Bbbk \quad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$

   (2б) $\forall\, a \in V, \forall\, \lambda, \mu \in \Bbbk \quad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

   (2в) $\forall\, a, b \in V, \forall\, \lambda \in \Bbbk \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

   (2г) $\forall\, a \in V \quad 1 \cdot a = a$

Подмножество U векторного пространства V называется *векторным подпространством*, если для любых двух векторов $u, w \in U$ все их линейные комбинации $\lambda u + \mu w$ с произвольными $\lambda, \mu \in \Bbbk$ тоже лежат в U. Из предыдущих аксиом формально вытекает ещё несколько интуитивно ожидаемых свойств операций над векторами.

Лемма 1.1

В каждом векторном пространстве V нулевой вектор $0 \in V$ единствен. Для любого $a \in V$ противоположный к a вектор $-a$ однозначно определяется по a. Кроме того, $0 \cdot a = 0$ и $(-1) \cdot a = -a$, где 0 и -1 в левых частях равенств суть числа из поля $\Bbbk$, а 0 и $-a$ в правых — векторы из пространства V.

---

[1] Векторы продуктивно представлять себе как направленные отрезки, рассматриваемые с точностью до параллельного переноса.

Доказательство. Для любых двух нулевых векторов $0_1, 0_2 \in V$ по аксиоме (1в) выполняется равенство $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. Если векторы b и c оба противоположны к a, то $b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$. Если к левой и правой частям равенства

$$a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

прибавить противоположный к a вектор $-a$, мы получим $0 \cdot a = 0$. Вектор $(-1) \cdot a$ противоположен к a, поскольку $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$. □

Пример 1.1

Тривиальные примеры векторных пространств — это *нулевое пространство* 0, состоящее из одного лишь нулевого вектора 0, такого что $0+0 = 0 = -0$ и $\lambda \cdot 0 = 0$ для всех $\lambda \in \Bbbk$, а также само поле $\Bbbk$, где сложение векторов и их умножение на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле $\Bbbk$.

Пример 1.2 (n-мерное координатное пространство $\Bbbk^n$)

По определению, векторами пространства $\Bbbk^n$ являются упорядоченные наборы из n чисел[1]

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \Bbbk.$$

Сложение векторов и их умножение на числа задаются правилами

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \dots,\ x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Пример 1.3 (пространство многочленов)

Многочлены с коэффициентами в поле $\Bbbk$ образуют векторное пространство над $\Bbbk$ относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Это пространство обозначается $\Bbbk[x]$. Многочлены степени не выше n образуют в $\Bbbk[x]$ векторное подпространство, которое мы будем обозначать $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$.

1.1.1. Линейные отображения. Отображение $F : U \to W$ из векторного пространства U в векторное пространство W называется *линейным*, если оно перестановочно со сложением векторов и их умножением на числа в том смысле, что $F(\alpha a+\beta b) = \alpha F(a)+\beta F(b)$ для всех $a, b \in U$ и $\alpha, \beta \in \Bbbk$. Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само это отображение называется *изоморфизмом* векторных пространств. Изоморфизмы $V \xrightarrow{\sim} V$ пространства с самим собою называются *автоморфизмами*. Автоморфизмы векторного пространства V образуют *группу преобразований*[2]. Эта группа обозначается $\mathrm{GL}(V)$ и называется *полной линейной группой* векторного пространства V.

Пример 1.4

Пространство $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n изоморфно $(n + 1)$-мерному координатному пространству $\Bbbk^{n+1}$ посредством линейного биективного отображения, сопоставляющего многочлену $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ набор его коэффициентов $(a_0, a_1,\ \dots,\ a_n) \in \Bbbk^{n+1}$.

[1]Для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но иногда бывает удобно представлять векторы пространства $\Bbbk^n$ и в виде столбцов.

[2]См. стр. 5.

Предостережение 1.1. Обратите внимание, что отображение $\varphi : \Bbbk \to \Bbbk$, заданное формулой $\varphi(x) = a \cdot x + b$, которое в школе принято называть «линейной функцией», линейно в смысле n° 1.1.1 *только* при $b = 0$. Если же $b \neq 0$, то $\varphi(\lambda x) \neq \lambda\varphi(x)$ и $\varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$, т. е. φ *не* является линейным отображением.

Упражнение 1.1. Докажите для любого линейного отображения F равенства $F(0) = 0$ и $F(-v) = -F(v)$ для всех $v \in V$.

1.1.2. Пропорциональные векторы и одномерные пространства. Векторы a и b из векторного пространства V называются *пропорциональными*, если $x \cdot a = y \cdot b$ для некоторых чисел $x, y \in \Bbbk$, не равных одновременно нулю. Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов a и b означает, что $a = \lambda b$ и $b = \lambda^{-1} a$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$.

Векторное пространство V называется *одномерным*, что обозначается как[1] $\dim V = 1$, если в нём есть ненулевые векторы, но все они пропорциональны друг другу. Фиксируя в одномерном пространстве V какой-нибудь ненулевой вектор e, мы можем однозначно записать любой вектор $v \in V$ как $v = xe$ с $x \in \Bbbk$. Число x называется *координатой* вектора v относительно *базисного* вектора e. Отображение $c_e : V \to \Bbbk$, переводящее каждый вектор $v \in V$ в его координату $x \in \Bbbk$ устанавливает изоморфизм между V и $\Bbbk$. При выборе другого базисного вектора $e' = \lambda e$ координата x' каждого вектора $v = x'e' = x'\lambda e = xe$ в новом базисе будет связана со старой координатой x соотношением $x' = \lambda^{-1} x$.

Линейное отображение $F : V \xrightarrow{\sim} V$ одномерного пространства V в себя однозначно определяется тем, куда оно переводит какой-нибудь базисный вектор e пространства V. Если $F(e) = \lambda e$, то для произвольного вектора $v = xe$ получим $F(xe) = xF(e) = \lambda xe$. Таким образом, любой линейный эндоморфизм F одномерного пространства V либо отображает все векторы в нуль, либо является гомотетией с ненулевым коэффициентом $\lambda \in \Bbbk$. В частности, полная линейная группа $\mathrm{GL}(V)$ одномерного пространства V изоморфна мультипликативной группе $\Bbbk^*$ ненулевых элементов поля $\Bbbk$.

1.2. Двумерное векторное пространство. Векторное пространство V называется *двумерным*, что обозначается как $\dim V = 2$, если в нём есть пара непропорциональных векторов e_1, e_2, и каждый вектор $v \in V$ выражается через них в виде $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$, где $x_1, x_2 \in \Bbbk$. Любая такая пара векторов e_1, e_2 называется *базисом* пространства V. Коэффициенты x_1, x_2 разложения вектора v по базису *однозначно* определяются вектором v и базисом, поскольку из равенства $x_1 e_1 + x_2 e_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2$ вытекает равенство $(x_1 - y_1) e_1 = (x_2 - y_2) e_2$, возможное только при $(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = 0$ в силу того, что векторы e_1 и e_2 не пропорциональны. Числа $x_1, x_2 \in \Bbbk$ из разложения $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$ называются *координатами* вектора v в базисе $e = (e_1, e_2)$. Сопоставляя каждому вектору столбец его координат в базисе e, мы получаем биективное отображение

$$c_e : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^2 , \quad v = x_1 e_1 + x_2 e_2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \Bbbk^2 .$$

Упражнение 1.2. Проверьте, что это отображение линейно, т. е. при сложении векторов столбцы их координат складываются, а при умножении на число — умножаются на число по правилам координатного пространства $\Bbbk^2$.

[1] Обозначение dim является сокращением от *dimension* (размерность). В полной общности мы обсудим это понятие в n° 4.1 на стр. 55 ниже.

Таким образом, всякое двумерное векторное пространство V изоморфно координатному пространству $\Bbbk^2$.

1.2.1. Определитель 2×2. Пропорциональность векторов $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ в пространстве $\Bbbk^2$ равносильна равенству перекрёстных произведений $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Величина

$$\det(a,b) \overset{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1$$

называется *определителем* векторов $a, b \in \Bbbk^2$. Очевидно, что

$$\det(a,b) = 0 \iff a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \tag{1-1}$$

$$\det(a,b) = -\det(b,a) \qquad \forall\, a,b \in \Bbbk^2 \tag{1-2}$$

$$\det(\lambda a,b) = \lambda \det(a,b) = \det(a,\lambda b) \qquad \forall\, a,b \in \Bbbk^2 \text{ и } \forall\, \lambda \in \Bbbk \tag{1-3}$$

$$\begin{aligned} \det(a+b,c) &= \det(a,c) + \det(b,c) \\ \det(a,b+c) &= \det(a,b) + \det(a,c) \end{aligned} \qquad \forall\, a,b,c \in \Bbbk^2\,. \tag{1-4}$$

Свойство (1-2) называется *знакопеременностью*, (1-3) — *однородностью*, (1-4) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов, т. е. *билинеен*. Из билинейности вытекает, что для любых векторов $a,b,c,d \in \Bbbk^2$ и констант $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Bbbk$ выполняется то же самое правило раскрытия скобок[1], что и для произведения чисел:

$$\det(\alpha a + \beta b\,,\, \gamma c + \delta d) = \alpha\gamma \det(a,c) + \alpha\delta \det(a,d) + \beta\gamma \det(b,c) + \beta\delta \det(b,d)\,.$$

Лемма 1.2

Каждая пара непропорциональных векторов $a, b \in \Bbbk^2$ является базисом. Коэффициенты разложения произвольного вектора $v \in \Bbbk^2$ по этому базису вычисляются по *правилу Крамера*:

$$v = x\cdot a + y\cdot b \iff \begin{aligned} x &= \det(v,b)/\det(a,b) \\ y &= \det(a,v)/\det(a,b)\,. \end{aligned} \tag{1-5}$$

Доказательство. Если имеется разложение $v = x\cdot a + y\cdot b$, то из билинейности и кососимметричности определителя вытекают равенства

$$\begin{aligned} \det(a,v) &= \det(a, x\cdot a + y\cdot b) = x\cdot\det(a,a) + y\cdot\det(a,b) = y\cdot\det(a,b) \\ \det(v,b) &= \det(x\cdot a + y\cdot b, b) = x\cdot\det(a,b) + y\cdot\det(b,b) = x\cdot\det(a,b)\,, \end{aligned}$$

из которых x и y однозначно выражаются в виде (1-5). Для доказательства существования разложения $v = x\cdot a + y\cdot b$ заметим, что разность $v - a\cdot\det(v,b)/\det(a,b)$ пропорциональна вектору b, т. к. $\det\big(v - a\cdot\det(v,b)/\det(a,b)\,,\, b\big) = \det(v,b) - \det(a,b)\cdot\det(v,b)/\det(a,b) = 0$. Поэтому $v = a\cdot\det(v,b)/\det(a,b) + b\cdot y$ для некоторого $y\in\Bbbk$. □

Следствие 1.1

В любом двумерном векторном пространстве любые два непропорциональных вектора образуют его базис. □

[1] Его называют *дистрибутивностью* или *распределительным законом*.

Упражнение 1.3. Пусть вектор v имеет в базисе (u_1, u_2) координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, а векторы u_1 и u_2, в свою очередь, имеют в некотором другом базисе (w_1, w_2) координаты $u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ и $u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$. Найдите координаты вектора v в базисе (w_1, w_2).

1.3. Площадь ориентированного параллелограмма. Функция $s : V \times V \to \Bbbk$, сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов a, b двумерного векторного пространства V число $s(a, b) \in \Bbbk$, называется *площадью ориентированного параллелограмма*, если для любых векторов $a, b \in V$ и чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$ выполняются равенства

$$s(a, b + \lambda a) = s(a, b) = s(a + \mu b, b) \tag{1-6}$$

$$s(\lambda a, b) = \lambda s(a, b) = s(a, \lambda b)\,. \tag{1-7}$$

Первое из них означает, что площадь параллелограмма не меняется при параллельном переносе одной из его сторон вдоль самой себя: треугольник, который при этом отрезается, параллельно сдвигается и приклеивается с другой стороны, как на рис. 1◇3.

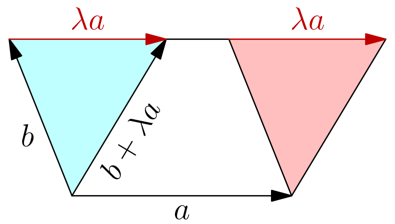

Рис. 1◇3. Площадь не меняется.

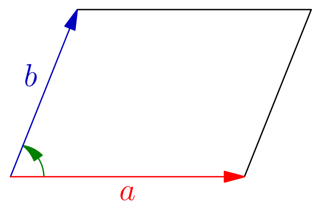

Рис. 1◇4. Ориентированный параллелограмм.

Второе свойство (1-7) утверждает, что при изменении одной из сторон параллелограмма в λ раз площадь также изменяется в λ раз. В частности, $s(-a, b) = -s(a, b) = s(a, -b)$, т. е. площадь *меняет знак* при смене знака одного из векторов.

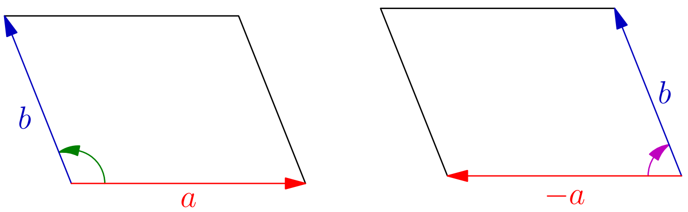

Рис. 1◇5. Смена ориентации при смене знака.

В школьном курсе геометрии над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ принято считать, что площадь положительна и $s(\lambda a, b) = s(a, \lambda b) = |\lambda| \cdot s(a, b)$. Отказываясь от положительности, мы не просто упраздняем модуль[1], но помимо абсолютной величины площади учитываем также и *ориентацию* параллелограмма. На вещественной координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ упорядоченные пары векторов (a, b) геометрически отличаются друг от друга тем, в какую сторону происходит кратчайший поворот, совмещающий направление первого вектора с направлением второго. Те пары векторов,

[1]Что значительно упрощает вычисления и делает их осмысленными над любым полем $\Bbbk$.

для которых такой поворот происходит против часовой стрелки, называются *положительно* ориентированными, а те, для которых по часовой стрелке — *отрицательно* ориентированными. Равенство $s(-a,b) = -s(a,b)$ означает, что площадь меняет знак при смене ориентации параллелограмма на противоположную, как на рис. 1◇5.

Лемма 1.3

Каждая функция площади $s : V \times V \to \Bbbk$ обращается в нуль на парах пропорциональных векторов[1], знакопеременна: $s(a,b) = -s(b,a)$ и аддитивна:

$$s(a, b+c) = s(a,b) + s(a,c) \qquad \forall\ a,b,c \in \Bbbk^2\,. \tag{1-8}$$

Доказательство. Первые два свойства вытекают прямо из (1-6) и (1-7):

$$s(\lambda v, v) = s(0+\lambda v, v) = s(0,v) = s(0\cdot 0, v) = 0\cdot s(0,v) = 0\,,$$
$$s(a,b) = s(a, a+b) = s(a-(a+b), a+b) = s(-b, a+b) = -s(b, a+b) = -s(b,a)\,.$$

Докажем аддитивность. Если вектор a пропорционален и вектору b, и вектору c, то он пропорционален и их сумме $b+c$. В этом случае все три площади в (1-8) зануляются. Если вектор a не пропорционален, скажем, вектору b, то a и b составляют базис, и $c = \alpha a + \beta b$ для некоторых $\alpha, \beta \in \Bbbk$. В этом случае левая и правая части (1-8) тоже равны друг другу:

$$\begin{aligned} s(a, b+c) &= s(a, b+\alpha a+\beta b) = s(a, (1+\beta)b) = (1+\beta)s(a,b)\,,\\ s(a,b)+s(a,c) &= s(a,b) + s(a, \alpha a + \beta b) = s(a,b) + s(a, \beta b) = \\ &= s(a,b) + \beta s(a,b) = (1+\beta)s(a,b)\,. \end{aligned}$$

□

Упражнение 1.4 (кососимметричность и знакопеременность). Функция от двух аргументов $f : V\times V \to \Bbbk$ называется *кососимметричной*, если $f(v,v) = 0$ для всех $v \in V$. Убедитесь, что всякая билинейная кососимметричная функция знакопеременна, а когда $1 \neq -1$ в поле $\Bbbk$, то и наоборот, все знакопеременные функции кососимметричны.

Теорема 1.1

На координатном векторном пространстве $\Bbbk^2$ имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Она имеет вид $s(a,b) = c\cdot \det(a,b)$, где константа $c = s(e_1, e_2)$ равна площади стандартного базисного параллелограмма на векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,.$$

Доказательство. В силу аддитивности, однородности и знакопеременности функции $s(a,b)$ для любой пары векторов $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ выполняются равенства

$$s(a,b) = s(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) s(e_1,e_2) = \det(a,b)\cdot s(e_1,e_2)\,. \tag{1-9}$$

Поэтому все функции площади пропорциональны определителю. С другой стороны, из свойств определителя (1-1) – (1-4) вытекает, что при любом $\lambda \in \Bbbk$ функция $s(a,b) = c\cdot\det(a,b)$ удовлетворяет соотношениям (1-6), (1-7) и при $\lambda \neq 0$ является ненулевой. □

[1] В частности, когда один из векторов нулевой или когда два вектора совпадают друг с другом. Свойство $s(a,a) = 0$ называют *кососимметричностью*, см. упр. 1.4 ниже.

Следствие 1.2
На любом двумерном векторном пространстве V имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Если векторы $e = (e_1, e_2)$ образуют в V базис, а векторы $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ произвольны, то[1]

$$s(a, b)/s(e_1, e_2) = \det_e(a, b) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

для любой ненулевой функции площади s на пространстве V. □

Следствие 1.3
Координаты вектора $v = ax + by$ в любом базисе (a, b) двумерного векторного пространства V равны отношениям площадей $x = s(v, b)/s(a, b)$, $y = s(a, v)/s(a, b)$. □

1.4. Аффинные[2] пространства. Множество $\mathbb{A}$ называется *аффинным пространством* над векторным пространством V, если каждой упорядоченной паре точек $A, B \in \mathbb{A}$ сопоставлен вектор $\overrightarrow{AB} \in V$ так, что для любой точки $P \in \mathbb{A}$ отображение *векторизации с центром в* P

$$v_P : \mathbb{A} \to V, \quad Q \mapsto \overrightarrow{PQ},$$

взаимно однозначно, и для любых трёх (не обязательно различных) точек $A, B, C \in \mathbb{A}$ выполняется *правило треугольника* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Иначе можно сказать, что с каждым вектором $v \in V$ связано *преобразование сдвига*[3]

$$\tau_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad A \mapsto A + v,$$

со следующими двумя свойствами: для каждой пары точек $A, B \in \mathbb{A}$ имеется единственный такой вектор $v \in V$, что $A + v = B$, и для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}.$$

Второе описание эквивалентно первому: вектор $v \in V$ со свойством $A + v = B$, о котором идёт речь во втором определении, это вектор $\overrightarrow{AB}$ из первого определения, а правило треугольника из первого определения означает равенство $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}$ во втором.

Упражнение 1.5. Убедитесь в этом и выведите из определений, что: а) $\overrightarrow{AA} = 0$ для всех $A \in \mathbb{A}$ б) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ для всех $A, B \in \mathbb{A}$ в) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ для всех $A, B, C, D \in \mathbb{A}$.

Пример 1.5 (аффинная координатная плоскость $\mathbb{A}^2$)
Множество $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\Bbbk)$, точками которого являются пары чисел $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ из поля $\Bbbk$ и точкам P, Q сопоставляется вектор $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} Q_1 - P_1 \\ Q_2 - P_2 \end{pmatrix}$ очевидно удовлетворяет предыдущим определениям. Оно называется *аффинной координатной плоскостью* над полем $\Bbbk$.

[1] Здесь и далее мы обозначаем через $\det_e(a, b)$ определитель матрицы, образованной столбцами координат векторов a, b в базисе e.

[1] Термин *аффинный* не должен вызывать «греческих» реминисценций — это банальная калька с английского *affine* (ассоциированный).

[3] Или *откладывание вектора* v от точек $A \in \mathbb{A}$.

Пример 1.6 (приведённые квадратные трёхчлены)
Пространство $\mathcal{P}_2$, точками которого являются приведённые квадратные трёхчлены

$$P = x^2 + p_1 x + p_2 \in \Bbbk[x]\,,$$

не является векторным пространством, поскольку сумма приведённых многочленов и произведение приведённого многочлена на число не являются приведёнными многочленами. Однако разности $Q - P = (q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)$ приведённых трёхчленов $Q = x^2 + q_1 x + q_2$ и $P = x^2 + p_1 x + p_2$ образуют векторное пространство $V = \Bbbk[x]_{\leqslant 1}$ многочленов степени $\leqslant 1$, и при произвольным образом зафиксированном многочлене P сопоставление $Q \mapsto \overrightarrow{PQ} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$ устанавливает биекцию между $\mathcal{P}_2$ и V, удовлетворяющую предыдущим определениям. Поэтому пространство $\mathcal{P}_2$ является аффинной плоскостью над пространством многочленов степени $\leqslant 1$.

1.4.1. Аффинная система координат на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ по определению состоит из произвольно взятой точки $O \in \mathbb{A}^2$ и базиса e_1, e_2 в векторном пространстве V. Тройку (O, e_1, e_2) также называют *координатным репером* с *началом* в O и *базисом* e_1, e_2. Каждый координатный репер устанавливает биекцию между точками плоскости $\mathbb{A}^2$ и парами чисел, сопоставляющую точке $P \in \mathbb{A}^2$ координаты вектора $\overrightarrow{OP}$ в базисе e_1, e_2. Эти координаты называются *аффинными координатами* точки P относительно репера (O, e_1, e_2).

Упражнение 1.6. Убедитесь, что столбец координат вектора $\overrightarrow{PQ}$ в произвольном базисе e_1, e_2 пространства $\Bbbk^2$ равен разности $Q - P$ столбцов координат точек Q, P относительно любого репера (O, e_1, e_2) независимо от выбора точки O.

Так, в прим. 1.6 коэффициенты p_1, p_2 трёхчлена $x^2 + p_1 x + p_2 \in \mathcal{P}_2$ являются его координатами относительно репера (x^2, e_1, e_2), где $e_1 = x$, $e_2 = 1$ это стандартный базис в $\Bbbk[x]_{\leqslant 1}$.

1.4.2. Барицентры и барицентрические комбинации точек. Для любого набора точек

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_m$$

в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ и любых чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \Bbbk$ с ненулевой суммой $\mu = \sum \mu_i \neq 0$ существует единственная точка $M \in \mathbb{A}$, такая что

$$\mu_1 \overrightarrow{MQ}_1 + \mu_2 \overrightarrow{MQ}_2 + \dots + \mu_m \overrightarrow{MQ}_m = 0\,. \tag{1-10}$$

В самом деле, задавшись произвольной начальной точкой $O \in \mathbb{A}$, мы можем для произвольной точки $M \in \mathbb{A}$ записать сумму из левой части (1-10), как

$$\sum \mu_i \overrightarrow{MQ}_i = \sum \mu_i (\overrightarrow{OQ}_i - \overrightarrow{OM}) = -\mu\, \overrightarrow{OM} + \sum \mu_i \overrightarrow{OQ}_i\,.$$

Поэтому соотношение (1-10) выполняется для единственной точки M с радиус вектором

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{OQ}_i\,. \tag{1-11}$$

Эта точка называется *центром тяжести* или *барицентром* точек Q_i с весами μ_i. Термин пришёл из механики: если горизонтально расположить аффинную плоскость $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ в трёхмерном пространстве и перпендикулярно ей приложить к каждой точке Q_i силу μ_i, направленную вниз, если $\mu > 0$, и вверх, если $\mu < 0$, как на рис. 1◇6 на стр. 16, то равенство (1-10) будет означать равенство нулю суммы моментов всех этих сил относительно точки M. Если оно выполняется, плоскость останется неподвижной, удерживаемая ровно за одну точку M.

Поскольку точка M однозначно определяется не зависящим от выбора O соотношением (1-10), точка

$$O + \overrightarrow{OM} = O + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{OQ}_i$$

не зависит от выбора начальной точки O. Поэтому для любого набора точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ и любых констант $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ с суммой $\sum \mu_i = 1$, точка

$$\mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 + \dots + \mu_m Q_m \stackrel{\text{def}}{=} O + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot \overrightarrow{OQ}_i \tag{1-12}$$

не зависит от выбора начальной точки O, что и оправдывает обозначение, использованное в левой части (1-12). Точка (1-12) называется *барицентрической комбинацией* точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ с весами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

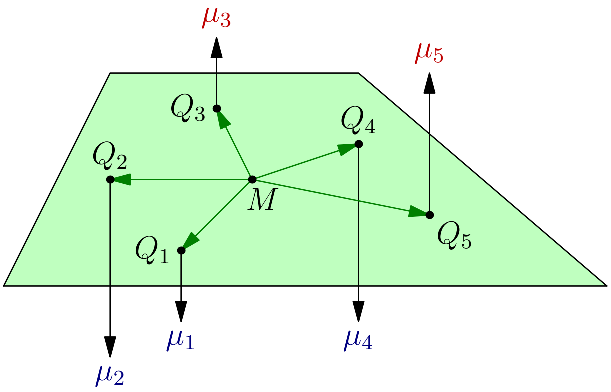

Рис. 1◇6. Моменты сил.

Упражнение 1.7 (группирование масс). Пусть набор точек Q_i с весами μ_i и набор точек T_j с весами ν_j имеют центры тяжести в точках M и N, причём все три суммы: $\sum \mu_i$, $\sum \nu_j$ и $\sum \mu_i + \sum \nu_j$ ненулевые. Покажите, что центр тяжести объединения всех точек[1] Q_i и T_j совпадает с центром тяжести точек M и N, взятых с весами $\sum \mu_i$ и $\sum \nu_j$. Выведите из этого, что любая барицентрическая комбинация точек, которые сами являются барицентрическими комбинациями некоторых точек P_i, также представляет собою барицентрическую комбинацию точек P_i.

1.5. Прямые. Три точки A, B, P на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ называются *коллинеарными*, если векторы $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$ пропорциональны. При $A \neq B$ пропорциональность векторов $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$ означает, что при некоторых $\alpha, \beta \in \Bbbk$, не обращающихся одновременно в нуль, выполняются равносильные друг другу равенства

$$\beta \cdot \overrightarrow{PA} + \alpha \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \quad \iff \quad P = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot A + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot B\,.$$

[1] Объединение двух совпадающих точек заключается в сложении их весов.

В этом случае говорят, что точка P *делит* AB в отношении $\alpha : \beta$ или, эквивалентно, является барицентрической комбинацией точек A и B с весами $\beta/(\alpha+\beta)$ и $\alpha/(\alpha+\beta)$ соответственно. Точка

$$P = O + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{OB} = A + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{AB} = B + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{BA}$$

однозначно определяется отношением $\alpha : \beta$, которое может принимать любые значения, не равные -1, ибо $\alpha = -\beta$ означает, что $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB}$, т. е. $A = B$. При этом значения

$$\alpha : \beta = 0 : 1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha : \beta = 1 : 0 = \infty$$

вполне допустимы и отвечают точкам $P = A$ и $P = B$ соответственно. Равновесный барицентр $C = (A+B)/2$, делящий AB в отношении $1 : 1$, называется *серединой* или *центром* пары различных точек A, B. Множество $(AB) \overset{\text{def}}{=} \{X = \alpha A + \beta B \mid \alpha, \beta \in \Bbbk,\ \alpha+\beta = 1\}$ всех точек $X \in \mathbb{A}^2$, коллинеарных двум заданным различным точкам $A, B \in \mathbb{A}^2$, называется *прямой*. Иначе прямую $(AB) \subset \mathbb{A}(V)$ можно описать как ГМТ вида $X = A + vt$, где t пробегает $\Bbbk$, а $v \in V$ — произвольно зафиксированный ненулевой вектор, пропорциональный вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор v называется *направляющим вектором* или *вектором скорости* прямой (AB).

Предложение 1.1

В аффинных координатах $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ относительно произвольного репера прямая с направляющим вектором $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, проходящая через точку $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ описывается уравнением

$$v_2 x_1 - v_1 x_2 = v_2 a_1 - v_1 a_2 . \tag{1-13}$$

Наоборот, множество всех решений $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ любого (неоднородного) линейного уравнения

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta ,$$

в котором коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2 \in \Bbbk$ не обращаются одновременно в нуль, представляет собою прямую с направляющим вектором $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$.

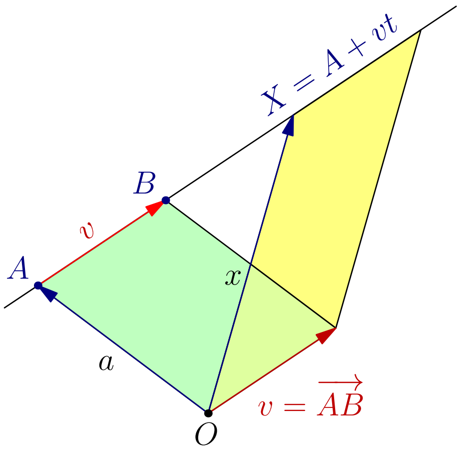

Рис. 1◇7. Прямая (AB) с направляющим вектором $v = \overrightarrow{AB}$.

Доказательство. Обозначим начало координат через O и рассмотрим векторы

$$x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Равенство (1-13) означает, что $\det(v, x) = \det(v, a)$, и описывает геометрическое место концов всех таких векторов x, которые образуют вместе с заданным вектором v параллелограмм с вершиной в начале координат, имеющий заданную площадь $s = \det(v, a)$, см. рис. 1◇7. Это ГМТ представляет собою проходящую через конец вектора a прямую с вектором скорости v, поскольку пропорциональность векторов $\overrightarrow{AX}$ и v равносильна равенству

$$0 = \det(v, \overrightarrow{AX}) = \det(v, x - a) = \det(v, x) - \det(v, a) .$$

Для доказательства второго утверждения достаточно подобрать пару чисел a_1, a_2 так, чтобы $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \beta$, что всегда можно сделать, если α_1 или α_2 отличен от нуля. Тогда по формуле (1-13) прямая, проходящая через точку $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ с вектором скорости $v = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$ будет задаваться уравнением $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$. □

Упражнение 1.8. Напишите уравнение прямой, параллельной вектору $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ и проходящей через точку $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, а также прямой, проходящей через точки $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, и нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями $3x_1 + 5x_2 = -1$ и $2x_1 - 3x_2 = 5$.

Пример 1.7 (пересечение прямых)
Если левые части уравнений прямых $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma$ и $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta$ не пропорциональны, то решения x_1, x_2 системы

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta\,, \end{cases} \tag{1-14}$$

суть координаты вектора $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \Bbbk^2$ в базисе из векторов $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ координатного пространства $\Bbbk^2$. По правилу Крамера[1] они единственны и равны

$$x_1 = \det\begin{pmatrix} \gamma & \alpha_2 \\ \delta & \beta_2 \end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}\,, \quad x_2 = \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma \\ \beta_1 & \delta \end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}\,. \tag{1-15}$$

Таким образом, прямые (1-14) с непропорциональными скоростями пересекаются в единственной точке с координатами (1-15). Например, прямые $3x_1 + 5x_2 = -1$ и $2x_1 - 3x_2 = 5$ из упр. 1.8 пересекаются при $x_1 = 22/19$, $x_2 = -17/19$.

Если же левые части уравнений (1-14) пропорциональны, скажем $\beta_1 = \lambda\alpha_1$ и $\beta_2 = \lambda\alpha_2$, то при $\delta \neq \lambda\gamma$ задаваемые этими уравнениями прямые параллельны, а при $\delta = \lambda\gamma$ они совпадают друг с другом.

Проделанные вычисления показывают, что на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ над произвольным полем $\Bbbk$ выполнены евклидовы аксиомы, описывающие взаимное расположение прямых и точек на плоскости.

Предложение 1.2
Через любые две различные точки аффинной плоскости проходит ровно одна прямая. Через любую точку, не лежащую на произвольно заданной прямой ℓ, проходит ровно одна прямая, не пересекающая прямую ℓ. □

1.6. Треугольники. Тройка не коллинеарных точек A, B, C называется *треугольником*. Фиксируем на $\Bbbk^2$ какую-нибудь ненулевую функцию площади s и назовём *площадью ориентированного треугольника* ABC половину площади ориентированного параллелограмма, образованного упорядоченной парой векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:

$$s(ABC) \overset{\text{def}}{=} s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})/2\,. \tag{1-16}$$

[1] См. лем. 1.2 на стр. 11.

Предложение 1.3
Для любого треугольника ABC и любой точки P выполняются соотношения:

$$s(ABC) = s(BCA) = s(CAB) = -s(BAC) = -s(ACB) = -s(CBA) \tag{1-17}$$
$$s(ABC) = s(PAB) + s(PBC) + s(PCA)\,. \tag{1-18}$$

Доказательство. Для доказательства (1-17) достаточно проверить, что

$$s(BCA) = s(ABC) \quad \text{и} \quad s(BAC) = -s(ABC)\,.$$

В силу билинейности и кососимметричности площади

$$2s(BCA) = s(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = s(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -s(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2s(ABC)$$
$$2s(BAC) = s(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = s(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -2s(ABC)\,.$$

Проверка равенства (1-18) столь же бесхитростна:

$$2s(ABC) = s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = s(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}) = s(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PC}) + s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AP}) + s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}) =$$
$$= s(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}) + s(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) + s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}) = 2\big(s(PAB) + s(PBC) + s(PCA)\big)\,.$$

□

Пример 1.8 (площади ориентированных многоугольников)
Над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ формула (1-17) имеет следующее наглядное описание. Будем называть *ориентацией* треугольника выбор одного из двух возможных направлений обхода его контура. Обход против ЧС, при котором треугольник остаётся слева по ходу движения, считается положительным, и площади таких треугольников положительны. Площади треугольников, обходимых по ЧС отрицательны. Ориентация треугольников согласована с обсуждавшейся в n° 1.3 на стр. 12 ориентацией параллелограммов: если выпустить из вершины треугольника два вектора по его сторонам, то ориентация натянутого на них параллелограмма совпадает с той ориентацией контура треугольника, что задаётся движением от конца первого вектора к концу второго по противолежащему выбранной вершине основанию, см. рис. 1◇8.

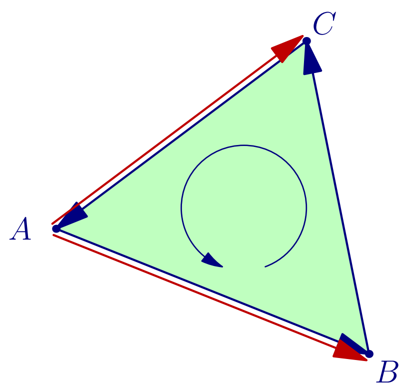

Рис. 1◇8. $2S(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

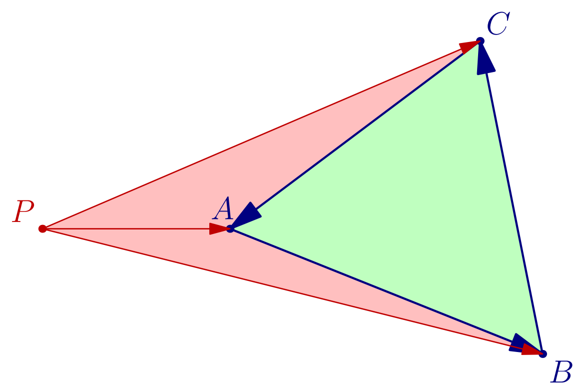

Рис. 1◇9.
$S(ABC) = S(PAB) + S(PBC) + S(PCA)$.

При таких договорённостях об ориентации, формула (1-18) утверждает, что площадь ориентированного треугольника ABC можно вычислять обходя его контур против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на его стороны треугольников с вершиной в произвольно зафиксированной точке P, при этом исходящие из P векторы, используемые для вычисления площадей, всегда упорядочиваются по ходу движения. Так на рис. 1◇9 площадь $\triangle PBC$ войдёт в сумму со знаком плюс, а площади $\triangle PAB$ и $\triangle PAC$ — с минусами, что в результате даст площадь $\triangle ABC$. Эта формула очевидным образом обобщается на произвольную, возможно даже самопересекающуюся, как на рис. 1◇10, замкнутую ломаную $Q_0Q_1 \dots Q_m$, где мы полагаем $Q_m = Q_0$. Обходя контур ломаной против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на её звенья треугольников с вершиной в произвольно заданной точке P, мы получим сумму

$$\sum_{i=0}^{m-1} s(PQ_iQ_{i+1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} \det(\overrightarrow{PQ}_i, \overrightarrow{PQ}_{i+1})$$

которая равна сумме ориентированных площадей ограниченных этой ломаной многоугольников, где многоугольники, лежащие слева по ходу движения вдоль ломаной[1], надлежит учитывать со знаком плюс, а лежащие справа[2] — со знаком минус.

Упражнение 1.9. Покажите, ориентированные площади треугольников с общей вершиной и основаниями на одной прямой относятся как эти ориентированные основания, т. е. для любых трёх коллинеарных точек A, B, C и произвольной точки P выполняется равенство $s(PAB) : s(PBC) = \overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC}$, где справа стоит такое число $\lambda \in \Bbbk$, что $\lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ (поле $\Bbbk$ — любое).

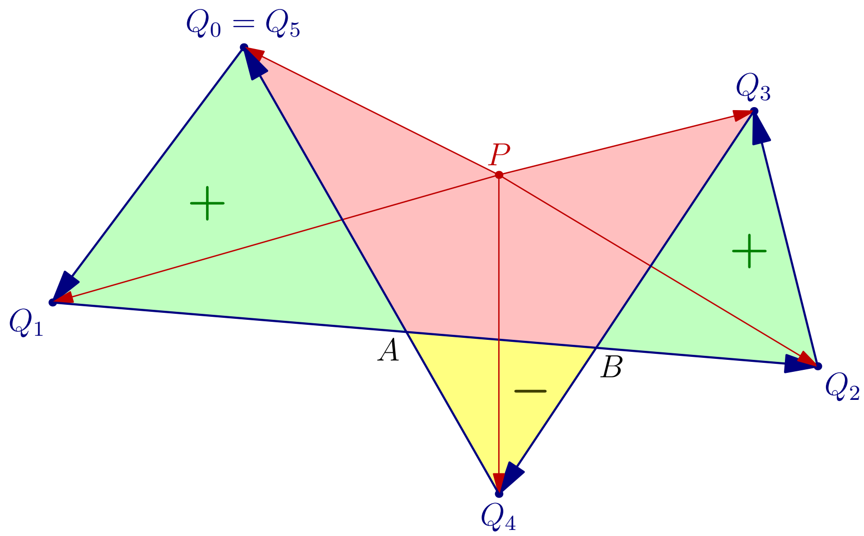

Рис. 1◇10. $\sum_{i=0}^{4} S(PQ_iQ_{i+1}) = S(Q_0Q_1A) - S(BAQ_4) + S(BQ_2Q_3)$.

[1] Их контур обходится против ЧС.
[2] Их контур обходится по ЧС.

1.6.1. Барицентрические координаты. Зафиксируем на плоскости $\mathbb{A}^2$ произвольный треугольник $\triangle ABC$ и сопоставим каждой тройке чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk$ с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$ точку

$$P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C\,.$$

Покажем, что это сопоставление устанавливает биекцию между такого рода тройками чисел и точками на $\mathbb{A}^2$. Равенство $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$ означает, что $\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}$, т. е. числа β, γ являются координатами вектора $\overrightarrow{AP}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Так как пары координат биективно соответствуют векторам, а векторы $\overrightarrow{AP}$ — точкам P, мы имеем биекцию между точками P и произвольными парами чисел (β, γ). Но такие пары биективно соответствуют тройкам $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \beta - \gamma, \beta, \gamma)$. Числа $\alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk$ с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$ называются *барицентрическими координатами* точки $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$ относительно $\triangle ABC$. Использование тройки чисел α, β, γ, связанных соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 1$, вместо пары чисел β, γ часто оказывается более удобным, поскольку не привязано к выбору той или иной вершины в треугольнике, что позволяет видеть и использовать имеющиеся в задаче симметрии.

Пример 1.9 (барицентрические координаты как отношения площадей)
Согласно правилу Крамера[1], разложение произвольного вектора $\overrightarrow{AP} \in V$ по базису $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ имеет вид

$$\overrightarrow{AP} = \frac{s(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC})}{s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})}{s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{s(PCA)}{s(ABC)} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{s(PAB)}{s(ABC)} \cdot \overrightarrow{AC}\,,$$

откуда $s(ABC) \cdot \overrightarrow{PA} + s(PCA) \cdot \overrightarrow{AB} + s(PAB)\overrightarrow{AC} = 0$. Подставляя $s(ABC) = s(PAB) + s(PBC) + s(PCA)$ и пользуясь тем, что $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}$, а $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PC}$, получаем соотношение

$$s(PBC) \cdot \overrightarrow{PA} + s(PCA) \cdot \overrightarrow{PB} + s(PAB) \cdot \overrightarrow{PC} = 0\,, \tag{1-19}$$

утверждающее, что барицентрическими координатами точки P относительно $\triangle ABC$ являются отношения площадей $\alpha = s(PBC)/s(ABC)$, $\beta = s(PBC)/s(ABC)$, $\gamma = s(PBC)/s(ABC)$, т. е.

$$P = \frac{s(PBC)}{s(ABC)} \cdot A + \frac{s(PCA)}{s(ABC)} \cdot B + \frac{s(PAB)}{s(ABC)} \cdot C\,. \tag{1-20}$$

Пример 1.10 (центр треугольника)
Равновесный барицентр вершин $\triangle ABC$

$$M = (A + B + C)/3$$

называется *центром* треугольника $\triangle\ ABC$. Согласно упр. 1.7 точка M является центром тяжести любой из вершин и середины противолежащей ей стороны, взятой с весом 2. Таким образом, M является точкой пересечения медиан $\triangle ABC$ и делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины (см. рис. 1⋄11). Из формулы (1-20) вытекает, что центр треугольника однозначно характеризуется как единственная точка M на плоскости, для которой

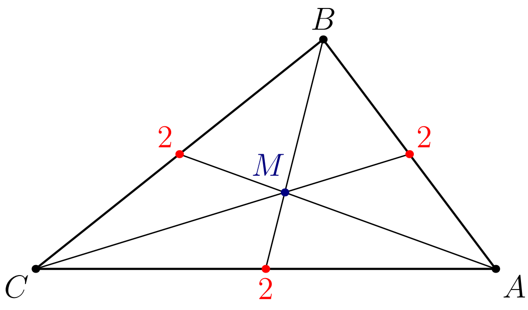

Рис. 1⋄11. Центр треугольника.

$$s(MAB) = s(MBC) = s(MCA)\,.$$

[1] См. сл. 1.3 на стр. 14.

1.6.2. Двойное отношение и гармоничность. Рассмотрим четыре различные прямые

$$a = (OA)\,, \quad b = (OB)\,, \quad c = (OC)\,, \quad d = (OD)\,,$$

пересекающиеся в точке O. Двойное отношение ориентированных площадей треугольников с вершиной O на рис. 1◇12

$$[a,b,c,d] \overset{\text{def}}{=} \frac{s(OAC)}{s(OCB)} : \frac{s(OAD)}{s(ODB)} = \frac{s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})}{s(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})} : \frac{s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})}{s(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB})} \tag{1-21}$$

не зависит ни от выбора ненулевой функции площади s, ни от выбора точек A, B, C, D на одноимённых прямых a, b, c, d, при условии, что все они отличны от O.

Упражнение 1.10. Убедитесь в этом, а также в том, что двойное отношение не меняется при одновременной транспозиции любых двух непересекающихся пар прямых, т. е.

$$[a,b,c,d] = [b,a,d,c] = [c,d,a,b] = [d,c,b,a]\,.$$

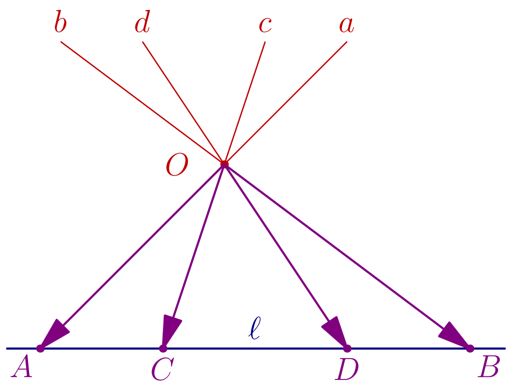

Рис. 1◇12.
$[a,b,c,d] = (\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC}) : (\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD})$.

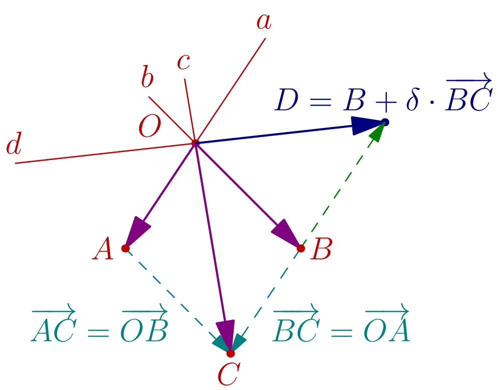

Рис. 1◇13. $\delta = [a,b,c,d]$.

Если выбрать точки A, B, C так, чтобы четырёхугольник $OACB$ был параллелограммом, т. е. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$, а в качестве точки $D \in (OD)$ взять пересечение $(OD) \cap (BC)$, как на рис. 1◇13, т. е. положить $D = B + \delta\overrightarrow{BC}$, где $\delta = \overrightarrow{BD} : \overrightarrow{BC}$ является аффинной координатой точки D на прямой BC относительно репера с началом в B и базисным вектором $\overrightarrow{BC}$, то двойное отношение $[a,b,c,d]$ окажется равным этой координате δ:

$$\begin{gathered} = \frac{s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})}{s(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})} : \frac{s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})}{s(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB})} = \frac{s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})}{s(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB})} : \frac{s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}+\delta\overrightarrow{OA})}{s(\overrightarrow{OB}+\delta\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \\ = \frac{s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}{s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} : \frac{s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}{\delta\cdot s(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \delta\,. \end{gathered} \tag{1-22}$$

Упражнение 1.11. Убедитесь, что на любой тройке различных, но пересекающихся в одной точке O прямых a, b, c всегда можно, причём единственным с точностью до гомотетии с центром в O способом, выбрать такие точки $A \in a$, $B \in b$ и $C \in c$, что четырёхугольник $OABC$ будет параллелограммом.

Таким образом, число $[a, b, c, d]$ однозначно задаёт положение прямой d по отношению к прямым a, b, c, т. е. при фиксированных a, b, c отображение $d \mapsto [a, b, c, d]$ является биекцией между множеством всех проходящих через точку $O = a \cap b \cap c$ прямых d и множеством $\Bbbk \sqcup \infty$. Прямые a, b и c переходят при этой биекции в ∞, 0 и 1 соответственно. Если $[a, b, c, d] = -1$, то прямая b пересекает любую параллельную a прямую в середине отрезка, высекаемого прямыми c и d. Такие четвёрки прямых называют *гармоническими*.

Если выбрать точки A, B, C, D лежащими на одной прямой ℓ, как на рис. 1◇12, то согласно упр. 1.9 на стр. 20 отношения площадей (1-21) переписываются как отношения пропорциональных векторов

$$[a, b, c, d] = \frac{s(OAC)}{s(OCB)} : \frac{s(OAD)}{s(ODB)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \stackrel{\text{def}}{=} [A, B, C, D]\,. \tag{1-23}$$

Эта величина называется *двойным отношением*[1] четырёх коллинеарных точек A, B, C, D. В частности, мы видим, что при фиксированных точках A, B, C, D левая часть (1-23), а с нею и (1-21) не зависят от выбора точки O при условии, что она не лежит на прямой, содержащей точки A, B, C, D. Четвёрка точек с $[A, B, C, D] = -1$ называется *гармонической*.

Упражнение 1.12. Покажите, что гармоничность равносильна равенству

$$[A, B, C, D] = [B, A, C, D]\,.$$

[1] По-английски *cross-ratio*.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Равенство $F(0) = 0$ получается прибавлением вектора $-F(0)$ к левой и правой части равенства $F(0) = F(0+0) = F(0) + F(0)$. Из равенства $0 = F(0) = F\big(v + (-v)\big) = F(v) + F(-v)$ вытекает, что $-F(v) = F(-v)$.

Упр. 1.3. Ответ: $v = y_1 w_1 + y_2 w_2$, где $y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$, $y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$.

Упр. 1.4. Первое следует из выкладки $0 = f(a+b, a+b) = f(a,b) + f(b,a)$, второе — из выкладки $f(v,v) = -f(v,v)$.

Упр. 1.5. Первое следует из того, что по правилу треугольника $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ для любого вектора $\overrightarrow{AB}$, второе — из того, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$, третье — из того, что при $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ имеем $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$ и наоборот.

Упр. 1.9. $s(PAB) : s(PBC) = s(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) : s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}) = s(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PB}) : s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}) = s(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{PB}) : s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{BC}) = s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AB}) : s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC}$.

Упр. 1.10. При замене функции s или любого из векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ на пропорциональные с ненулевым коэффициентом, коэффициент пропорциональности сократится. Неизменность двойного отношения при одновременной перестановке двух пар прямых также непосредственно видна из формулы форм. (1-21) на стр. 22.

Упр. 1.11. Для любой точки $A \in a$ имеется единственная параллельная b прямая $b' \ni A$. Точка $C = b' \cap c$ однозначно определяется по A. Далее, имеется единственная проходящая через C прямая a', параллельная a и $B = a' \cap b$ тоже однозначно определяется. Произвол в выборе точки $A \in a$ отвечает гомотетии с центром в O.

Упр. 1.12. Поскольку гармоничность означает, что прямая $b = (OB)$ пересекает любую параллельную $a = (OA)$ прямую в середине отрезка, высекаемого прямыми $c = (OC)$ и $d = (OD)$, гармоничность равносильна равенству $[A,B,C,D] = [A,B,D,C]$. Но $[A,B,D,C] = [B,A,C,D]$, т. к. двойное отношение не меняется при одновременной транспозиции двух пар точек. Имеется и чисто алгебраическое решение: прямо из определения двойного отношения вытекает равенство $[A,B,C,D] = [B,A,C,D]^{-1}$, из которого всё и следует.