Письменный экзамен за второй семестр (первая попытка)

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 40 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Простой пучок коник[1] $\ell \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ имеет базисные точки $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{P}_2$ и особые коники $S_1, S_2, S_3 \in \ell$. Выясните, как для произвольной гладкой коники $C \in \ell$ связаны между собою двойные отношения $[S_1, S_2, S_3, C]$ на ℓ и $[b_1, b_2, b_3, b_4]$ на C.

Задача 2 (10 баллов). На вещественной аффинной плоскости заданы точки p_1, p_2, p_3, p_4, расположенные в вершинах выпуклого четырёхугольника. Укажите явное условие на точку p_5, необходимое и достаточное для того, чтобы через точки $p_1, p_2, \dots, p_5$ проходил эллипс.

Задача 3 (10 баллов). На евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ опишите ГМТ пересечения всевозможных пар перпендикулярных касательных к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Задача 4 (10 баллов). Две гладкие коники на евклидовой плоскости касаются друг друга в двух разных точках, и их общие касательные в этих точках пересекаются в точке p. Докажите, что прямая, соединяющая фокус одной из коник с точкой p, делит пополам угол между касательными, опущенными из этого фокуса[2] на другую конику.

Задача 5 (10 баллов). Покажите, что на эллиптической плоскости имеется единственная с точностью до изометрического преобразования конфигурация из пяти попарно равноудалённых друг от друга точек, и найдите расстояние между точками этой конфигурации.

Задача 6 (10 баллов). Коника на плоскости Лобачевского называется *орициклом*, если она перпендикулярна пучку прямых с центром на абсолюте. Выразите длину дуги орицикла через гиперболическое расстояние между её концами.

Задача 7 (10 баллов). Ограничение собственного движения трёхмерного пространства Лобачевского на абсолют имеет там ровно одну неподвижную точку. Может ли оно иметь неподвижные точки в самом гиперболическом пространстве?

Задача 8 (10 баллов). В трёхмерном пространстве Лобачевского найдите сумму двугранных углов выпуклого n-гранного угла с вершиной на абсолюте.

[1] Т. е. пучок с четырьмя различными базисными точками и тремя различными особыми кониками.

[2] Всякий раз, когда такие касательные можно провести.